et

$$\sum_{n=1}^{\infty} b''_n \cdot \varphi_n(x) \tag{43}$$

De la convergence de la série (37) et de l'inégalité (36) il résulte que la série (43) est absolument et uniformément convergente et est, par conséquent, sommable par tout procédé linéaire en tout point. Puisque la série (31) n'est sommable en aucun point par le procédé donné, la série (29) jouit de cette meme propriété.

Ainsi, pour toute fonction positive $w(u)$, satisfaisant à la condition (20), nous pouvons former une série orthogonale (29) qui ne soit sommable par le procédé linéaire donné, en aucun point, bien que la série (30) soit convergente. Or, le procédé linéaire de sommation considéré étant arbitraire, le théorème 14 est complètement démontré.

Convenons de dire qu'une fonction positive $w(u)$ est *multiplicateur intrinsèque de M. Weyl pour un procédé linéaire de sommation donné, si la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \cdot b_n^2$$

entraîne la sommabilité presque partout par le procédé en question de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x)$$

quel que soit le système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$.

En imitant le raisonnement par lequel nous avons établi le théorème 14, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 15. *Si une fonction $w(u)$ est multiplicateur intrinsèque de M. Weyl pour une certaine méthode de sommation linéaire, cette fonction sera aussi multiplicateur intrinsèque pour la convergence ordinaire.*

15 juillet, 1923.

Un lemme topologique et son application dans la théorie des groupes abstraits.

Par

F. Leja (Varsovie).

1. Soit (C) une courbe simple fermée située dans le plan euclidien et soient A, B, P trois points de ce plan dont A est situé à l'extérieur de (C), B à l'intérieur de (C) et P sur la courbe (C) ellemême.

Supposons que la courbe (C) se déplace en se déformant en même temps d'une façon continue de sorte qu'elle ne passe jamais par le point B et que le point P décrive une courbe simple fermée contenant A à son intérieur; au moment où le point P revient à sa position initiale, nous supposerons que la courbe (C) toute entière revienne, elle aussi, à sa position initiale.

Le but de cette note est de prouver que, dans les conditions énoncées, la courbe (C) passe dans un moment par le point A et de tirer de ce fait une conséquence concernant les groupes abstraits.

Précisons d'abord l'énoncé du problème: Soit

$$C_t, \quad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{1}$$

une famille des courbes simples fermées du plan euclidien satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. $E(t, t_0)$ désignant l'écart [1]) des courbes C_t et C_{t_0} on a

$$E(t, t_0) \to 0, \quad t \to t_0$$

quel que soit t_0 contenu dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$.

[1]) C'est la borne inférieure des tous les nombres δ, où δ est la borne supérieure de l'ensemble des distances de deux points qui correspondent dans une correspondance biunivoque et bicontinue entre C_t et C_{t_0}.

V. M. Fréchet: Sur l'écart de deux courbes. *Trans. of. amer. soc. t. IV*, 1905).

2⁰. Chacune des courbes (1) contient le point B à son intérieur; la courbe C_0 est identique à C_1 et contient le point A à son extérieur.

3⁰. Pour chaque t, il existe sur C_t un point P_t tel que l'ensemble

(2) $$P_t, \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

forme une courbe, image topologique de la circonférence $z = e^{2\pi i t}$, contenant le point A à son intérieur.

Lemme. *Si les hypothèses* 1⁰, 2⁰ *et* 3⁰ *sont satisfaites, au moins une des courbes* (1) *passe par le point* A.

Démonstration: Désignons par D_t l'intérieur de la courbe C_t; ce domaine peut, comme on sait, être représenté d'une façon biunivoque et conforme sur le cercle

(K) $$|z| < 1, \qquad z = x + iy.$$

Une telle correspondance entre les dombines D_t et K s'étend toujours aux contours de ces domaines de sorte qu'elle y reste biunivoque et bicontinue. Pour la déterminer, on peut se donner un point quelconque de D_t qui devra correspondre au point $z = 0$ du cercle K et encore un point quelconque du contour C_t correspondant au point $z = 1$ du contour de K.

Soit

(3) $$w = f_t(z), \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

la fonction analytique déterminant la représentation conforme du cercle K sur le domaine D_t de sorte que le centre de K corresponde au point B de D_t et que le point $z = 1$ corresponde au point P_t de C_t. La famille des fonctions (3) jouit, en vertu de l'hypothèse 1⁰ et d'après un théorème de M. T. Radó [1]), de la propriésé que voici: t_0 étant un point quelconque de l'intervalle $<0, 1>$, il existe à chaque $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel qu'on a

$$|f_t(z) - f_{t_0}(z)| < \epsilon \quad \text{pour tous les } |z| \leqq 1,$$

si

$$|t - t_0| < \delta.$$

L'équation (3) fait correspondre au rayon $<0, 1>$ du cercle K un arc simple contenu dans D_t et joignant les points B et P_t;

[1]) T. Radó: *Sur la représentation conforme des domaines variables.* Acta Szeged, t. I, fasc. 3, 1923.

nous le désignerons par

(4) $$BP_t \text{ ou par } P_tB.$$

Cela posé, supposons que notre lemme soit faux, c'est-à-dire que le point A ne soit situé sur aucune des courbes (1). Il s'en suit que A ne peut être situé à l'intérieur d'aucune des courbes (1) car les deux ensembles T_e et T_i, où T_e contient tous les t pour lesquels A est situé à l'extérieur de C_t et T_i contient tous ceux pour lesquels A est situé à l'intérieur de C_t, doivent être ouverts, en vertu de l'hypothèse 1⁰, et l'ensemble T_e n'est pas vide en vertu de 2⁰.

Considérons la courbe fermée

(5) $$BP_0P_tB$$

composée des arcs simples BP_0, P_0P_t et P_tB dont P_0P_t est identique avec l'arc P_α, $0 \leqq \alpha \leqq t$, de la courbe (2). Le point A n'étant située ni sur la courbe (2) ni à l'intérieur des courbes C_t il n'est pas situé sur la courbe (5) et, par suite, l'ordre du point A par rapport à la courbe (5)

$$\text{ordre}_A (BP_0\,P_tB) = n_t$$

est bien déterminé quel que soit t.

La fonction n_t doit être continue et par suite, constante dans l'intervalle fermé $<0, 1>$, car on a

$$\text{ordre}_A (BP_0\,P_{t+h}B) = \text{ordre}_A (BP_0\,P_tB) + \text{ordre}_A (BP_t\,P_{t+h}B)$$

et, lorsque h est suffisamment petit, on a

$$\text{ordre}_A (BP_t\,P_{t+h}B) = 0,$$

car les arcs BP_t et BP_{t+h} sont aussi voisins qu'on veut. Mais, on a évidemment

$$n_0 = \text{ordre}_A (BP_0\,P_0B) = 0$$
$$n_1 = \text{ordre}_A (BP_0\,P_1B) = \text{ordre de la courbe (2)} = \pm 1,$$

et cette contradiction prouve que le lemme est vrai.

2. On appelle *groupe topologique* [1]) un système constitué par un ensemble E des points d'un espace topologique appelés éléments du

[1]) V. F. Leja: *Sur la notion du groupe abstrait topologique.* (Fund. Math. t. IX, 1926).

groupe et par une opération sur les points de E, appelée multiplication de ces points et représentée par le symbole $\times$, cet ensemble et cette opération étant assujeties aux conditions suivantes:

Quels que soient les points a, b, c de E on a

1°. Le produit $a \times b$, ou ab, est un point de E.

2°. $(a, b)\, c = a\,(b, c)$.

3°. Il existe dans E un point e, appellé unité du groupe, tel que $ae = ea = a$.

4°. Il existe à chaque a un point a^{-1}, appelé inverse de a, tel que $aa^{-1} = e$.

5°. Quels que soient les suites a_n et b_n appartenant à E, si $a_n \to a$ et $b_n \to b$, on a $a_n b_n \to ab$.

6°. Si $a_n \to e$, on a $a_n^{-1} \to e$.

Un tel groupe est dit n-dimensionnel si l'ensemble E est contenu dans une variété n-dimensionelle et s'il contient au moins un point intérieur de cette variété. Il est connexe si l'ensemble E est connexe.

Il suit immédiatement des hypothèses 2°, 4° et 5° que les éléments de chaque groupe n-dimensionel forment un domaine ouvert[1]) de la variété correspondante car, si le voisinage A d'un élément a appartient entièrement à E et si b est un élément quelconque de E, l'ensemble

$$ba^{-1}A \tag{6}$$

composé de tous les produits $ba^{-1}\alpha$, où α appartient à A, forme un voisinage de b[2]) appartenant à E.

Cela posé, soit G un groupe plan, c'est-à-dire un groupe 2-dimensionel contenu dans le plan euclidien. On peut montrer que:

Si G est connexe il est d'un seul tenant ou de deux tenant au plus.

En effet, supposons qu'il ne soit pas ainsi et soit G un groupe plan connexe tel que le domaine G contienne deux courbes simples fermées

$$C' \text{ et } C$$

ayant un seul point commun, l'une de ces courbes étant située

[1]) connexe ou non.

[2]) En effet, si $b_n \to b$ on a, d'après 5°, $ab^{-1}b_n \to a$ et, par suite, presque tous les $ab^{-1}b_n$ appartiennent à A; en multipliant les $ab^{-1}b_n$ par ba^{-1} on voit, d'après 3° et 4°, que presque tous les b_n appartiennent à l'ensemble (6).

à l'extérieur de l'autre et chacune d'elles contenant à son intérieur des points n'appartenant pas à G.

Supposons que le point commun de C et C' soit l'unité e de G et que les points

$$a \text{ et } b$$

soient situés successivement à l'intérieur de C' et de C sans appartenir'a G.

Formons l'ensemble de tous les produits

$$Cx \tag{7}$$

où x parcourt les points de C'. Chacun de ces produits de l'ensemble des points de C par un point fixe x de C' est une courbe simple fermée car la relation

$$\alpha \sim \alpha x$$

où α est un point quelconque de C détermine une homéomorphie entre les courbes C et Cx[1]). Posons

$$E(x, x_0) = \text{l'écart des courbes } Cx \text{ et } Cx_0;$$

je dis qu'on a, quel que soit x_0,

$$\underset{x \to x_0}{E}(x, x_0) \to 0. \tag{8}$$

En effet, il suffit de montrer que, à chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, $d(a, b)$ désignant la distance des points a et b, l'inégalité $d(x, x_0) < \delta$ entraine l'inégalité

$$d(\alpha x, \alpha x_0) < \varepsilon$$

quel que soit le point α de C. Supposons qu'il ne soit pas ainsi donc il existe un ε tel que, à chaque $\delta_n = \frac{1}{n}$, il existe un point x_n de C' et un points α_n de C tel qu'on a

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d(\alpha_n x_n, \alpha_n x_0) \geqq \varepsilon.$$

[1]) Cela résulte des hypothèses 4° et 5° car, si α et β sont deux point différents de C, on a $\alpha x \neq \beta x$ en vertu de 4° et, si une suite α_n des points de C converge vers α, $\alpha_n \to \alpha$, on a, en vertu de 5°, $\alpha_n x \to \alpha x$ et inversement.

Soit $\alpha_{n_{k}}$ une suite partielle de α_n convergente vers un point α_0; on a donc

$$\alpha_{n_k} \to \alpha_0, \quad x_{n_k} \to x_0$$

pour $k \to \infty$ et, en vertu de l'hypothèse 5°,

$$\alpha_{n_k} x_{n_k} \to \alpha_0 x_0, \quad \alpha_{n_k} x_0 \to \alpha_0 x_0,$$

d'où il suit que la distance des points $\alpha_n x_n$ et $\alpha_n x_0$ est, pour certains n suffisamment grands, plus petite que ε, contre l'hypothèse, ce qui prouve que la formule (8) est vraie.

Je dis maintenant que le point b est situé à l'intérieur de chacune des courbes (7). Cela résulte, en vertu de la formule (8), du fait qu'il est situé à l'intérieur de la courbe $Ce = C$ et qu'il ne peut être situé sur aucune des courbes (7) comme n'appartenant pas à G.

On voit donc que le système composé de la famille des courbes

$$Cx, \quad \text{où } x \text{ parcourt } C'$$

et des points a et b satisfait aux conditions de notre lemme, d'où il résulte que le point a doit appartenir au groupe G contrairement à l'hypothèse. La proposition est donc démontrée.

Remarquons que cette proposition est indépendante de l'hypothèse 6° de la définition du groupe, car cette hypothèse n'intervient pas dans la démonstration.

Remarquons encore qu'il existe des groupes plans d'un seul tenant et ceux de deux tenant, comme le montre l'exemple des nombres complexes, l'opération sur ces éléments étant l'addition ou la multiplication des nombres complexes.

En terminant ajoutons que le lemme et la proposition concernant les groupes peuvent être généralisées dans divers sens en remplaçant des courbes simples fermées du plan par des hypersurfaces de l'espace à n dimensions ou en considérant sur des variétés à 2dimensions des courbes simples fermées qui ne divisent pas cette variété.

Sur un problème de M. Hausdorff.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. F. Hausdorff a posé récemment le problème suivant[1]).

Soit $\mathfrak{M}$ une famille donnée quelconque d'ensembles. Désignons par $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ la plus petite famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles satisfaisant à trois conditions suivantes:

1°. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

2°. Toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

3°. Tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

Soit N un ensemble donné de suites infinies de nombres naturels. Nous désignerons par $\Psi(\mathfrak{M}, N)$ la famille de tous les ensembles

(1) $$\Phi(E_1, E_2, E_3, \ldots) = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots,$$

où $E_n \in \mathfrak{M}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, la sommation $\sum_N$ s'étendant à toutes les suites infinies $n_1, n_2, n_3, \ldots$, appartenant à N.

M. Hausdorff demande: *Existe-t-il un ensemble N de suites, tel que*

(2) $$\Psi(\mathfrak{M}, N) = \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$$

quelle que soit la famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles?

Nous prouverons que la réponse est *négative*.

Admettons qu'il existe un ensemble de suites N satisfaisant à la condition (2) quelle que soit la famille $\mathfrak{M}$ d'ensembles.

[1]) F. Hausdorff: *Mengenlehre*. Berlin und Leipzig 1927, p. 90.