il existe alors un ensemble G ouvert dans C et contenant un constituant S qui n'est pas ouvert dans C. Il existe donc un point $x \varepsilon S.\overline{C-S}$. Comme $F_e(S) = \overline{S}.\overline{C-S}$, x appartient à $F_e(S)$ et, comme par hypothèse, $F_e(S) \subset F_e(G)$, on en conclut que

$$x \varepsilon F_e(G). \tag{22}$$

D'autre part G est ouvert dans C, donc

$$F_e(G) = \overline{G}.C - G + G\,\overline{C-G} = \overline{G}.C - G.$$

Or x appartenant à G, x n'appartient pas à $F_e(G)$, contrairement à (22). Le théorème est donc démontré.

Il en résulte que: *pour qu'un continu C soit Jordannien, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété (F).*

Il est à noter enfin que le terme „ensemble G ouvert dans C" peut être remplacé dans l'énoncé du th. III par le terme „ensemble fermé".

Sur les séries de fonctions orthogonales.

Par

D. Menchoff (Moscou).

TROISIÈME PARTIE.

Chapitre I.

La divergence des séries orthogonales et quasi-orthogonales.

§ 1. Convenons d'appeler *série orthogonale de Fischer-Riesz*, toute série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

dont les fonctions $\varphi_n(x)$ et les constantes a_n satisfont aux conditions suivantes:

1°. Les $\varphi_n(x)$ forment un système normé de fonctions orthogonales, c'est-à-dire qu'on a:

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0\,; \qquad \text{si } n \neq m$$

$$\int_0^1 [\varphi_n(x)]^2\,dx = 1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2°. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{2}$$

est convergente.

On sait alors, ces conditions étant satisfaites, que la série (1) est

[1]) Nous supposerons, pour simplifier, les fonctions $\varphi_n(x)$ définies aux points de l'intervalle (0, 1).

une série de Fourier d'une fonction $f(x)$ à carré sommable, c'est-à-dire que les constantes a_n sont détérminées par les formules.

$$a_n = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_n(x)\, dx \text{ [1]}.$$

Dans la première partie de ce travail [2]) j'ai démontré le théorème suivant:

Quelle que soit une fonction positive $w(n)$, satisfaisant à cette condition que $w(n) = o[(\lg n)^2]$, on peut toujours détérminer une série orthogonale de Fischer-Riesz (1) *partout divergente et telle que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot a_n^2 \tag{3}$$

soit convergente. (Théorème 2.).

La question se pose de décider de la convergence de la série (1) dans le cas où les fonctions $\varphi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire dans le cas quand il existe une constante M telle que l'on ait

$$|\varphi_n(x)| < M$$

pour toutes valeurs de x et de n. Il serait intéressant de savoir s'il n'est pas possible d'étendre à ce cas le théorème 1 de la première partie de ce travail [3]), en remplaçant dans la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lg n)^2,$$

dont il s'agit dans l'énoncé de ce théorème [4]), le facteur $(\lg n)^2$ par une autre fonction croissant moins vite que $(\lg n)^2$.

Nous allons faire voir que la méthode que j'ai employée dans la démonstration du théorème 1 (aussi que les méthodes de M. M. Weyl [1]), Hobson [2]) et Plancherel [3])) est insuffisante à ce but. Pour mieux comprendre le fond de la question nous introduirons la notion de *série quasi-orthogonale.*

[1]) Fischer, *Sur la convergence en moyenne*; Comptes Rendus, t. 144, (1907) p. p. 1022—1024.
F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions;* Comptes Rendus, t. 144. p. 615.

[2]) *Fundamenta Mathematicae*, t. IV, p. 89.

[3]) loc. cit. p. 83.

[4]) Le théorème 1 s'énonce comme il suit: *La convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lg n)^2$ *implique la convergence presque partout de la série* (1).

Supposons d'abord que la série (1) est une série orthogonale de Fischer-Riesz.

Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

est convergente et les $\varphi_n(x)$ forment un système normé de fonctions orthogonales, c'est-à-dire:

$$\int_0^1 [\varphi_n(x)]^2\, dx = 1, \quad \int_0^1 \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

En se servant de ces égalités, il est facile de montrer que pour toutes valeurs entières et positives de n et p on a la relation:

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=n}^{n+p} a_i \cdot \varphi_i(x)\right]^2 dx = \sum_{i=n}^{n+p} a_i^2. \tag{4}$$

Inversement, supposons que les constantes a_n et les fonctions $\varphi_n(x)$ $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont telles que 1⁰. la série (2) est convergente, et 2⁰. pour toutes valeurs entières de n et p, $n > 0$, $p \geqq 0$, la relation (4) est verifiée. Dans ces conditions, comme on le voit facilement, la série (1) est une série orthogonale de Fischer-Riesz [4]).

Supposons maintenant que les constantes a_n et les fonctions $\varphi_n(x)$ jouissent des propriétés suivantes:

1⁰. (5) $\displaystyle\int_0^1 [\varphi_n(x)]^2\, dx = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

[1]) M. Weyl, *Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten*, Math. Annalen, Band 67, p. p. 225—245.

[2]) M. Hobson. *On the convergence of series of orthogonal functions*, Proceedings of the London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 12, p. p. 297—308.

[3]) M. Plancherel. *Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales*, Comptes Rendus, t. 157 (1913), p. 539.

[4]) Au cours de la démonstration de ce fait il faut supposer que toutes les quantités a_n sont différentes de zéro.

2°. Il estiste une série à termes positifs convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2$$

telle que l'inégalité

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=n}^{n+p} a_i \varphi_i(x)\right]^2 dx \leqq \sum_{i=n}^{n+p} \varrho_i^2 \tag{6}$$

est satisfaite pour toutes valeurs entières de n et p telles que $n > 0$, $p \geqq 0$.

Dans ces conditions, nous dirons que la série (1) est une *série quasi-orthogonale*. Il est clair que toute série orthogonale de Fischer-Riesz est une série quasi-orthogonale.

En faisant dans (6) $p = 0$, on obtient en particulier l'inégalité:

$$a_n^2 \leqq \varrho_n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui démontre la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 .$$

Ensuite, nous dirons que la série (1) est une *série asymptotiquement orthogonale* si les constantes a_n et les fonctions $\varphi_n(x)$ sont assujetties aux conditions suivantes:

1'. L'égalité (5) est satisfaite pour toute valeur de n.

2'. Il existe deux séries positives convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n'^2$$

telles que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varrho_n'}{\varrho_n} = 1$$

et que pour toutes valeurs de n et p, on a

$$\sum_{i=n}^{n+p} \varrho_i'^2 \leqq \int_0^1 \left[\sum_{i=n}^{n+p} a_i \cdot \varphi_i(x)\right]^2 dx \leqq \sum_{i=n}^{n+p} \varrho_i^2 . \tag{7}$$

Il est évident que toute série asymtotiquement orthogonale est une série quasi-orthogonale.

En analysant les démonstrations des théorèmes de MM. Weyl, Hobson et Plancherel [1]) et du théorème 1 du présent travail, on voit qu'elles sont applicables aux séries quasi orthogonales et asymptotiquement orthogonales aussi bien qu'aux séries orthogonales [2]). Mais alors, tout théorème sur la convergence des séries orthogonales tel qu'au cours de sa démonstration on ne quitte pas les idées de MM. Weyl, Hobson et Plancherel, doit avoir lieu pour les séries quasi-orthogonales aussi.

Nous sommes donc en mesure d'affirmer qu'aucun théorème sur la convergence des séries orthogonales ne peut être démontré par des méthodes des auteurs cités, si ce théorème n'est plus vrai pour des séries quasi-orthogonales ou pour des séries asymptotiquement orthogonales.

D'après la remarque faite il y a quelques instants auparavant nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 1'. *La série quasi-orthogonale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{1}$$

doit converger presque partout si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lg n)^2 \varrho_n^2 \text{ [3])}$$

(et, par suite, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lg n)^2 a_n^2)$$

converge.

Nous allons faire voir que la condition imposée aux fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, d'être bornées dans leur ensemble n'implique

[1]) Voir p. 377, not. [1]), [2]) et [3]).

[2]) On n'a qu'à remplacer dans les énoncés de ces théorèmes les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)\, a_n^2$$

par les séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)\, \varrho_n^2$$

[3]) Les ϱ_n représentent des quantités figurant dans la définition de série quasi-orthogonale ou asymptotiquement orthogonale.

point la possibilité de généraliser le théorème 1′. En effet, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème 9. *Quelle que soit une fonction positive $w(n)$ satisfaisant à la condition $w(n) = o\,[(\lg n)^2]$, on peut toujours déterminer une série asymptotiquement orthogonale partout divergente* (1) *telle que les deux séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)\, a_n^2$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)\, \varrho_n^2 \tag{8}$$

soient convergentes, les fonctions $\varphi_n(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, étant bornées dans leur ensemble.

§ 2. Avant d'aborder la démonstration du théorème 9 considérons un système de fonctions auxiliaires qu'on obtient à partir de fonctions $f_{\nu,m}(x)$ définies au paragraphe 3 de la première partie du présent travail [1]).

Posons

$$f_{\nu,c}\left(\frac{c}{\nu}\right) = 0,\ f_{\nu,c}(x) = \frac{\lg|\nu x - c|}{\lg \nu},\quad x \neq \frac{c}{\nu},$$

c étant un nombre réel quelconque. En vertu de l'égalité (16) du paragraphe cité, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f_{\nu,b} - f_{\nu,a})^2\, dx = \frac{(b-a)\,.\,C}{\nu(\lg \nu)^2}\ {}^{2)}, \tag{9}$$

C étant une constante positive.

Convenons de désigner:

$$\frac{s}{\nu^2} = c(s),\quad \frac{s}{\nu} = \sigma(s);$$

définissons maintenant un système de fonctions $g_{\nu,s}(x)$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, \ldots, -3, \ldots$, par les conditions :

$$g_{\nu,s}(x) = f_{\nu,\sigma(s)+1}(x),\quad x \leqq c(s),$$
$$g_{\nu,s}(x) = f_{\nu,\sigma(s)-1}(x),\quad x > c(s),$$

[1]) loc. cit., p. 89.

[2]) L'égalité (16) a été démontrée pour le cas $a = m$, $b = m + p$, m et p étant entiers, mais la démonstration subsiste pour toutes valeus réelles de a et b.

Il est facile de montrer que toute fonction $g_{\nu,s}(x)$ est partout continue. De plus la quantité

$$|g_{\nu,s+p}(x) - g_{\nu,s}(x)|$$

prend une même valeur aux points qui sont symétriques par rapport au point $c' = c\left(s + \frac{p}{2}\right)$ et atteint son maximum aux points $x = c(s)$ et $x = c(s+p)$. Un calcul directe montre que la valeur de $|g_{\nu,s+p}(x) - g_{\nu,s}(x)|$ en ces points est égale à

$$\frac{\lg[\sigma(p)+1]}{\lg \nu}$$

et par conséquent, pour tout x, on a

$$|g_{\nu,s+p}(x) - g_{\nu,s}(x)| \leqq \frac{\lg[\sigma(p)+1]}{\lg \nu} \tag{10}$$

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s})^2\, dx.$$

Puisque la fonction sous le signe de l'intégrale prend les mêmes valeurs aux points symétriques par rapport au point $c' = c\left(s + \frac{p}{2}\right)$, nous pouvons écrire

$$I = 2\,.\int_{c'}^{+\infty} (g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s})^2\, dx = 2\,(I_1 + I_2), \tag{11}$$

où

$$I_1 = \int_{c'}^{c(s+p)} (g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s})^2\, dx,$$

$$I_2 = \int_{c(s+p)}^{+\infty} (g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s})^2\, dx.$$

Pour tout x tel que $x > c(s+p)$, on a par définition des fonctions $g_{\nu,s}(x)$:

$$g_{\nu,s+p}(x) - g_{\nu,s}(x) = f_{\nu,\sigma(s+p)-1}(x) - f_{\nu,\sigma(s)-1}(x); \tag{12}$$

et si x satisfait à la condition $c' \leqq x < c(s+p)$, on a

$$g_{\nu,s+p}(x) - g_{\nu,s}(x) = f_{\nu,\sigma(s+p)+1}(x) - f_{\nu,\sigma(s)-1}(x). \tag{13}$$

En nous servant de la relation (12), nous aurons

$$I_2 = \int_{c(s+p)}^{+\infty} [f_{\nu,\sigma(s+p)-1} - f_{\nu,\sigma(s)-1}]^2\, dx < \int_{-\infty}^{+\infty} [f_{\nu,\sigma(s+p)-1} - f_{\nu,\sigma(s)-1}]^2\, dx,$$

d'où en vertu de (9) et d'égalité évidente $\sigma(s+p) - \sigma(s) = \sigma(p)$, on peut écrire

$$(14) \qquad I_2 < \frac{C.\sigma(p)}{\nu\,(\lg\nu)^2} = \frac{C.p}{\nu^2(\lg\nu)^2}.$$

Pour évaluer l'intégrale I_1 il faut examiner séparément les deux cas suivants:

1°. $\qquad \sigma(p) \leqq 1,$

2°. $\qquad \sigma(p) > 1.$

En vertu de (10) nous aurons dans le premier cas

$$(15) \; I_1 < [c(s+p) - c'] \cdot \left\{\frac{\lg[\sigma(p)+1]}{\lg\nu}\right\}^2 < c(p) \cdot \left(\frac{\lg 2}{\lg\nu}\right)^2 < \frac{p}{\nu^2(\lg\nu)^2}.$$

Dans le second cas nous transformons l'intégrale I_1 à l'aide de la relation (13). Nous aurons alors

$$I_1 \leqq 2 \cdot \int_{c'}^{c(s+p)} [f_{\nu,\sigma(s+p)+1} - f_{\nu,\sigma(s)+1}]^2\, dx + 2\int_{c'}^{c(s+p)} [f_{\nu,\sigma(s)+1} - f_{\nu,\sigma(s)-1}]^2\, dx,$$

d'où, en vertu de (9),

$$(16) \qquad I_1 < 2 \cdot \frac{C.\sigma(p)}{\nu\,(\lg\nu)^2} + 2 \cdot \frac{C.2}{\nu\,(\lg\nu)^2} < \frac{6.C.p}{\nu^2(\lg\nu)^2}.$$

De l'égalité (11) et des inégalités (14), (15), (16), on tire, pour toute valeur de p,

$$I < \frac{C'.p}{\nu^2(\lg\nu)^2},$$

C' étant constant. En remplaçant le premier membre de cette inégalité par une quatité plus petite, à savoir

$$\int_0^1 (g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s})^2\, dx$$

nous avons finalement

$$(17) \qquad \int_0^1 (g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s})^2\, dx < \frac{C'.p}{\nu^2(\lg\nu)^2}.$$

Posons

$$(18) \qquad \omega_{\nu,s}(x) = \omega_{\nu,s} = g_{\nu,s+1} - g_{\nu,s};$$

nous avons alors

$$(19) \qquad \omega_{\nu,s} + \omega_{\nu,s+1} + \ldots + \omega_{\nu,s+p-1} = g_{\nu,s+p} - g_{\nu,s},$$

et parsuite, en vertu de (17),

$$(20) \qquad \int_0^1 (\omega_{\nu,s} + \omega_{\nu,s+1} + \ldots + \omega_{\nu,s+p-1})^2\, dx < \frac{C'.p}{\nu^2(\lg\nu)^2}.$$

Les fonctions $g_{\nu,s}(x)$ étant continues il en est donc de même des $\omega_{\nu,s}(x)$.

Considérons maintenant la somme

$$(21) \qquad \omega_{\nu,s} + \omega_{\nu,s+1} + \ldots + \omega_{\nu,2\nu^2-1}.$$

En tenant compte de la définition des fonctions $g_{\nu,s}$, nous aurons aux points de l'intervalle $\left(\frac{s-1}{\nu^2}, \frac{s}{\nu^2}\right)$, $1 \leqq s \leqq \nu^2$, $\nu > 2$,

$$g_{\nu,s} = f_{\nu,\sigma(s)+1} = \frac{\lg[\sigma(s)+1-\nu x]}{\lg\nu} < \frac{1}{\nu\lg\nu} < \frac{1}{2},$$

$$g_{\nu,2\nu^2} = \frac{\lg[\sigma(2\nu^2)+1-\nu x]}{\lg\nu} > 1,$$

d'où

$$g_{\nu,2\nu^2} - g_{\nu,s} > \frac{1}{2},$$

et parsuite, en vertu de (19).

$$(22) \qquad \omega_{\nu,s} + \omega_{\nu,s+1} + \ldots + \omega_{\nu,2\nu^2-1} > \frac{1}{2}.$$

Puisque les intervalles $\left(\frac{s-1}{\nu^2}, \frac{s}{\nu^2}\right)$, $1 \leqq s \leqq \nu^2$, recouvrent l'intervalle (0,1) tout entier, nous pouvons énoncer la propriété suivante des fonctions $\omega_{\nu,s}(x)$:

En tout point x de l'intervalle $(0,1)$ l'inégalité (22) *est vérifiée pour une valeur au moins de s satisfaisant à la condition $1 \leqq s \leqq \nu^2$.*

Enfin, en tenant compte de (18) et de (10) nous avons

$$|\omega_{\nu,s}(x)| \leqq \frac{\lg[\sigma(1)+1]}{\lg \nu} < \frac{1}{\nu \lg \nu} \tag{23}$$

pour toutes valeurs entières de s et pour toutes valeurs réelles de x.

§ 3. A partir des fonctions $\omega_{\nu,s}(x)$ nous allons définir sur l'intervalle $(0,1)$ un système de fonctions $\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)$, $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$, qui peuvent être considérées comme fonctions d'approximation des $\omega_{\nu,s}(x)$ Soit N un entier positif dont la valeur sera précisée dans la suite et partageons l'intervalle $(0,1)$ en N parties égales. Soient $x_i = \frac{i}{N}$, $0 \leqq i \leqq N$, les points de cette division. Posons

$$\tilde{\omega}_{\nu,s}(0) = 0, \quad \tilde{\omega}_{\nu,s}(x) = \omega_{\nu,s}(x_i), \quad x_{i-1} < x \leqq x_i, \quad 1 \leqq i \leqq N.$$

Les fonctions $\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)$ sont alors uniformément définies dans tout l'intervalle $(0,1)$ et chacune d'elles demeure constante à l'intérieur de chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i), $1 \leqq i \leqq N$. Les fonctions $\omega_{\nu,s}(x)$ étant continues dans l'intervalle $(0,1)$, en prenant N suffisamment grand on obtient pour les fonctions $\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)$, $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$, d'après (20) et (23) les inégalités suivantes:

$$\int_0^1 (\tilde{\omega}_{\nu,s+1} + \tilde{\omega}_{\nu,s+2} + \ldots + \tilde{\omega}_{\nu,s+p})^2\, dx < \frac{C'.p}{\nu^2(\lg \nu)^2}, \tag{24}$$

$$0 \leqq s < 2\nu^2, \quad 0 < s+p \leqq 2\nu^2,$$

$$|\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)| < \frac{2}{\nu \lg \nu}, \quad 1 \leqq s \leqq 2\nu^2. \tag{25}$$

Enfin, en tenant compte de la propriété des fonctions $\omega_{\nu,s}(x)$ indiquée à la fin du paragraphe précédent, nous voyons que les fonctions $\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)$ jouissent de la propriété suivante:

L'inégalité

$$\tilde{\omega}_{\nu,s}(x) + \tilde{\omega}_{\nu,s+1}(x) + \ldots + \tilde{\omega}_{\nu,2\nu^2-1}(x) > \frac{1}{4} \tag{26}$$

a lieu en tout point x de l'intervalle $(0,1)$ pour une valeur au moins de s satisfaisant à la condition $1 \leqq s \leqq \nu^2$.

Soit k un entier arbitraire surpassant *un*, $k > 1$. Désignons par D_k l'intervalle $(1,k)$ et définissons sur cet intervalle des fonctions $e_s(x, D_k)$, $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$. Pour définir une fonction $e_s(x, D_k)$ nous devons tout d'abord diviser l'intervalle D_k en 2^s parties égales. En désignant ensuite par $x_i^{(s)}$, $0 \leqq i \leqq 2^s$, les points de la division, nous poserons en ces points

$$e_s(x, D_k) = 0$$

et

$$e_s(x, D_k) = \pm 1$$

à l'intérieur de chacun des intervalles $(x_{i-1}^{(s)}, x_i^{(s)})$, $1 \leqq i \leqq 2^s$, en prenant dans le second membre de l'égalité en question le signe $(+)$ ou $(-)$ suivant que i est impair ou pair.

Il est aisé de voir que les fonctions $e_s(x, D_k)$ sont orthogonales deux à deux sur l'intervalle D_k et l'on a

$$|e_s(x, D_k)| = 1$$

dans tout l'intervalle $(0, 1)$ sauf en un nombre fini de points.

Donc, nous aurons

$$\int_1^k \left[\sum_{j=s+1}^{s+p} e_j(x, D_k)\right]^2 dx = p.(k-1), \tag{27}$$

$0 \leqq s < 2\nu^2$, $1 < s+p \leqq 2\nu^2$.

Définissons maintenant des fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$, $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$, par les conditions:

1°. $\qquad \chi_{\nu,s}(x) = \tilde{\omega}_{\nu,s}(x), \qquad 0 \leqq x < 1.$

2°. $\qquad \chi_{\nu,s}(x) = \dfrac{1}{\nu \lg \nu} . e_s(x, D_k), \qquad 1 \leqq x \leqq k.$

Les fonctions $\chi_{\nu,s}$ sont ainsi définies dans l'intervalle $(0,k)$ tout entier. D'après l'inégalité (25) et par définition des $e_s(x, D_k)$ nous aurons, pour tous les points x de l'intervalle $(0,k)$, l'inégalité:

$$|\chi_{\nu,s}(x)| < \frac{2}{\nu \lg \nu}, \qquad 1 \leqq s \leqq 2\nu^2. \tag{28}$$

Énumérons tous les intervalles (x_{i-1}, x_i), $0 < i \leqq N$, et tous les intervalles $(x_{i-1}^{(2\nu^2)}, x_i^{(2\nu^2)})$, $0 < i \leqq 2^{2\nu^2}$, suivant l'ordre dans lequel on les rencontre en allant de gauche à droite et désignons les par $d_\nu^{(j)}$, $0 < j \leqq N + 2^{2\nu^2}$. Il est clair que *toutes les fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$, $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$, demeurent constantes à l'intérieur de chacun des intervalles $d_\nu^{(j)}$.* Or, puisque pour toute valeur de x satisfaisant à la condition $0 \leqslant x < 1$ les fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$ coïncident avec les $\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)$ nous voyons, en tenant compte de la propriété des $\tilde{\omega}_{\nu,s}(x)$ exprimée par l'inégalité (26), que les fonctions $\chi_{\nu,s}$ jouissent de la propriété suivante:

L'inégalité

$$\chi_{\nu,s}(x) + \chi_{\nu,s+1}(x) + \ldots + \chi_{\nu,2\nu^2-1}(a) > \frac{1}{4} \tag{29}$$

est satisfaite en tout point x de l'intervalle $(0,1)$ pour une valeur au moins de s satisfaisant à la condition $1 \leqq s \leqq \nu^2$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$J = \int_0^k (\chi_{\nu,s+1} + \chi_{\nu,s+2} + \ldots + \chi_{\nu,s+p})^2\, dx = J' + J'',$$

$0 \leqq s < 2\nu^2$, $0 < s+p \leqq 2\nu^2$, où

$$J' = \int_0^1 (\chi_{\nu,s+1} + \chi_{\nu,s+2} + \ldots + \chi_{\nu,s+p})^2\, dx,$$

$$J'' = \int_1^k (\chi_{\nu,s+1} + \chi_{\nu,s+2} + \ldots + \chi_{\nu,s+p})^2\, dx.$$

De la définition des fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$ il suit que

$$J' = \int_0^1 (\tilde{\omega}_{\nu,s+1} + \tilde{\omega}_{\nu,s+2} + \ldots + \tilde{\omega}_{\nu,s+p})^2\, dx,$$

d'où l'on tire en vertu de (24)

$$J' = \frac{C' \cdot p}{\nu^2 (\lg \nu)^2}. \tag{30}$$

Ensuite, en tenant compte de la définition des $\chi_{\nu,s}(x)$ dans l'intervalle $D_k = (1,k)$ et en se servant de (27) nous aurons

$$J'' = \frac{p \cdot (k-1)}{\nu^2 (\lg \nu)^2}. \tag{31}$$

Additionnons terme à terme l'inégalité (30) et l'égalité (31) et rappellons nous de la relation $J' + J'' = J$; nous aurons alors

$$J = \int_0^k (\chi_{\nu,s+1} + \chi_{\nu,s+2} + \ldots + \chi_{\nu,s+p})^2\, dx < \frac{p \cdot (C'+k)}{\nu^2 (\lg \nu)^2}. \tag{32}$$

Or, il est évident que $J > J''$ et par conséquent en vertu de l'égalité (30) nous pouvons écrire

$$J = \int_0^k (\chi_{\nu,s+1} + \chi_{\nu,s+2} + \ldots + \chi_{\nu,s+p})^2\, dx > \frac{p(k-1)}{\nu^2 (\lg \nu)^2}. \tag{33}$$

Posons maintenant

$$A_{\nu,s} = + \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \int_0^k [\chi_{\nu,s}(x)]^2\, dx}, \tag{34}$$

$$\tilde{\chi}_{\nu,s}(x) = \frac{\chi_{\nu,s}(x)}{A_{\nu,s}} \tag{35}$$

d'où

$$\chi_{\nu,s}(x) = A_{\nu,s} \cdot \tilde{\chi}_{\nu,s}(x). \tag{36}$$

Alors on aura d'une part

$$\int_0^k [\tilde{\chi}_{\nu,s}(x)]^2\, dx = \frac{1}{A^2_{\nu,s}} \int_0^k [\chi_{\nu,s}(x)]^2\, dx = k = \text{longueur de } (0,k) \tag{37}$$

et d'autre part, en tenant compte de la définition des $\chi_{\nu,s}(x)$ et de l'inégalité $k > 1$,

$$A_{\nu,s} > \sqrt{\frac{1}{k} \int_1^k [\chi_{\nu,s}(x)]^2\, dx} = \frac{1}{\nu \lg \nu} \sqrt{\frac{1}{k} \int_1^k [e_s(x, D_k)]^2\, dx} =$$
$$= \frac{1}{\nu \lg \nu} \cdot \sqrt{\frac{k-1}{k}} > \frac{1}{2\nu \lg \nu}. \tag{38}$$

De cette inégalité et des relations (35) et (28) nous tirons

$$|\tilde{\chi}_{\nu,s}(x)| < 4 \tag{39}$$

pour tous les points x de l'intervalle $(0,k)$.

Prenons maintenant un intervalle arbitrair $\Delta = (a,b)$ et transformons les fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$, $\tilde{\chi}_{\nu,s}(x)$ à l'aide du changement de variable

$$y = a + \frac{b-a}{k} x = a + \frac{\Delta}{k} \cdot x$$

qui transforme l'intervalle $(0,k)$ en Δ. En exprimant x par y nous en tirons

$$x = \frac{(y-a)\,.\,k}{\Delta}.$$

Nous poserons

$$\chi_{\nu,s}\left[\frac{(y-a)\,k}{\Delta}\right] = \chi_{\nu,s}(y,\Delta),$$

$$\widetilde{\chi}_{\nu,s}\left[\frac{(y-a)\,k}{\Delta}\right] = \widetilde{\chi}_{\nu,s}(y,\Delta);$$

nous désignerons dans la suite par x une variable indépendante.

Désignons par $d_\nu^{(j)}(\Delta)$, $1 \leqq j \leqq N + 2^{2\nu^2}$, des intervalles qu'on obtient à partir des intervalles $d_\nu^{(j)}$ considérés plus haut en effectuant le changement de variable

$$y = a + \frac{\Delta}{k}\,x.$$

Puisque les intervalles $d_\nu^{(j)}$ sont sans points intérieurs communs et recouvrent l'intervalle $(0, k)$ tout entier, *les intervalles $d_\nu^{(j)}(\Delta)$ recouvrent l'intervalle Δ et ne s'empiètent pas mutuellement.*

Nous avons vu que les fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$ sont constantes à l'intérieur de chacun des intervalles $d_\nu^{(j)}$, $1 \leqq j \leqq N + 2^{2\nu^2}$. Par conséquent toutes les fonctions $\chi_{\nu,s}(x,\Delta)$ et $\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)$, $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$, demeurent simultanément constantes à l'intérieur de chacun des intervalles $d_\nu^{(j)}(\Delta)$.

Nous nous proposons tout d'abord d'obtenir pour les fonctions $\chi_{\nu,s}(x,\Delta)$ et pour les $\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)$ une série d'inégalités analogues aux inégalités, démontrées déjà, pour les fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$ et $\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x)$.

De la définition des fonctions $\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)$ nous tirons immédiatement:

$$(40)\qquad \int_\Delta [\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)]^2\,dx = \frac{\Delta}{k}\cdot\int_0^k [\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x)]^2\,dx,$$

d'où, en vertu de (37),

$$(41)\qquad \int_\Delta [\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)]^2\,dx = \Delta.$$

Ensuite, d'après (36), (32), (33) et (39) nous avons:

$$(42)\qquad \chi_{\nu,s}(x,\Delta) = A_{\nu,s}\cdot\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta),$$

$$(43)\qquad \int_\Delta \left[\sum_{j=s+1}^{s+p} A_{\nu,j}\cdot\chi_{\nu,j}(x,\Delta)\right]^2 dx < \frac{p\,.\,\Delta}{\nu^2(\lg\nu)^2}\cdot\left(1+\frac{C'}{k}\right).$$

$$(44)\qquad \int_\Delta \left[\sum_{j=s+1}^{s+p} A_{\nu,j}\cdot\widetilde{\chi}_{\nu,j}(x,\Delta)\right]^2 dx > \frac{p\,.\,\Delta}{\nu^2(\lg\nu)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right),$$

$$(45)\qquad |\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)| < 4,$$

l'égalité (42) et l'inégalité (45) étant vérifiées en tout point x de l'intervalle Δ.

Désignons par $\sigma(\Delta)$ l'intervalle dont l'extrémité gauche coïncide avec celle de l'intervalle Δ et dont la longueur est $\dfrac{\Delta}{k}$,

$$(46)\qquad \sigma(\Delta) = \frac{\Delta}{k}.$$

En tenant compte de l'égalité (42) et de la propriété de fonctions $\chi_{\nu,s}(x)$ exprimée par l'inégalité (29) nous pouvons conclure en termes suivants:

L'inégalité

$$(47)\qquad \sum_{j=s}^{2\nu^2-1} A_{\nu,j}\cdot\widetilde{\chi}_{\nu,j}(x,\Delta) > \frac{1}{4}$$

a lieu en tout point x à l'intérieur de l'intervalle $\sigma(\Delta)$ pour une valeur au moins de s, satisfaisant à la condition $1 \leqq s \leqq \nu^2$.

De la définition des intervalles $d_\nu^{(j)}(\Delta)$ et de celle de l'intervalle Δ il suit que *tout intervalle $d_\nu^{(j)}(\Delta)$ soit appartient tout entier à l'intervalle $\sigma(\Delta)$, soit est sans points intérieurs communs avec $\sigma(\Delta)$.*

§ 4. En se servant des fonctions $\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)$ définies dans le paragraphe précédent nous pouvons démontrer le théorème 9 énoncé au § 1.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $w(n)$ une fonction dont il s'agit dans l'énoncé du théorème 9, c'est-à-dire $w(n)$ est une fonction positive quelconque assujettie à la seule condition

$$(48)\qquad w(n) = o\,[(\lg n)^2].$$

Sans restreindre la portée du théoreme nous pouvons, en outre, supposer que

$$(49)\qquad \lim_{n\to\infty} w(n) = +\infty.$$

En vertu de (48) on peut déterminer une suite d'entiers

$$\nu_1 = 0 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k < \ldots,$$

satisfaisant à la condition

$$(50) \qquad 1+2(\nu_1^2+\nu_2^2+\ldots+\nu_{k-1}^2)<\nu_k, \qquad k=2,3,\ldots,$$

et telle que l'on ait, pour $n \geqq \nu_k$,

$$(51) \qquad \frac{w(n)}{(\lg n)^2}<\frac{1}{k^2}, \qquad k=2,3,4,\ldots,$$

Nous allons définir tout d'abord une série asymptotiquement orthogonale

$$(52) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{\varphi}_n(x)$$

dont les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, satisfont à l'inégalité

$$|\tilde{\varphi}_n(x)|<4, \qquad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Posons

$$N_0=0, \quad N_k=1+2(\nu_1^2+\nu_2^2+\ldots+\nu_k^2), \quad k=1,2,3,\ldots,$$

d'où

$$N_1-N_0=1, \quad N_k-N_{k-1}=2\nu_k^2, \quad k \geqq 2,$$

et par conséquent, en vertu de (50),

$$(53) \qquad N_{k-1}<\nu_k, \quad N_k<3\nu_k^2.$$

Désignons par Γ_k le groupe des indices n satisfaisant à l'inégalité

$$N_{k-1}<n \leqq N_k.$$

Tous les indices $n=1,2,3,\ldots$, sont ainsi répartis en groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k, \ldots$, le groupe Γ_1 ne contenant que le seul indice 1.

Posons identiquement sur $(0,1)$:

$$a_1=1 \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_1(x)=1,$$

d'où

$$(54) \qquad \int_0^1 [a_1 \cdot \tilde{\varphi}_1(x)]^2\,dx=\int_0^1 [\tilde{\varphi}_1(x)]^2\,dx=1,$$

$$(55) \qquad |\tilde{\varphi}_1(x)|<4.$$

Nous avons donc défini la fonction $\tilde{\varphi}_n(x)$ pour l'indice $n=1$ constituant le premier groupe Γ_1.

Supposons maintenant qu'on a déjà défini les constantes a_n et les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ pour les N_{k-1} premiers indices n, $n \leqq N_{k-1}$,

appartenant aux groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{k-1}$. Nous supposerons de plus que chacune des fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$, $n \leqq N_{k-1}$, déjà définies, demeure constante à l'intérieur de tout intervalle d'un certain système Σ_k que l'on obtient en décomposant l'intervalle $(0,1)$ en parties suffisamment petites. Δ désignant un intervalle arbitraire du système Σ_k, nous désignerons respectivement par Δ' et Δ'' les moitiés de gauche et de droite de cet intervalle. Posons pour les indices n du groupe Γ_k, $s=n-N_{k-1}$, d'où $1 \leqq s \leqq 2\nu^2$. Définissons maintenant sur l'intervalle $(0,1)$ $2\nu_k^2$ constantes a_n et $2\nu_k^2$ fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ $N_{k-1}<$ $<n \leqq N_k$, par les conditions suivantes:

1°. $\tilde{\varphi}_n(x)=+\tilde{\chi}_{\nu_k,s}(x,\Delta')$ à l'intérieur de chacun des intervalles Δ'.

2°. $\tilde{\varphi}_n(x)=-\tilde{\chi}_{\nu_k,s}(x,\Delta'')$ à l'intérieur de chacun des intervalles Δ''.

3°. $\tilde{\varphi}_n(x)=0$ aux extrémités des intervalles Δ' et Δ''.

4°. $a_n=A_{\nu_k,s}$,

où $A_{\nu_k,s}$ sont des nombres définis au paragraphe précédent, k étant le numéro du groupe Γ_k.

Nous avons déjà vu que toutes les fonctions $\tilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)$ demeurent constantes à l'intérieur de chacun des intervalles $d_\nu^{(j)}(\Delta)$ dont l'ensemble recouvre tout l'intervalle Δ. Mais alors, chacune des fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$, $n \leqq N_k$, est constante à l'intérieur de chacun des intervalles d'un certain système Σ_{k+1} qui est constitué de tous les intervalles $d_\nu^{(j)}(\Delta')$ et $d_\nu^{(j)}(\Delta'')$ et qu'on obtient, par conséquent, par une décomposition de l'intervalle $(0,1)$ en un nombre fini de parties. A l'aide du système Σ_{k+1} nous définirons les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ pour les indices n du groupe Γ_{k+1} et ainsi de suite. En partant de la constante a_1 et de la fonction $\tilde{\varphi}_1(x)$ nous définirons ainsi les a_n et les $\tilde{\varphi}_n(x)$ pour tous les indices $n=1,2,3,\ldots$

En raisonnant comme nous l'avons fait au § 7 de la première partie du présent travail (pp. 101, 102) nous pouvons démontrer que deux fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ et $\tilde{\varphi}_{n'}(x)$ sont orthogonales si les indices n et n' appartiennent à deux groupes différents Γ_k et $\Gamma_{k'}$, $k \neq k'$. De l'inégalité (38) on conclut, ensuite, que tous les quantités $A_{\nu,s}$ sont positives d'où, en vertu de la définition des a_n,

$$(56) \qquad a_n>0, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^1 [\varphi_n(x)]^2\,dx.$$

En supposant que l'indice n appartient au groupe Γ_k, $k \geqq 2$, nous aurons

$$\int_0^1 [\tilde{\varphi}_n(x)]^2 dx = \sum \left\{ \int_{\Delta'} [\tilde{\chi}_{\nu_k, s}(x, \Delta')]^2 dx + \int_{\Delta''} [\tilde{\chi}_{\nu_k, s}(x, \Delta'')]^2 dx \right\},$$

où $s = n - N_{k-1}$ et la sommation Σ étant étendue à tous les intervalles du système Σ_k. En tenant compte de l'égalité (41) et des égalités évidentes $\Delta' + \Delta'' = \Delta$, $\Sigma \Delta = 1$ [1]), nous aurons, pour $n \geqq 2$,

(57) $$\int_0^1 [\tilde{\varphi}_n(x)]\, dx = 1.$$

L'égalité (54) montre que l'égalité (57) a lieu aussi pour $n = 1$, c'est-à-dire il est établi que cette dernière égalité est vérifiée pour toutes les valeurs $n = 1, 2, 3, \dots$

Par définition des $\tilde{\varphi}_n(x)$ et en vertu de (45), (55) nous avons, ensuite

(58) $$|\tilde{\varphi}(x)| < 4, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

c'est-à-dire que les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble.

Montrons que

(52) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \tilde{\varphi}_n(x)$$

est une série asymptotiquement orthogonale. Considérons à cet effet deux séries à termes positifs

(59) $$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n'^2$$

où

(60) $$\varrho_1 = \varrho_1' = 1 \quad \text{et} \quad \varrho_n = \frac{1}{\nu_k \log \nu_k} \cdot \sqrt{1 + \frac{C'}{k}}, \quad \varrho_n' = \frac{1}{\nu_k \log \nu_k} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{k}},$$

si n satisfait à la condition $N_{k-1} < n \leqq N_k$, $k \geqq 2$. (C' est une constante figurant dans l'inégalité (43)). Nous avons tout d'abord

[1]) $\Sigma \Delta$ désignant la somme des longueurs de tous les intervalles du système Σ_k.

(61) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\varrho_n'}{\varrho_n} = \lim_{k \to \infty} \sqrt{\frac{1 - \dfrac{1}{k}}{1 + \dfrac{C'}{k}}} = 1.$$

Montrons maintenant que l'on a

(62) $$\sum_{i=n}^{n+p} \varrho_i'^2 \leqq \int_0^1 \left[\sum_{i=n}^{n+p} a_i \,.\, \tilde{\varphi}_i(x) \right]^2 dx \leqq \sum_{i=n}^{n+p} \varrho_i^2.$$

pour toutes les valeurs entières de n et p telles que $n > 0$, $p \geqslant 0$.

Considérons deux indices quelconques h' et h'', $h' \leqslant h''$, appartenant à un même groupe Γ_k, $k > 1$ et formons l'intégrale

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=h'}^{h''} a_i \,.\, \varphi_i(x) \right]^2 dx.$$

Posons $s = i - N_{k-1}$, $s' = h' - N_{k-1}$, $s'' = h'' - N_{k-1}$ d'où $1 \leqq s \leqq 2\nu_k^2$, $1 \leqq s' \leqq 2\nu_k^2$, $1 \leqq s'' \leqq 2\nu_k^2$. Par définition des fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ et des constantes a_n, nous pouvons écrire, en vertu de (42):

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=h'}^{h''} a_i \,.\, \tilde{\varphi}_i(x) \right]^2 dx = \sum \left\{ \int_{\Delta'} \left[\sum_{s=s'}^{s''} \chi_{\nu_k, s}(x, \Delta') \right]^2 dx + \int_{\Delta''} \left[\sum_{s=s'}^{s''} \chi_{\nu_k, s}(x, \Delta'') \right]^2 dx \right\},$$

où Δ' et Δ'' désignent respectivement la moitié gauche et droite d'un intervalle arbitraire Δ du système Σ_k, la sommation du terme à droite de l'égalité précédente étant étendue à tous les intervalles de ce système.

En tenant compte des inégalités (43), (44) et des relations $\Delta' + \Delta'' = \Delta$, $\Sigma \Delta = 1$, nous avons

$$\frac{h'' - h' + 1}{\nu_k^2 (\lg \nu_k)^2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) < \int_0^1 \left[\sum_{i=h'}^{h''} a_i \,.\, \tilde{\varphi}_i(x) \right]^2 dx < \frac{h'' - h' + 1}{\nu_k^2 (\lg \nu_k)^2} \left(1 + \frac{C'}{k}\right)$$

et, par conséquent, d'après la définition des quantités ϱ_n et ϱ_n',

(63) $$\sum_{i=h'}^{h''} \varrho_i'^2 \leqq \int_0^1 \left[\sum_{i=h'}^{h''} a_i \tilde{\varphi}_i(x) \right]^2 dx \leqq \sum_{i=h'}^{h''} \varrho_i^2.$$

Or, puisque $\varrho_1 = \varrho_1' = a_1 = 1$, l'inégalité (63) est aussi vérifiée dans le cas $h' = h'' = 1$, c'est-à-dire si les indices h' et h'' sont égaux et appartiennent au groupe Γ_1.

Si les indices n et $n+p$ appartient à un même groupe Γ_k, $k \geqq 1$, de l'inégalite (63) nous tirons immédiatement l'inégalité (62).

Soient maintenant n et $n+p$ deux indices appartenant aux groupes distincts Γ_k et $\Gamma_{k'}$, $k < k'$. Nous aurons $N_{k-1} < n \leqq N_k \leqq \leqq N_{k'-1} < n+p \leqq N_{k'}$ et, par suite,

$$\sum_{i=n}^{n+p} a_i \cdot \tilde{\varphi}_i(x) = \sum_{i=n}^{N_k} a_i \tilde{\varphi}(x) + \sum_{j=k+1}^{k'-1} \sum_{i=N_{j-1}+1}^{N_j} a_i \cdot \tilde{\varphi}_i(x) + \sum_{i=N_{k'-1}+1}^{n+p} a_i \cdot \tilde{\varphi}_i(x)\ ^{1)}.$$

Nous avons déjà vu que, si les indices n et n' appartiennent à deux groupes différents Γ_j et $\Gamma_{j'}$, $j \neq j'$, les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ et $\tilde{\varphi}_{n'}(x)$ sont orthogonales. Dans ce cas, d'après la dernière égalité et d'après (63). nous obtenons encore l'inégalité (62), c'est-à-dire que l'inégalité (62) a lieu pour toutes les valeurs entières de n et p, $n > 0$, $p \geqslant 0$.

Montrons maintenant que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot a_n^2, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \cdot \varrho_n^2, \tag{8}$$

aussi bien que les deux séries (59), sont convergentes. En faisant dans (62) $p = 0$, nous aurons

$$\varrho_n'^2 \leqq a_n^2 \leqq \varrho_n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, puisque nous avons fait cette hypothèse que

$$\lim_{n\to\infty} w(n) = +\infty,$$

pour la démonstration de convergence de séries (3), (8) et (59) il nous suffira de démontrer la convergence de la seule série (8).

En vertu de (51), (53) et (60) nous aurons, pour $k \geqq 2$,

[1)] Si $k' = k+1$, la somme de milieu doit être omise.

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} w(n) \cdot \varrho_n^2 = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varrho_n^2 \cdot \frac{w(n)}{(\lg n)^2} \cdot (\lg n)^2 \leqq$$

$$\leqq (N_k - N_{k-1}) \cdot \frac{1}{\nu_k^2 \cdot (\lg \nu_k)^2} \cdot \left(1 + \frac{C'}{k}\right) \cdot \frac{1}{(k-1)^2} (\lg N_k)^2 < \frac{C''}{(k-1)^2},$$

C'' étant constant; par conséquent,

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} w(n) \cdot \varrho_n^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} w(n) \cdot \varrho_n^2 < C'' \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2},$$

et cette inégalité montre que la série (8) est convergente, et par suite la série (3) et les deux séries (59) le sont aussi.

De la convergence des séries (59) et d'après (57), (61) et (62) on conclut immédiatement à l'orthogonalité asymptotique de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \tilde{\varphi}_n(x). \tag{52}$$

Démontrons maintenant que la série (52) est presque partout divergente. Au cours de l'étude des fonctions $\chi_{\nu,\iota}(x, \Delta)$ et $\tilde{\chi}_{\nu\iota}(x, \Delta)$, définies sur un intervalle arbitraire Δ, nous nous servîmes d'un intervalle $\sigma(\Delta)$, appartenant à Δ et satisfaisant à la condition

$$\sigma(\Delta) = \frac{\Delta}{k}. \tag{46}$$

Désignons par Δ' et Δ'', comme nous l'avons déjà fait, les moitiés de gauche et de droite des intervalles Δ du système Σ_k et soit E_k l'ensemble de tous les points x intérieurs aux intervalles correspondants $\sigma(\Delta')$ et $\sigma(\Delta'')$. D'après (46) et $\Delta' + \Delta'' = \Delta$, $\Sigma\Delta = 1$, nous avons:

$$\text{Mes}\, E_k = \frac{1}{k}; \tag{64}$$

chacun des intervalles Δ' et Δ'' contient une partie de l'ensemble E_k dont la mesure est k fois plus petite que la longueur de l'intervalle correspondant Δ' ou Δ''.

Soit E l'ensemble limite complet de la suite des E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Il résulte de la définition du système Σ_k, que tout intervalle Δ de ce système est un intervalle $d^{(j)}_{\nu_{k-1}}(\delta')$ ou $d^{(j)}_{\nu_{k-1}}(\delta'')$. δ' et δ''

désignant respectivement les moitiés de gauche et de droite d'un intervalle arbitraire δ du système Σ_{k-1} [1]). Dans ce cas, la mesure de la partie de l'ensemble E_k contenue dans l'un quelconque des intervalles $d^{(j)}_{\nu_{k-1}}(\delta')$, $d^{(j)}_{\nu_{k-1}}(\delta'')$ est k fois plus petite que la longueur de l'intervalle correspondant. Puisque l'ensemble E_{k-1} est formé de points intérieurs à tous les intervalles $\sigma(\delta')$ et $\sigma(\delta'')$ possibles, et puisque chacun des intervalles $d^{(j)}_{\nu_{k-1}}(\delta')$, $d^{(j)}_{\nu_{k-1}}(\delta'')$ soit appartient tout entier à l'un des intervalles $\sigma(\delta')$, $\sigma(\delta'')$, soit n'a pas de points intérieurs communs ni avec $\sigma(\delta')$ ni avec $\sigma(\delta'')$, nous avons

$$\text{Mes}\,(E_{k-1}\,.\,E_k) = \frac{1}{k}\,.\,\text{Mes}\,E_{k-1},$$

où $(E_{k-1}\,.\,E_k)$ désigne la partie commune à E_{k-1} et E_k.

On démontre de même que

$$\text{Mes}\,[(E_k + E_{k+1} + \ldots + E_{k+s-1})\,.\,E_{k+s}] =$$
$$= \frac{1}{k+s}\,.\,\text{Mes}\,(E_k + E_{k+1} + \ldots + E_{k+s-1}),\quad s \geqq 2,$$

d'où, en vertu de (64),

$$\text{Mes}\,(E_k + E_{k+1} + \ldots + E_{k+p}) = 1 - \prod_{s=0}^{p}\left(1 - \frac{1}{k+s}\right),\quad p \geqq 1.$$

Et, puisque

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{s=0}^{p}\left(1 - \frac{1}{k+s}\right) = 0,$$

nous avons, par définiton de E,

(65) $$\text{Mes}\,E = 1.$$

Soit x un point de l'ensemble E_k; x est donc intérieur soit à un $\sigma(\Delta')$ soit à un $\sigma(\Delta'')$. Si x est intérieur à $\sigma(\Delta')$, d'après une propriété des fonctions $\widetilde{\chi}_{\nu,s}(x,\Delta)$ exprimée par l'inégalité (47), nous avons

$$\left|\sum_{i=s}^{2\nu_k^2-1} A_{\nu_k,j}\,.\,\widetilde{\chi}_{\nu_k,j}(x,\Delta')\right| > \frac{1}{4},$$

[1]) Cette dépendance entre Σ_k et Σ_{k-1} a été indiquée pour les systèmes Σ_{k+1} et Σ_k.

s étant un entier dépendant de x et satisfaisant à la condition $1 \leqslant s \leqslant \nu_k^2$. En tenant compte de la défintion des $\widetilde{\varphi}_n(x)$ et des a_n, nous en tirons

$$\left|\sum_{i=n}^{k-1+2\nu_k^2-1} a_i\,.\,\widetilde{\varphi}_i(x)\right| > \frac{1}{4},$$

où $n = N_{k-1} + s$. Nous obtenons cette même inégalité dans cette hypothèse que le point x est intérieur à un intervalle $\sigma(\Delta'')$.

D'après la définition de l'ensemble E_k nous pouvons énoncer la propriété suivante:

L'inégalité

$$|a_n\,.\,\widetilde{\varphi}_n(x) + a_{n+1}\,.\,\widetilde{\varphi}_{n+1}(x) + \ldots + a_{n'}\,.\,\widetilde{\varphi}_{n'}(x)| > \frac{1}{4}$$

a lieu en tout point x de l'ensemble E_k pour un couple au moins d'entiers n et n', satisfaisant à la condition $N_{k-1} < n < n'$

Or, puisque $\lim_{k\to\infty} N_{k-1} = \infty$, nous voyons sans peine que la série (52) diverge en tout point de l'ensemble E, c'est-à-dire, d'après (65), presque partout dans (0, 1).

Nous sommes en mesure de déterminer maintenant une série asymptotiquement orthogonale

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.\,\varphi_n(x)$$

dont il s'agit dans l'énoncé du théorème 9.

Posons

$$\varphi_n(x) = \widetilde{\varphi}_n(x)$$

aux points de l'ensemble E, et

$$\varphi_n(x) = 1$$

ailleurs. En vertu de (58), nous aurons

$$|\varphi_n(x)| < 4,\quad 0 \leqq x \leqq 1,\qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

c'est-à-dire que les fonctions $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont bornées dans leur ensemble.

Puisque les fonctions $\varphi_n(x)$ ne diffèrent des fonctions $\widetilde{\varphi}_n(x)$ qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle et la série (52) étant asymptotiquement orthogonale, la série (1) doit être de la même nature.

De plus, nous avons déjà démontré la convergence des deux séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \,.\, a_n^2 \tag{3}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \,.\, \varrho_n^2, \tag{8}$$

où ϱ_n, $n=1,2,3,\ldots$, sont des nombres dont il s'agit dans la définition de la série asymptotiquement orthogonale (52) et, par conséquent, de la série (1) aussi. Donc, pour démontrer le théorème 9 il nous ne reste qu'à montrer que la série (1) diverge partout.

Nous démontrons d'abord que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{66}$$

est divergente. En effet, d'après (56), on voit que tous les termes de (66) sont positifs. En tenant compte de ce fait que les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, sont bornées dans leur ensemble, nous concluons immédiatement à la divergence de la série (66), puisque s'il en était le contraire la série (52) serait uniformément convergente dans (0, 1).

Nous voyons maintenant que la série (1) diverge partout puisqu'elle coïncide avec la série (52) aux points de l'ensemble E et coïncide avec la série (66) aux autres points.

Ainsi, pour toute fonction positive $w(n)$ satisfaisant aux conditions

$$w(n) = o\,[(\lg n)^2], \quad \lim_{n\to\infty} w(n) = +\infty\ ^{1)},$$

nous avons déterminé une série (1) satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé du théorème 9, ce théorème est donc complètement démontré

§ 5. Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \varphi_n(x) \tag{1}$$

[1]) La dernière condition, comme nous l'avons déjà remarqué, ne diminue pas la portée du théorème 9.

une série orthogonale de Fischer-Riesz quelconque; alors, d'une part les $\varphi_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, constituent un système normé de fonctions orthogonales, et d'autre part la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{2}$$

est convergente.

En vertu du théorème de Fischer-Riesz[1]) nous pouvons alors définir une fonction $f(x)$ de carré sommable pour laquelle la série (1) est sa série de Fourier, c'est-à-dire que les a_n sont définies par les formules:

$$a_n = \int_0^1 f(x) \,.\, \varphi_n(x)\, dx, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

Supposons d'abord que le système des fonctions $\varphi_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, est le système trigonométrique, c'est-à-dire coïncide avec le système de fonctions

$$1, \quad \sqrt{2}\cos 2\pi n x, \quad \sqrt{2}\sin 2\pi n x, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

Dans ce cas a lieu, comme on le sait, le théorème suivant de Riemann:

La convergence de la série de Fourier de $f(x)$ en un point x ne dépend que des valeurs de $f(x)$ au voisinage de ce point[2]).

La question se pose alors de savoir si l'on ne pourrait étendre ce théorème au cas d'un système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ quelconque. Nous allons voir que le théorème de Riemann n'est pas susceptible d'une telle généralisation. A cet effet il nous suffira d'avoir constaté l'existence d'une série de Fourier partout divergente d'une fonction $f(x)$ de carré sommable et qui est nulle aux points d'un certain intervalle.

Nous allons montrer que, *on peut définir un système normé de fonctions orthogonales $\omega_n(n)$, $n=1,2,3,\ldots$, dans l'intervalle* $(-1,+1)$ *et une fonction $f(x)$ de façon à satisfaire les conditions suivantes:*

1°. *$f(x)$ est de carré sommable, c'est-à-dire*

$$\int_{-1}^{+1} [f(x)]^2\, dx < +\infty.$$

[1]) Fischer, loc. cit.
F. Riesz, loc. cit.

[2]) H. Lebesgue. Leçons sur les séries trigonométriques, p. 66.

2^0. *$f(x)=0$ aux points de l'intervalle* $(-1,0)$.
3^0. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \omega_n(x) \tag{67}$$

diverge partout dans $(-1,+1)$, *avec*

$$a_n = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \omega_n(x)\, dx. \tag{68}$$

D'après le théorème 3 de la première partie de ce travail [1]) il existe un système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$ $n=1,2,3,\ldots$, sur l'intervalle $(0,1)$ et une suite de constantes a_n telles que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{1}$$

diverge partout dans $(0,1)$, bien que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

soit convergente. D'après le théorème de Fischer-Riesz, nous pouvons définir alors dans l'intervalle $(0,1)$ une fonction $\psi(x)$ de carré sommable telle que l'on ait:

$$a_n = \int_0^1 \psi(x) \cdot \varphi_n(x)\, dx, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

Posons, maintenant

$$\omega_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varphi_n(x), \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varphi_n(-x), \qquad -1 \leqq x < 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \psi(x), \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ f(x) &= 0. \quad -1 \leqq x < 0. \end{aligned} \right. \tag{69}$$

Il est clair que la fonction $f(x)$ est de carré sommable et que les $\omega_n(x)$; $n=1,2,3,\ldots$, forment un système normé de fonctions orthogonales dans $(-1,+1)$. De plus, nous aurons,

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \omega_n(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \psi(x) \cdot \varphi_n(x)\, dx = a_n,$$

c'est-à-dire que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \omega_n(x) \tag{67}$$

est la série de Fourier de $f(x)$.

De la définition des $\omega_n(x)$ il suit que les termes de la série (67) ont des valeurs égales aux points symétriques par rapport au point $x=0$. Puisque la série (67) se réduit à la série (1) pour $x \geqq 0$, on voit que la série (67) diverge en tout point de l'intervalle $(-1,+1)$.

Ainsi, les fonctions $f(x)$ et $\omega_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, jouissent de toutes les propriétés qui leur étaient imposées il y a un instant, d'ou il résulte qu'on ne peut pas remplacer dans l'énoncé du théorème de Riemann le système de fonctions trigonométriques par un système quelconque de fonctions orthogonales.

On sait qu'un système de fonctions $\psi_n(x)$ [1]), $n=1,2,3,\ldots$, orthogonales dans un intervalle (a,b) est dit complet s'il n'existe aucune fonction à carré sommable ne faisant pas partie du système qui soit orthogonale à toutes les fonctions $\psi_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$ Il est démontré que le système trigonométrique, c'est-à dire le système des fonctions

$$1, \quad \sqrt{2}\cos 2\pi n x, \quad \sqrt{2}\sin 2\pi n x, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

est un système complet; par conséquent le système pour lequel le théorème de Riemann est démontré, est complet.

Nous allons faire voir qu'on ne peut étendre ce théorème au cas d'un système complet quelconque. A cet effet nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 10. *On peut définir un système normé et complet de fonctions $h_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, orthogonales sur l'intervalle $(-1,+1)$ et une fonction $f(x)$ de carré sommable dans $(-1,+1)$ de façon à satisfaire aux conditions suivantes:*

A. *$f(x)$ est nulle à l'intérieur de l'intervalle* $(-1, 0)$.

[1]) loc. cit. p. 89.

[1]) Nous supposons ici que les $\psi_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, sont de carré sommable.

B. *La série*

(70) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot h_n(x)$$

diverge partout dans $(-1, +1)$, *avec*

$$c_n = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot h_n(x)\, dx.$$

D é m o n s t r a t i o n. Prenons le système normé, déjà défini, des fonctions $\omega_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, orthogonales dans $(-1, +1)$ et soit $f(x)$ la fonction définie par les conditions (69). Désignons par $\Phi_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, les fonctions qui forment avec les $\omega_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, un système complet et normé de fonctions orthogonales [1]).

La série (67) étant partout divergente dans $(-1, +1)$ nous pouvons définir une suite d'entiers positifs croissants

$$n_1 = 0 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots,$$

un nombre positif B et une suite d'ensembles E_k, $k = 1, 2, \ldots$, de façon à satisfaire aux conditions:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Mes} E_k = 2 =$ longueur de $(-1, +1)$.

(b) En tout point x d'un ensemble E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, est vérifiée l'inégalité

$$\left|\sum_{n=n'}^{n''} a_n \cdot \omega_n(x)\right| > B$$

pour deux entiers au moins n' et n'', satisfaisant à la condition $n_k < n' < n'' < n_{k+1}$.

Définisons les fonctions $\tilde{h}_n(x)$ comme il suit:

$$\tilde{h}_{n_k+k}(x) = \Phi_k(x), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\tilde{h}_n(x) = \omega_{n-k}(x), \quad n_k + k < n \leqq n_{k+1} + k.$$

Il est clair que les $\tilde{h}_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, forment un système normé et complet de fonctions orthogonales.

En posant

$$c_n = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \tilde{h}_n(x)\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

[1]) On sait qu'un système complet et normé de fonctions orthogonales doit être nécessairement dénombrable.

nous aurons, pour $n_k + k < n \leqq n_{k+1} + k$,

$$c_n = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \omega_{n-k}(x)\, dx = a_{n-k}.$$

Dans ce cas, en tenant compte des conditions (a) et (b) nous voyons immédiatement que la série

(71) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \tilde{h}_n(x).$$

diverge presque partout.

Soit E l'ensemble de points de divergence de la série (71); alors,

(72) $$\operatorname{Mes} E = 2 = \text{longueur de } (-1, +1).$$

Définissons les fonctions $h_n(x)$ de manière suivante:

$$h_n(x) = \tilde{h}_n(x)$$

pour toutes valeurs de n et pour tout point x, sauf ce cas quand x n'appartient pas à l'ensemble E et l'indice n est tel que l'on a $c_n \neq 0$. Alors, dans ce cas exceptionnel nous faisons

$$h_n(x) = \frac{1}{c_n}.$$

En vertu de (72) et par définition des $h_n(x)$, nous voyons que les $h_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, constituent un système complet et normé de fonctions orthogonales. De plus, la série

(70) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot h_n(x).$$

diverge partout, car elle est identique avec la série (71) aux points de l'ensemble E et se réduit à

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots,$$

aux autres points.

$f(x)$ étant de carré sommable, nulle à l'intérieur de l'intervalle $(-1, 0)$, et les c_n étant telles qu'on a

$$c_n = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \tilde{h}_n(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot h_n(x)\, dx, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

le théorème 10 se trouve complètement démontré.

Chapitre II.

Multiplicateurs de M. Weyl.

§ 1. Convenons d'appeler *fonction* ou *multiplicateur de M. Weyl* toute fonction positive $w(n)$ jouissant de cette propriété que la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)\cdot a_n^2$$

entraîne la convergence presque partout de la série

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\varphi_n(x)$$

quel que soit le système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$, $n=1,2,3,\ldots$, et les constantes a_n étant arbitraires.

Jusqu'ici nous avons toujours supposé qu'un multiplicateur de M. Weyl ne dépendait que de n; dans ce chapitre nous aurons à considérer des multiplicateurs de M. Weyl dépendant des coefficients a_n de la série orthogonale (1). Soit u une variable susceptible de prendre toutes les valeurs réelles positives et soit $w(u)$ une fonction positive de cette variable. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et remplaçons dans $w(u)$ l'argument u par une variable $\dfrac{1}{|a_n|}$ qui tend à l'infini avec n[1]). Notre problème à résoudre est de savoir quelles sont les fonctions $w(u)$ pour lesquelles la convergence de la série

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\cdot a_n^2$$

entraîne la convergence presque partout de la série orthogonale (1). Nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème 11. *$\omega(u)$ étant une fonction positive croissante et telle que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega(p)}$$

[1]) Nous supposons tous les a_n non nuls.

converge, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *la convergence de la série*

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}[\omega(\lg|\lg|a_n||)]^2(\lg|a_n|)^2\, a_n^2$$

entraîne la convergence presque partout de la série orthogonale

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\varphi_n(x).$$

Nous voyons donc que la convergence de la série (2) entraîne celle de la série orthogonale (1) presque partout si l'on fait $w(u)=[\omega(\lg\lg u)]^2(\lg u)^2$, la fonction $\omega(p)$ étant définie il y a un instant. En particulier, $w(u)$ peut être de la forme $(\lg\lg u)^{2+\varepsilon}(\lg u)^2$, ε étant un nombre positif quelconque.

Or, puisque la fonction $(\lg\lg u)^{2+\varepsilon}(\lg u)^2$ croit moins vite que u^{ε}, pour u croissant indéfiniment, nous obtenons comme corollaire du théorème 11 le théorème suivant:

Théorème 12. *Quel que soit un nombre positif ε, la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{2-\varepsilon}$$

entraîne presque partout la convergence de la série orthogonale (1).

Nous démontrerons tout d'abord ce

Lemme. *Soit*

$$\psi_1(x),\quad \psi_2(x),\ldots,\quad \psi_s(x),\ldots,\quad \psi_N(x),\qquad N>1,$$

un système normé de fonctions orthogonales dans (0, 1), *c'est-à-dire*

$$\int_0^1[\psi_s(x)]^2\,dx = 1,\qquad \int_0^1\psi_s(x)\cdot\psi_{s'}(x)\,dx = 0,\quad s\neq s',$$

$$1\leqq s\leqq N,\quad 1\leqq s'\leqq N.$$

Désignons par E l'ensemble de tous les points x tels que l'inégalite

$$(4)\qquad \left|\sum_{s=s'}^{s''} c_s\cdot\psi_s(x)\right| < \delta,\quad \delta>0,$$

a lieu pour toutes valeurs s' et s'' satisfaisant à la condition $1 \leqq s' \leqq s'' \leqq N$ [1]), *c_s étant constantes.*

Alors, on aura

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Mes} \complement E < \frac{K}{\delta^2} (\lg N)^2 \cdot \sum_{s=1}^{N} c_s^2$$

ou K désigne une constante positive et $\complement E$ est l'ensemble complémentaire de E.

Au cours de la démonstration de ce lemme nous ferons usage d'une inégalité établie au § 2 de la première partie de ce travail [2]) et que nous pouvons exprimer comme il suit:

En supposant que les quantités a_s sont constantes et que les fonctions $\varphi_s(x)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, forment un système normé de fonctions orthogonales, nous désignerons par $G_m = G_m(\delta)$, $\delta > 0$, l'ensemble de tous les points x tels que l'inégalité

$$\left| \sum_{s=s'}^{s''} a_s \cdot \varphi_s(x) \right| < \delta$$

est vérifiée pour toutes valeurs s' et s'' satisfaisant à la condition $2^m < s' \leqq s'' < 2^{m+1}$, où m est un entier positif. Alors,

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{Mes} \complement G_m < \frac{K' . m^2}{\delta^2} \cdot \sum_{s=2^m+1}^{2^m+1} a_s^2$$

K' étant positif et constant [3]).

Le système normé de fonctions orthogonales $\varphi_s(x)$, $2^m < s < 2^{m+1}$, et les quantités a_i dont il s'agit dans la définition de l'ensemble G_m, peuvent être absolument quelconques. Alors, l'inégalité précédente

[1]) Au cours de la démonstration de ce lemme et du théorème 11 nous prendrons de logarithmes à base 2.

[2]) loc. cit, p. 88.

[3]) Au paragraphe cité de la première partie, nous avons pris au lieu de δ la quantité 4δ et nous avons posé

$$\sum_{s=2^m+1}^{2^m+1} a_s^2 = A_m.$$

L'inégalité (6) y était écrite sous la forme

$$\operatorname{Mes} CG_m < \frac{2^7 . m^2}{\delta^2} A_m.$$

subsistera si nous y remplaçons la somme du terme à droite par

$$\sum_{s=1}^{2^m} a_s^2$$

et si nous prenons au lieu de l'ensemble G_m un ensemble $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(\delta)$, formé de tous les points x en lesquels l'inégalité

$$\left| \sum_{s=s'}^{s''} a_s \cdot \varphi_s(x) \right| < \delta$$

est vérifiée pour toutes valeurs s' et s'' inférieures à 2^m. Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Mes} \complement \mathcal{E}_m < \frac{K' . m^2}{\delta^2} \sum_{s=1}^{2^m} a_s^2$$

$\complement \mathcal{E}_m$ désignant toujours l'ensemble complémentaire de $\mathcal{E}_m$.

Supposons que l'entier m est défini par la condition

$$2^{m-1} \leqq N < 2^m,$$

N étant le nombre figurant dans l'énoncé du lemme. Puisque tout système fini de fonctions orthogonales peut être complété [1]), nous pouvons définir un système normé de fonctions $\psi_s(x)$, $N < s < 2^m$, orthogonales entre elles et à toutes les $\psi_s(x)$, $1 \leqq s \leqq N$, données dans l'enoncé du lemme.

Faisons

$$a_s = c_s, \quad 1 \leqq s \leqq N,$$
$$a_s = 0, \quad N < s < 2^m;$$

nous voyons alors que l'ensemble E se réduit à $\mathcal{E}_m$ si dans la définition de ce dernier ou prend les fonctions $\psi_n(x)$ au lieu des $\varphi_n(x)$. L'inégalité (7) prend alors la forme

$$\operatorname{Mes} \complement E < \frac{K' . m^2}{\delta^2} \cdot \sum_{s=1}^{N} c_s^2.$$

En tenant compte de l'inégalité

[1]) Nous disons qu'un système de fonctions orthogonales peut être complété s'il existe au moins une fonction orthogonale à toutes les fonctions du système.

$$2^{m-1} \leqq N < 2^m, \qquad \bar{N} > 1,$$

et en faisant $4 . K' = K$, nous tirons l'inégalité (5).

§ 2. Passons à la démonstration du théorème 11. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, nous pouvons supposer que l'on a

(8) $$|a_n| < \frac{1}{4}$$

pour toutes valeurs de n, en supprimant s'il le faut un nombre fini de termes dans la série (1). Mais alors, pour toute valeur de n on peut choisir un entier positif p de façon à vérifier l'inégalité:

(9) $$\frac{1}{2^{2^{p+1}}} < |a_n| \leqq \frac{1}{2^{2^p}}.$$

Il est clair que p étant donné, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n vérifiant l'inégalité (9); soit N_p leur nombre (N_p peut être nul, en particulier). Énumérons les valeurs de l'indice n satisfaisant à l'inégalité (9) dans l'ordre de leur croissance et désignons les respectivement par

$$n(p, 1), \quad n(p, 2), \ldots, \quad n(p, s), \ldots, \quad n(p, N_p);$$

alors

$$n(p, s) < n(p, s+1), \quad 1 \leqq s < N_p.$$

Soit $\omega(u)$ une fonction quelconque satisfaisant aux conditions imposées dans l'énoncé du théorème 11 et désignons par E_p l'ensemble de tous les points x en lesquels a lieu l'inégalité

$$\left|\sum_{s=s'}^{s''} a_{n(p,s)} \cdot \varphi_{n(p,s)}(x)\right| < \frac{1}{\omega(p)}\text{[1]}.$$

pour toutes valeurs s' et s'' ne surpassant point N.

Nous allons démontrer, tout d'abord, que la série

(10) $$\sum_{p=1}^{\infty}{}' \operatorname{Mes} CE_p$$

converge, l'accent (') signifiant que la sommation ne s'étend qu'à toutes les valeurs de p pour lesquelles $N_p \neq 0$.

[1]) Bien entendu, l'ensemble E_p n'est défini que pour des valeurs de p telles que $N_p \neq 0$.

Supposons d'abord que $N_p > 1$. En vertu du lemme du paragraphe précédent dans laquelle on fait

$$N = N_p, \quad \delta = \frac{1}{\omega(p)},$$

$$c_s = a_{n(p,s)}, \quad \psi_s(x) = \varphi_{n(p,s)}(x), \quad E = E_p,$$

nous avons

(11) $$\operatorname{Mes} CE_p < K . [\omega(p)]^2 . (\lg N_p)^2 . \sum_{s=1}^{N_p} a^2_{n(p,s)}$$

et nous pouvons supposer que $K > 1$.

Nous allons voir que le membre à droite de l'inégalité (11) est le terme général d'une série convergente.

De la définition des $n(p, s)$, nous tirons

(12) $$\frac{1}{2^{2^{p+1}}} < |a_{n(p,s)}| \leqq \frac{1}{2^{2^p}},$$

d'où

$$2^{2^p} \leqq \frac{1}{|a_{n(p,s)}|} < 2^{2^{p+1}}$$

et, par conséquent,

(13) $$\omega(p) \leqq \omega\,|\lg|\lg|a_{n(p,s)}||\,|,$$

(14) $$2^p \leqq |\lg|a_{n(p,s)}||.$$

De l'inégalité (12) nous tirons ensuite

(15) $$\frac{N_p}{2^{2^{p+2}}} \leqq \sum_{s=1}^{N_p} a^2_{n(p,s)}.$$

Or, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et que $\omega(u)$ est croissante, de la convergence de la série (3) il résulte celle de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

et, par conséquent, le membre à droite de l'inégalité (15) est inférieur à *un* pour toutes valeurs suffisamment grandes de p. Dans ce cas, pour ces mêmes valeurs de p, nous aurons

(16) $$\lg N_p < 2^{p+2}.$$

En combinant l'inégalité (11) avec (13), (14) et (16) nous aurons finalement, pour $N_p > 1$,

$$(17)\quad \text{Mes}\, CE_p < 16\,.\,K\,.\sum_{s=1}^{N_p} [\omega(\lg|\lg|a_{n(p,s)}||)]^2 (\lg|a_{n(p,s)}|)^2 \,.\, a^2_{n(p,s)}\,.$$

Et pour $N_p = 1$, nous avons évidemment

$$\text{Mes}\, CE_p \leqq [\omega(p)]^2 a^2_{n(p,1)},$$

d'où nous tirons encore l'inégalité (17) à condition de prendre p suffisamment grand. De l'inégalité (17) et de la convergence de la série (3) nous concluons immédiatement à la convergence de la série (10).

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble limité complet des ensembles CE_p. Puisque la série (10) est convergente, d'après un théorème connu [1]), nous avons

$$\text{Mes}\, \mathcal{E} = 0$$

et, par conséquent,

$$(18)\qquad \text{Mes}\, C\mathcal{E} = 1.$$

Nous allons faire voir que la série (1) converge en tout point de l'ensemble $C\mathcal{E}$. Prenons deux entiers positifs quelconques n' et n'', $n' \leqq n''$, et désignons respectivement par p' et p'' la plus petite et la plus grande de celles des valeurs de p pour lesquelles se trouve vérifiée l'inégalité (9), pour une valeur au moins de n, satisfaisant à la condition $n' \leqq n \leqq n''$. Il est clair que les nombres p' et p'' sont indéfiniment croissants avec n' et n'' et que $p' \leqq p''$.

Soient respectivement s'_p et s''_p la plus petite et la plus grande des valeurs de s pour lesquelles subsiste l'inégalité $n' \leqq n(p,s) \leqq n''$. Nous pouvons écrire

$$(19)\qquad \sum_{n=n'}^{n''} a_n \,.\, \varphi_n(x) = \sum_{p=p'}^{p''}{}' \sum_{s=s'_p}^{s''_p} a_{n(p,s)} \,.\, \varphi_{n(p,s)}(x),$$

l'accent (′) signifiant comme précédemment que la sommation s'étend aux valeurs de p pour lesquelles $N_p \neq 0$.

De la définition de l'ensemble $\mathcal{E}$ il suit que tout point de l'ensemble $C\mathcal{E}$ n'appartient à aucun des ensembles E_p d'indices p suffi-

[1]) N. Lusin, Intégrale et série trigonométrique; Moscou, 1915. p. 38, (en russe).

samment élevés. Mais alors, en nous servant de la relation (19), et en tenant compte de la définition des ensembles E_p, nous voyons que, pour tout point x de l'ensemble $C\mathcal{E}$ a lieu l'inégalité

$$\left|\sum_{n=n'}^{n''} a_n \,.\, \varphi_n(x)\right| < \sum_{p=p'}^{p''} \frac{1}{\omega(p)}$$

pour toutes valeurs suffisamment grandes de n' et n''.

La série (10) étant convergente, cette dernière inégalité montre que la série (1) converge en tout point de l'ensemble $C\mathcal{E}$ et que, par suite, en vertu de (18), la série (1) est presque partout convergente, c. q. f. d.

§ 3. Appelons *multiplicateur intrinsèque de M. Weyl* toute fonction positive $w(u)$ telle que la convergence de la série

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|a_n|}\right) . \, a_n^2$$

entraîne la convergence presque partout de la série orthogonale

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \varphi_n(x).$$

Du théorème 11 il suit que

$$w(u) = [\omega(\lg \lg u)]^2 (\lg u)^2$$

est un multiplicateur intrinsèque de M. Weyl si la fonction $\omega(u)$ est positive et croissante et telle que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(p)}$$

soit convergente. Dans ce paragraphe nous démontrerons qu'aucune fonction positive $w(u)$ satisfaisant à la condition

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{w(u)}{(\lg u)^2} = 0$$

ne peut être multiplicateur intrinsèque de M. Weyl. A cet effet, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 13. *Quelle que soit une fonction positive $w(u)$, satisfaisant à la condition*

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{w(u)}{(\lg u)^2}=0\,^{1}), \tag{20}$$

on peut toujours former une série orthogonale (1) *partout divergente et telle que la série* (2) *converge.*

Démonstration. Soit $w(u)$ une fonction positive quelconque vérifiant l'égalité (20). Comme nous avons démontré au paragraphe 7 de la première partie du travail [2]), pour toute fonction positive $w\ n)$ satisfaisant à la condition

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{w(n)}{(\lg n)^2}=0$$

il existe une série orthogonale partout divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \varphi_n(x) \tag{1}$$

telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n)\,.\,a_n^2 \tag{21}$$

converge [3]). En vertu de la condition (20) nous pouvons admettre que la série (1) est définie pour la fonction $w(u)$ de l'énonce du théorème 13.

Les constantes a_n étaient définies de manière suivante. Nous considérions, tout d'abord, un certain système d'entiers positifs ν_k et N_k, $k=1,2,\ldots$, pour lesquels avaient lieu des relations

$$\nu_{k-1}<\nu_k,\quad N_k=1+2\,(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_k),\quad N_k<3\nu_k,$$

$$\frac{w(n)}{(\lg n)^2}<\frac{1}{k^2},\quad n\geqq\nu_k,\quad k\geqq 2\,^{4}) \tag{22}$$

Puis, nous avions un système de fonctions $\psi_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, satisfaisant à l'inégalité

[1]) Dans la démonstration du théorème nous prenons des logarithmes à base e.

[2]) loc. cit. pp. 99–105.

[3]) Remarquons, pour la suite, que nous pouvons définir chacune des fonctions $\varphi_n(x)$ de telle sorte quelle ne prenne qu'un nombre fini de valeurs et qu'elle soit, par suite, bornée.

[4]) loc. cit., inégalité (38), page 99.

$$0<\int_0^1[\psi_n(x)]^2\,dx\leqq\frac{C'}{\nu_k(\lg\nu_k)^2},\quad N_{k-1}<n\leqq N_k,\quad k\geqq 2, \tag{23}$$

où C' désignait une constante positive [1]); alors, les quantités a_n étaient données par les formules

$$a_n=\sqrt{\int_0^1[\psi_n(x)]^2\,dx}\ ^{2}). \tag{24}$$

De la relation (24) et de l'inégalité (23) nous tirons immédiatement

$$0<a_n^2<\frac{C'}{\nu_k(\lg\nu_k)^2},\quad N_{k-1}<n\leqq N_k,\quad k\geqq 2. \tag{25}$$

Démontrons maintenant la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|a_n|}\right).\,a_n^2 \tag{2}$$

Sans restreindre la portée du théorème, nous pouvons supposer que, pour u croissant indéfiniment, la fonction $w(u)$ ne décroît pas et que le rapport

$$\frac{w(u)}{(\lg u)^2}$$

n'est jamais croissant [3]).

Nous pouvons écrire

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} w\left(\frac{1}{|a_n|}\right).\,a_n^2=\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k}\frac{w\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}{\left[\lg\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\right]^2}\,.\,(\lg|a_n|)^2\,.\,a_n^2. \tag{26}$$

Parceque $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ et que la fonction $w(u)$ n'est jamais décroissante,

[1]) loc. cit. inégalité (42), p. 102.

[2]) loc. cit. relation (46), p. 104.

[3]) Si la fonction $w(u)$ ne jouissait pas la de dernière propriété, on pourrait la remplacer par la fonction $w(u)=H(u)(\lg u)^2$. $H(u)$ étant borne supérieure du rapport

$$\frac{w(v)}{(\lg v)^2}$$

pour $v\geqq u$.

pour toutes valeurs suffisamment grandes de n, a lieu l'inégalité

$$w\left(\frac{1}{|a_n|}\right) \leqq w\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$$

d'où

$$(27) \qquad \frac{w\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}{\left[\lg\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\right]^2} \leqq 4 \cdot \frac{w\left(\frac{1}{a_n^2}\right)}{\left[\lg\left(\frac{1}{a_n^2}\right)\right]^2}.$$

D'autre part, en vertu de (25), nous obtenons

$$\frac{1}{a_n^2} > \frac{\nu_k . (\lg \nu_k)^2}{C'}, \quad N_{k-1} < n \leqq N_k,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{a_n^2} > \nu_k, \quad N_{k-1} < n \leqq N_k,$$

pour toutes valeurs suffisamment grandes de k.

En combinant cette dérnière inégalité avec (22) et (27) nous trouvons

$$(28) \qquad \frac{w\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}{\left[\lg\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\right]^2} < \frac{4}{k^2}, \quad N_{k-1} < n \leqq N_k.$$

Puisque, u décroissant de $\frac{1}{e}$ à 0, la fonction $|\lg u| . u$ décroît, en vertu de l'inégalité (25), nous aurons

$$(\lg |a_n|)^2 . a_n^2 < \left[\lg \sqrt{\frac{C'}{\nu_k (\lg \nu_k)^2}}\right]^2 . \frac{C'}{\nu_k (\lg \nu_k)^2} < \frac{L}{\nu_k},$$

où L est une constante positive.

En tenant compte de cette dernière inégalité et de (28) et (26) et en se rappelant que $N_k < 3\nu_k$, nous avons

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} w\left(\frac{1}{|a_n|}\right) . a_n^2 < \frac{4 . L (N_k - N_{k-1})}{k^2 . \nu_k} < \frac{12 . L}{k^2},$$

d'où résulte immédiatement la convergence de la série (2).

Ainsi, pour toute fonction positive $w(u)$ satisfaisant à la condition (20), nous avons défini une série orthogonale (1) partout divergente pour laquelle la série (2) converge. Le théorème 13 est donc complètement démontré [1]).

§ 4. Dans ce paragraphe nous considererons des multiplicateurs intrinsèques de M. Weyl en vue de leurs applications aux questions de sommation de séries orthogonales par les procédés linéaires de M. Toeplitz [2]).

Nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 14. *Pour tout procédé linéaire de sommation et pour toute fonction positive $w(u)$ satisfaisant à la condition*

$$(20) \qquad \lim_{u \to +\infty} \frac{w(u)}{(\lg u)^2} = 0.$$

[1]) Pendant la rédaction de ce travail, M. Kolmogoroff m'a communiqué qu'il a généralisé le théorème 11 en établissant cette proposition:

La fonction $\omega(\lg \lg u) . (\lg u)^2$ est multiplicateur intrinsèque de M. Weyl si la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(p)}$$

est convergente.

[2]) Rappelons la définition des procédés linéaires de sommation. Soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

une série numérique quelconque. Considérons une série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(\varrho)$$

dont les termes dépendent d'un certain paramètre ϱ et supposons que les quantités $\alpha_m(\varrho)$ jouissent des propriétés suivantes:

1°. $\lim\limits_{\varrho \to g} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m(\varrho) = 1$, g étant un nombre fini, ou $g = \infty$,

2°. $\lim\limits_{\varrho \to g} \alpha_m(\varrho) = 0$, $m = 1, 2, 3, \ldots,$

3°. $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\alpha_m(\varrho)| < M$

pour toute valeur de ϱ pour laquelle $\alpha_m(\varrho)$ sont définies, M étant indépendant de ϱ.

Suposons que la valeur de l'expression

$$S(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\varrho) . \sum_{k=1}^{n} u_k$$

tend vers une limite déterminée S, pour $\varrho \to g$; nous disons alors que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ est sommable par le procédé linéaire défini par les quantités $\alpha_m(\varrho)$ et que sa somme est égale à S.

on peut définir une série orthogonale

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x) \tag{29}$$

qui n'est sommable en aucun point par le procédé considéré, bien que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \cdot b_n^2 \tag{30}$$

soit convergente.

Démonstration. Au § 1 de la seconde partie de ce travail (théorème 4) [1]) nous avons démontré que pour tout procédé linéaire de sommation on peut définir une série orthogonale de Fischer-Riesz

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n \cdot \varphi_n(x) \tag{31}$$

qui ne soit sommable par le procédé en question en aucun point [2]).

Les quantités b'_n étaient définies de la façon suivante [3]). Nous considérâmes tout d'abord une série arbitraire orthogonale de Fischer-Riesz partout divergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} c_h \cdot \Phi_h(x), \tag{32}$$

toutes les c_h étant différentes de zéro. Puis, nous définîmes une certaine suite croissante d'entiers positifs $h(m)$, $m=1, 2, 3, \ldots$, et, à côté de cela, nous choisîmes parmi les c_h, $h=1, 2, 3, \ldots$, une sous-suite

$$c'_1,\ c'_2,\ c'_3, \ldots,\ c'_m, \ldots$$

Alors, les quantités b'_n étaient définies par les conditions

$$b'_n = c'_m \tag{33}$$

si $n = h(m)$, et

$$b'_n = 0$$

si n était distinct de tous les $h(m)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

1) Fund. Math., 8, p. 58.

2) Rappelons qu'une série (31) est dite série orhogonale de Fischer-Riesz si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'^2_n$$

est convergente et si les $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, forment un système normé de fonctions orthogonales.

3) Dans le théorème 4 ces quantités étaient désignées par a_n.

Remarquons encore que chacune des fonctions $\varphi_n(x)$ est égale à une certaine $\Phi_h(x)$ soit identiquement, soit en tout point n'appartenant pas à un certain ensemble de mésure nulle, sur lequel on a

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{b'_n}.$$

(Ce dernier cas ne peut avoir lieu, naturellement, que si $b'_n \neq 0$ [1]).

1) Rappelons, avec plus de détails, la définition de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) \tag{a}$$

figurant dans l'énoncé du théorème 4 et possédant les mêmes propriétés que la série (31).

En supposant que la série (32) est une série orthogonale arbitraire de Fischer-Riesz, partout divergente, nous avons défini une suite croissante d'entiers positifs $l(n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{l(n)}\, \Phi_{l(n)}(x) \tag{b}$$

converge presque partout. En supprimant, ensuite, dans la série (32) tous les termes de la série (b) nous avons obtenu une série orthogonale presque partout divergente

$$\sum_{m=1}^{\infty} c'_m \cdot \chi_m(x). \tag{c}$$

On peut supposer, en omettant les termes égals à zéro, que toutes les constantes c'_m, $m=1, 2, 3, \ldots$, sont différentes de zéro.

Soit E l'ensemble de points de divergence de la série (c), $\operatorname{Mes} E = 1$. En posant

$$\widetilde{\varphi}_m(x) = \chi_m(x), \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

en tous les points de l'ensemble E, et

$$\widetilde{\varphi}_m(x) = \frac{1}{c'_m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

en dehors de E, nous avons obtenu une série

$$\sum_{m=1}^{\infty} c'_m\, \widetilde{\varphi}_m(x) \tag{d}$$

partout divergente.

Etant donné un procédé de sommation linéaire quelconque, nous avons défini une suite croissante de certains nombres entiers et positifs $h(m)$, $m=1, 2, 3, \ldots$. En supposant que m' soit la plus grande valeur de m vérifiant la condition $h(m) \leqslant n$, nous avons posé, ensuite,

$$a_{h(m)} = c'_m, \quad \varphi_{h(m)}(x) = \widetilde{\varphi}_m(x)$$

et

$$a_n = 0, \quad \varphi_n(x) = \Phi_{l(n-m')}(x)$$

Soit $w(u)$ une fonction positive arbitraire vérifiant la condition (20). Supposons que la série (32) est identique à la série (1) définie, pour la fonction donnée $w(u)$, au cours de la démonstration du théorème 13. Dans ce cas la série

$$\sum_{h=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|c_h|}\right) \cdot c_h^2$$

et, par suite, la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|c'_m|}\right) \cdot c'^2_m$$

doit être convergente.

De la définition des quantités b'_n il résulte que cette dernière série est identique à

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' w\left(\frac{1}{|b'_n|}\right) \cdot b'^2_n \tag{35}$$

l'accent (′) désignant que la sommation ne s'étend qu'à ceux des termes pour lesquels $b'_n \neq 0$. D'ici nous tirons la convergence de la série (35).

Comme nous l'avons fait remarquer au cours de la démonstration du théorème 13 (page 412, note [3])), on peut supposer chacune des fonctions $\Phi_h(x)$ bornée et, par conséquent, on peut le faire autant pour les $\varphi_n(x)$. μ_n désignant la borne supérieure de la fonction $|\varphi_n(x)|$, nous aurons

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \mu_n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{36}$$

Pour obtenir la série (31) dont il s'agit dans l'énoncé du théorème 14, nous définirons d'abord des quantités b''_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, qui sont, en premier lieu, différentes de zéro si, et seulement si, $b'_n = 0$ et qui, en second lieu, décroissent assez rapidement pour entraîner la convergence des deux séries positives

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b''_n| \cdot \mu_n \tag{37}$$

lorsque n est différent de tous les nombres $h(m)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Nous avons vu que les nombres $h(m)$ peuvent être déterminés de telle façon que la série (a), ainsi obtenue, soit précisément la série figurant dans l'énoncé du théorème 4.

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'' (\lg |b''_n|)^2 \, b''^2_n,$$

(le double-accent (″) désignant que la sommation ne s'étend qu'aux termes pour lesquels $b''_n \neq 0$).

De la condition (20) il résulte

$$\lim_{v \to 0} \frac{w\left(\frac{1}{v}\right)}{(\lg v)^2} = 0,$$

mais alors, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|b''_n|}\right) \cdot b''^2_n \tag{38}$$

est convergente.

En faisant

$$b_n = b'_n + b''_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{39}$$

nous aurons, par définition des b''_n:

$$b_n = b'_n \tag{40}$$

si $b'_n \neq 0$, et

$$b_n = b''_n \tag{41}$$

si $b''_n \neq 0$, d'où

$$b_n \neq 0. \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{42}$$

Des égalités (40) et (41) nous concluons que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \cdot b_n^2 \tag{30}$$

est formée de termes de deux séries (35) et (38) et doit, par conséquent, être convergente.

Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x). \tag{29}$$

De l'égalité (39) il résulte que la série (29) s'obtient par addition terme-à-terme des deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n \cdot \varphi_n(x) \tag{31}$$

et

(43)
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n'' \cdot \varphi_n(x)$$

De la convergence de la série (37) et de l'inégalité (36) il résulte que la série (43) est absolument et uniformément convergente et est, par conséquent, sommable par tout procédé linéaire en tout point. Puisque la série (31) n'est sommable en aucun point par le procédé donné, la série (29) jouit de cette meme propriété.

Ainsi, pour toute fonction positive $w(u)$, satisfaisant à la condition (20), nous pouvons former une série orthogonale (29) qui ne soit sommable par le procédé linéaire donné, en aucun point, bien que la série (30) soit convergente. Or, le procédé linéaire de sommation considéré étant arbitraire, le théorème 14 est complètement démontré.

Convenons de dire qu'une fonction positive $w(u)$ est *multiplicateur intrinsèque de M. Weyl pour un procédé linéaire de sommation donné, si la convergence de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \cdot b_n^2$$

entraîne la sommabilité presque partout par le procédé en question de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x)$$

quel que soit le système normé de fonctions orthogonales $\varphi_n(x)$.

En imitant le raisonnement par lequel nous avons établi le théorème 14, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 15. *Si une fonction $w(u)$ est multiplicateur intrinsèque de M. Weyl pour une certaine méthode de sommation linéaire, cette fonction sera aussi multiplicateur intrinsèque pour la convergence ordinaire.*

15 juillet, 1923.

Un lemme topologique et son application dans la théorie des groupes abstraits.

Par

F. Leja (Varsovie).

1. Soit (C) une courbe simple fermée située dans le plan euclidien et soient A, B, P trois points de ce plan dont A est situé à l'extérieur de (C), B à l'intérieur de (C) et P sur la courbe (C) elle-même.

Supposons que la courbe (C) se déplace en se déformant en même temps d'une façon continue de sorte qu'elle ne passe jamais par le point B et que le point P décrive une courbe simple fermée contenant A à son intérieur; au moment où le point P revient à sa position initiale, nous supposerons que la courbe (C) toute entière revienne, elle aussi, à sa position initiale.

Le but de cette note est de prouver que, dans les conditions énoncées, la courbe (C) passe dans un moment par le point A et de tirer de ce fait une conséquence concernant les groupes abstraits.

Précisons d'abord l'énoncé du problème: Soit

(1)
$$C_t, \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

une famille des courbes simples fermées du plan euclidien satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. $E(t, t_0)$ désignant l'écart [1]) des courbes C_t et C_{t_0} on a

$$E(t, t_0) \to 0, \quad t \to t_0$$

quel que soit t_0 contenu dans l'intervalle $<0,1>$.

[1]) C'est la borne inférieure des tous les nombres δ, où δ est la borne supérieure de l'ensemble des distances de deux points qui correspondent dans une correspondance biunivoque et bicontinue entre C_t et C_{t_0}.

V. M. Fréchet: Sur l'écart de deux courbes. *Trans. of. amer. soc. t. IV*, 1905),