appartient à $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$. D'après (2) et d'après la propriété de la fonction (1), il existe donc une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles de la famille $\mathfrak{M}$, telle que

$$(15) \qquad Q = \Phi(E_1, E_2, E_3, \ldots).$$

Tout ensemble de la famille $\mathfrak{M}$ étant, comme nous savons, une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (4), il existe pour tout $n$ naturel une suite infinie d'indices $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}, \ldots$, telle que

$$(16) \qquad E_n = G_{p_1^{(n)}} + G_{p_2^{(n)}} + G_{p_3^{(n)}} + \cdots$$

Définisions maintenant la suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ par les conditions:

$$(17) \qquad m_{2^{n-1}(2k-1)} = p_k^{(n)} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \ k = 1, 2, 3 \ldots,$$

et posons

$$(18) \qquad \xi = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \frac{1|}{|m_3} + \cdots;$$

d'après la définition de la fonction $\nu$, nous aurons évidemment

$$\nu(q, \xi) = m_q \quad \text{pour} \quad q = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc. d'après (17):

$$(19) \qquad \nu(2^{n-1}(2k-1), \xi) = p_k^{(n)} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots; \ k = 1, 2, \ldots$$

Les formules (16), (19) et (6) donnent donc:

$$E_n = U(n, \xi), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où résulte, d'après (15):

$$(20) \qquad Q = \Phi(U(1, \xi), \ U(2, \xi), \ U(3, \xi), \ldots).$$

Distinguons maintenant deux cas:

1) $\xi \epsilon Q$. Dans ce cas il résulte de (20) que le nombre $x = \xi$ satisfait à la condition (7), ce qui prouve (d'après la définition de l'ensemble $A$) que $\xi \epsilon A$. Or, c'est impossible, puisque $AQ = 0$.

2) $\xi$ non $\epsilon Q$. Or, il résulte de (18) que $\xi$ est un nombre de $X$: d'après $Q = X - A$, nous avons donc $\xi \epsilon A$, et parsuite le nombre $x = \xi$ satisfait à la condition (7), ce qui prouve, d'après (20), que $\xi \epsilon Q$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse 2).

L'hypothèse qu'il existe un ensemble de suites $N$ satisfaisant à la condition (2) pour la famille d'ensembles $\mathfrak{M}$ considérée implique donc une contradiction.

Le problème de M. Hausdorff est ainsi résolu par négative.

---

# Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen [1]).

Von

E. Kamke (Tübingen).

1. Die approximativ stetigen Funktionen sind von Herrn A. Denjoy durch folgende Definition eingeführt [2]):

Eine reelle Funktion $f(x)$, die in einer Umgebung eines Punktes $\xi$ definiert ist, heisst an der Stelle $\xi$ approximativ stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\xi, \varepsilon)$ der Punkte $x$, für die

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

ist, im Punkte $\xi$ die Dichte 1 hat.

Dabei ist die Funktion $f(x)$, wie aus dem Zusammenhang und den Beweisen hervorgeht, als *messbar* vorausgesetzt. Herr H. Looman, der sich in dieser Zeitschrift [3]) mit den approximativ stetigen Funktionen ebenfalls beschäftigt hat, nimmt dementsprechend die Messbarkeit von $f(x)$ explicite in die Definition der approximativ stetigen Funktion auf. Ich werde hier eine etwas andere Definition der approximativ stetigen Funktion geben, eine Definition, die im Gegensatz zu der obigen die Messbarkeit *nicht* voraussetzt, und werde dann zeigen, dass die Messbarkeit aus den von mir gemachten Voraussetzungen gefolgert werden kann. Es wird sich dabei auch noch die Messbarkeit von weiteren Funktionenklassen harausstellen.

[1]) Ein mit dem in der vorliegenden Arbeit bewiesenen äquivalenter Satz findet sich bei H. W. Stepanoff (Recueil Mathématique de Moscou „*Matiematiczeskij Sbornik*" t. XXXI (1924), p. 487). Der sehr einfache Beweis von H. Kamke ist jedoch von dem des H. Stepanoff verschieden. (*Bemerkung der Redaktion*).

[2]) Bulletin de la Société Mathématique de France, 43 (1915), S. 165.

[3]) Bd. 5 (1924), S. 105 ff.

Der Beweis wird sich in überaus einfacher Weise aus einem Messbarkeitskriterium ergeben.

2. Es sei eine Menge $\mathfrak{M}$ gegeben, und es sei $\xi$ ein Punkt (der nicht $\mathfrak{M}$ anzugehören braucht) gegeben. Dann heisse [1])

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathfrak{M} \cdot (\xi - \delta, \xi + \delta)}{2\delta}$$

die innere Dichte von $\mathfrak{M}$ im Punkte $\xi$.

Eine endliche Funktion $f(x)$, die in einer Umgebung von $\xi$ definiert ist, heisse im Punkte $\xi$ approximativ stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\xi, \varepsilon)$ der Punkte $x$, für die

$$| f(x) - f(\xi) | < \varepsilon$$

ist, im Punkte $\xi$ die *innere* Dichte 1 hat.

In dieser Definition wird die Messbarkeit von $f(x)$ nicht mehr vorausgesetzt, und offenbar ist jede Funktion, die im Sinne Denjoy's approximativ stetig ist, es auch in dem eben angegebenen Sinne.

Die umfassendere Klasse von Funktionen, deren Messbarkeit ich beweisen werde, bilden die etwas halbstetigen Funktionen. Es heisse eine in einer Umgebung von $\xi$ definierte endliche Funktion $f(x)$ nach oben bzw. nach unten etwas halbstetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Punkte $x$, für die

$$f(x) < f(\xi) + \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad f(x) > f(\xi) - \varepsilon.$$

ist, in $\xi$ eine positive innere Dichte hat.

Ist $f(x)$ in jedem Punkte eines Intervalls $(a, b)$ nach oben bzw. nach unten etwas halbstetig, so heisse $f(x)$ im Intervall $(a, b)$ nach oben bzw. nach unten etwas halbstetig.

Z. B. ist die bekannte Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für rationales } x, \\ 0 & \text{für irrationales } x \end{cases}$$

in jedem Punkte nach oben etwas halbstetig (man kann sogar sagen: nach oben approximativ halbstetig), während $f_2(x) = 1 - f_1(x)$ nach unten etwas halbstetig ist.

3. Der angekündigte Satz lautet nun:

[1]) Es bezeichne $(a, b)$ das offene Intervall $a < b < x$; $\mathfrak{M} \quad \mathfrak{N}$ den Durchschnitt der beiden Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{M}$ dass innere Mass, $\overline{\mathfrak{M}}$ das äussere Mass und $|\mathfrak{M}|$ das Mass von $\mathfrak{M}$ im Lebesgueschen Sinne.



Satz 1: *Jede in $(a, b)$ nach oben (nach unten) etwas halbstetige Funktion ist messbar.*

Für den Beweis dieses Satzes leite ich den folgenden Satz ab:

Satz 2: *Eine beschränkte lineare Menge $\mathfrak{M}$, die fast in jedem ihrer Punkte eine positive innere Dichte hat (die übrigens von Punkt zu Punkt wechseln darf), ist messbar.*

Nach einem bekannten Satz von H. Lebesgue[1]) hat die Menge $\mathfrak{M}$ dann fast überall die Dichte 1. Der Satz 2 sowohl wie der Satz von Lebesgue enthalten also eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Messbarkeit einer Menge.

Beweis des Satzes 2[2]): Die Menge $\mathfrak{M}$ kann so in zwei elementenfremde Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zerlegt werden, dass $\mathfrak{M}_1$ messbar ist und $\underline{\mathfrak{M}_2} = 0$ ist. Nach dem erwähnten Satz von Lebesgue hat die Menge $\mathfrak{M}_1$ in fast jedem ihrer Punkte die Dichte 1 und daher in fast jedem Punkte ihrer Komplementärmenge und insbesondere also in fast jedem Punkte von $\mathfrak{M}_2$ die Dichte 0. Da $\underline{\mathfrak{M}_2} = 0$ ist, ist somit die *innere* Dichte von $\mathfrak{M}$ in fast jedem Punkte von $\mathfrak{M}_2$ gleich 0. Da aber $\mathfrak{M}$ in fast jedem ihrer Punkte eine *positive* innere Dichte hat, folgt $| \mathfrak{M}_2 | = 0$, d. h. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ ist messbar.

4. Beweis des Satzes 1: Es genügt, den Satz für nach oben etwas halbstetige Funktionen zu beweisen. Es sei eine Zahl $A$ gegeben. Es ist dann zu zeigen, das die Menge $\mathfrak{M}$ der Punkte $x$, für die

$$f(x) < A$$

ist, messbar ist. Es sei $\xi$ ein Punkt dieser Menge. Dann hat für $\varepsilon = A - f(\xi)$ die Menge der Punkte $x$ mit

$$f(x) < f(\xi) + \varepsilon = A$$

in $\xi$ eine positive innere Dichte. Die Menge $\mathfrak{M}(f < A)$ hat also in jedem ihrer Punkte eine positive innere Dichte. Dann ist sie aber nach Satz 2 messbar, womit auch der Satz 1. bewiesen ist.

[1]) Annales de l'école normale (3) 27 (1910) 407.

[2]) An Stelle meines ursprünglichen Beweises gebe ich hier einen wesentlich einfacheren, den ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn S. Saks verdanke.

Tübingen, 30. Januar 1927.