Soit α_{n_k} une suite partielle de α_n convergente vers un point α_0; on a donc

$$\alpha_{n_k} \to \alpha_0, \quad x_{n_k} \to x_0$$

pour $k \to \infty$ et, en vertu de l'hypothèse 5°,

$$\alpha_{n_k} x_{n_k} \to \alpha_0 x_0, \quad \alpha_{n_k} x_0 \to \alpha_0 x_0,$$

d'où il suit que la distance des points $\alpha_n x_n$ et $\alpha_n x_0$ est, pour certains n suffisamment grands, plus petite que ε, contre l'hypothèse, ce qui prouve que la formule (8) est vraie.

Je dis maintenant que le point b est situé à l'intérieur de chacune des courbes (7). Cela résulte, en vertu de la formule (8), du fait qu'il est situé à l'intérieur de la courbe $Ce = C$ et qu'il ne peut être situé sur aucune des courbes (7) comme n'appartenant pas à G.

On voit donc que le système composé de la famille des courbes

$$Cx, \quad \text{où } x \text{ parcourt } C'$$

et des points a et b satisfait aux conditions de notre lemme, d'où il résulte que le point a doit appartenir au groupe G contrairement à l'hypothèse. La proposition est donc démontrée.

Remarquons que cette proposition est indépendante de l'hypothèse 6° de la définition du groupe, car cette hypothèse n'intervient pas dans la démonstration.

Remarquons encore qu'il existe des groupes plans d'un seul tenant et ceux de deux tenant, comme le montre l'exemple des nombres complexes, l'opération sur ces éléments étant l'addition ou la multiplication des nombres complexes.

En terminant ajoutons que le lemme et la proposition concernant les groupes peuvent être généralisées dans divers sens en remplaçant des courbes simples fermées du plan par des hypersurfaces de l'espace à n dimensions ou en considérant sur des variétés à 2dimensions des courbes simples fermées qui ne divisent pas cette variété.

Sur un problème de M. Hausdorff.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. F. Hausdorff a posé récemment le problème suivant[1]).

Soit $\mathfrak{M}$ une famille donnée quelconque d'ensembles. Désignons par $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ la plus petite famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles satisfaisant à trois conditions suivantes:

1°. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

2°. Toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

3°. Tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

Soit N un ensemble donné de suites infinies de nombres naturels. Nous désignerons par $\Psi(\mathfrak{M}, N)$ la famille de tous les ensembles

$$\Phi(E_1, E_2, E_3, \ldots) = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots, \tag{1}$$

où $E_n \in \mathfrak{M}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, la sommation $\sum\limits_N$ s'étendant à toutes les suites infinies $n_1, n_2, n_3, \ldots$, appartenant à N.

M. Hausdorff demande: *Existe-t-il un ensemble N de suites, tel que*

$$\Psi(\mathfrak{M}, N) = \mathfrak{B}(\mathfrak{M}) \tag{2}$$

quelle que soit la famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles?

Nous prouverons que la réponse est *négative*.

Admettons qu'il existe un ensemble de suites N satisfaisant à la condition (2) quelle que soit la famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles.

[1]) F. Hausdorff: *Mengenlehre*. Berlin und Leipzig 1927, p. 90.

Soit X l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0,1)$ et soit $\mathfrak{M}$ la famille de tous les sous-ensembles de X qui sont ouverts relativement à X. La famille $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ est formée dans ce cas, comme on voit sans peine, de tous les sous-ensembles de X qui sont mesurables B.

Soit

(3) $$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles et posons:

(4) $$G_n = X\delta_n \qquad (\text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit sans peine que tout ensemble de la famille $\mathfrak{M}$ est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (4).

x étant un nombre de X, désignons par

(5) $$x = \frac{1|}{|\nu(1,x)} + \frac{1|}{|\nu(2,x)} + \frac{1|}{|\nu(3,x)} + \ldots$$

son développement en fraction continue et posons, pour n naturels:

(6) $$U(n,x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{\nu(2^{n-1}(2k-1),\, x)}.$$

$\Phi(E_1, E_2, E_3, \ldots)$ étant la fonction (d'une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$) définie par la formule (1), désignons par A l'ensemble de tous les nombres x de X qui satisfont à la condition

(7) $$x \in \Phi(U(1,x),\ U(2,x),\ U(3,x), \ldots).$$

n étant un indice donné, désignons par A_n l'ensemble de tous les nombres x de X qui satisfont à la condition

(8) $$x \in U(n,x).$$

On voit sans peine que

(9) $$A = \Phi(A_1, A_2, A_3, \ldots)$$ [1].

En effet, si $x \in A$, on a la formule (7), donc d'après (1), il existe une suite $n_1, n_2, n_3, \ldots$ de N, telle que

(10) $$x \in U(n_i, x) \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui prouve, vu la définition des ensembles A_n, que

(11) $$x \in A_{n_i} \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (1): $x \in \Phi(A_1, A_2, A_3, \ldots)$.

[1] Cf. Hausdorff, l. c., p. 183, formule (5).

D'autre part, si $x \in \Phi(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, on conclut, d'après (1), qu'il existe une suite $n_1, n_2, n_3, \ldots$ de N pour laquelle on a les formules (11) qui entraînent les formules (10) et, ensuite (7), ce qui prouve que $x \in A$. La formule (9) est ainsi établie.

Or, je dis que les ensembles A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartiennent à la famille $\mathfrak{M}$.

En effet, soit n un indice donné et x_0 un nombre de A_n. Nous avons donc, d'après la définition de l'ensemble A_n:

$$x_0 \in U(n, x_0),$$

donc, d'après (6), il existe un indice k (dépendant de n et de x_0), tel que

(12) $$x \in G_{\nu(2^{n-1}(2k-1),\, x_0)}.$$

Posons, pour abréger: $p = 2^{n-1}(2k-1)$: nous aurons donc, d'après (12) et (4):

(13) $$x_0 \in \delta_{\nu(p,\, x_0)}.$$

D'après une propriété connue de fractions continues, il existe (pour le nombre irrationnel x_0 et le nombre naturel p) un intervalle d entourant x_0, tel que

(14) $$\nu(p,x) = \nu(p,x_0) \qquad \text{pour} \quad x \in Xd.$$

Posons $\Delta = d\,\delta_{\nu(p,\, x_0)}$: ce sera (d'après (13)) un intervalle ouvert entourant x_0, et, d'après (14), nous aurons:

$$x \in \delta_{\nu(p,\, x)}, \qquad \text{pour} \quad x \in X\Delta,$$

donc, d'après (4):

$$x \in G_{\nu(p,\, x)} \qquad \text{pour} \quad x \in X\Delta,$$

et, d'après (6) (p désignant le nombre $2^{n-1}(2k-1)$):

$$x \in U(n,x) \qquad \text{pour} \quad x \in X\Delta,$$

c'est-à-dire, d'après la définition de l'ensemble A_n:

$$x \in A_n \qquad \text{pour} \quad x \in X\Delta,$$

ce qui prouve que A_n est un ensemble ouvert relativement à X, donc — un ensemble de la famille $\mathfrak{M}$.

Il en résulte, d'après (9) (et d'après la propriété de la fonction (1)) que $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$, donc que A est un ensemble mesurable B. Par conséquent l'ensemble $Q = X - A$ est aussi mesurable B et parsuite appartient à $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$. D'après (2) et d'après la propriété de la fonction (1), il existe donc une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles de la famille $\mathfrak{M}$, telle que

(15) $$Q = \Phi(E_1, E_2, E_3, \ldots).$$

Tout ensemble de la famille $\mathfrak{M}$ étant, comme nous savons, une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (4), il existe pour tout n naturel une suite infinie d'indices $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}, \ldots$, telle que

(16) $$E_n = G_{p_1^{(n)}} + G_{p_2^{(n)}} + G_{p_3^{(n)}} + \cdots$$

Définisions maintenant la suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ par les conditions:

(17) $$m_{2^{n-1}(2k-1)} = p_k^{(n)} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \; k = 1, 2, 3 \ldots,$$

et posons

(18) $$\xi = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \frac{1|}{|m_3} + \ldots;$$

d'après la définition de la fonction ν, nous aurons évidemment

$$\nu(q, \xi) = m_q \quad \text{pour} \quad q = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (17):

(19) $$\nu(2^{n-1}(2k-1), \xi) = p_k^{(n)} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots$$

Les formules (16), (19) et (6) donnent donc:

$$E_n = U(n, \xi), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où résulte, d'après (15):

(20) $$Q = \Phi(U(1, \xi), \; U(2, \xi), \; U(3, \xi), \ldots).$$

Distinguons maintenant deux cas:

1) $\xi \in Q$. Dans ce cas il résulte de (20) que le nombre $x = \xi$ satisfait à la condition (7), ce qui prouve (d'après la définition de l'ensemble A) que $\xi \in A$. Or, c'est impossible, puisque $A\,Q = 0$.

2) ξ non $\in Q$. Or, il résulte de (18) que ξ est un nombre de X: d'après $Q = X - A$, nous avons donc $\xi \in A$, et parsuite le nombre $x = \xi$ satisfait à la condition (7), ce qui prouve, d'après (20), que $\xi \in Q$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse 2).

L'hypothèse qu'il existe un ensemble de suites N satisfaisant à la condition (2) pour la famille d'ensembles $\mathfrak{M}$ considérée implique donc une contradiction.

Le problème de M. Hausdorff est ainsi résolu par négative.

Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen [1]).

Von

E. Kamke (Tübingen).

1. Die approximativ stetigen Funktionen sind von Herrn A. Denjoy durch folgende Definition eingeführt [2]):

Eine reelle Funktion $f(x)$, die in einer Umgebung eines Punktes ξ definiert ist, heisst an der Stelle ξ approximativ stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\xi, \varepsilon)$ der Punkte x, für die

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

ist, im Punkte ξ die Dichte 1 hat.

Dabei ist die Funktion $f(x)$, wie aus dem Zusammenhang und den Beweisen hervorgeht, als *messbar* vorausgesetzt. Herr H. Looman, der sich in dieser Zeitschrift [3]) mit den approximativ stetigen Funktionen ebenfalls beschäftigt hat, nimmt dementsprechend die Messbarkeit von $f(x)$ explicite in die Definition der approximativ stetigen Funktion auf. Ich werde hier eine etwas andere Definition der approximativ stetigen Funktion geben, eine Definition, die im Gegensatz zu der obigen die Messbarkeit *nicht* voraussetzt, und werde dann zeigen, dass die Messbarkeit aus den von mir gemachten Voraussetzungen gefolgert werden kann. Es wird sich dabei auch noch die Messbarkeit von weiteren Funktionenklassen herausstellen.

[1]) Ein mit dem in der vorliegenden Arbeit bewiesenen äquivalenter Satz findet sich bei H. W. Stepanoff (Recueil Mathématique de Moscou „*Matiematiczeskij Sbornik*" t. XXXI (1924), p. 487). Der sehr einfache Beweis von H. Kamke ist jedoch von dem des H. Stepanoff verschieden. (*Bemerkung der Redaktion*).

[2]) Bulletin de la Société Mathématique de France, 43 (1915), S. 165.

[3]) Bd. 5 (1924), S. 105 ff.