pose $r = -\frac{1}{2}$, on aura (pour $\varepsilon = 0$): $\sigma_n^0 = s_n = o(\sqrt{\lg n})$. Si l'on s'appuie maintenant sur le théorème de M. Weyl[1]) d'après lequel la condition $\Sigma a_n^2 \lg n < \infty$ entraîne la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1) presque partout et sur le théorème connu de Kronecker[2]), on obtient que la série

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{\lg n}} \varphi_n$$

converge presque partout. On en déduit facilement le théorème de MM. Menchoff[3]) et Rademacher[4]) d'après lequel la série (1) converge presque partout pourvu que $\Sigma a_n^2 \lg^2 n < \infty$.

[1]) H. Weyl, Mathematische Annalen, **67**.
[2]) L. Kronecker, C. R., **103** (1886), p. 980.
[3]) D. Menchoff, Fund. Math., **4**.
[4]) H. Rademacher, Math. Annalen, 87.

Sur les constituants d'ensembles situés sur des continus arbitraires.

Par

Piotr Szymański (Varsovie).

Dans sa Thèse de 1911[1]) Janiszewski a prouvé que, si l'on entoure un point p d'un cercle et si C est un continu (plan) qui unit ce point à un autre point situé en dehors du cercle, alors on peut — sans sortir du cercle — unir le point p à la circonférence du cercle par un continu extrait de C. Les nombreuses applications de ce théorème ont conduit à la découverte d'autres propriétés analogues des continus.

D'abord Janiszewski, lui-même, a généralisé dans le *Bull. de l'Acad. de Cracovie*[2]) son théorème de la façon suivante:

„*C étant un continu borné et M un vrai sous ensemble fermé de C, tout constituant*[3]) *de M contient des points limites de l'ensemble C—M*[4]).

Plus tard M. Mazurkiewicz[5]) a démontré que:

„*C étant un continu borné et M un vrai sous-ensemble de C tel que*

[1]) S. Janiszewski. *Sur les continus irréductibles entre deux points* Thèse. Paris 1911, th. IV. p. 22. L'énoncé de Janiszewski est presque équivalent à celui du texte.

[2]) S. Janiszewski. *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*. Cracovie 1912, p. 907, lemme 1.

[3]) Le constituant S du point p dans M, c'est l'ensemble de tous les points de M, qui peuvent être unis avec p par un continu situé dans M. (Cf. B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les ensembles connexes*. Fund. Math. v. II, p. 215.

[4]) M. L. Vietoris a démontré un théorème analogue en remplaçant le continu C par un ensemble plus général. (L. Vietoris. *Stetige Menge*. Monatsh. f. Math. u. Phys. B. XXXI Satz. 33).

[5]) S. Mazurkiewicz. *O pewnej klasyfikacji punktów leżących na kontinuach*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 1916, p. 436—437.

$C-M$ est fermé, tout constituant de M a des points limites contenus dans $C-M$".

Tout récemment M. R. L. Moore[1]) a prouvé le théorème suivant, qui entre dans le même ordre d'idées :

„*C étant un continu, S un constituant d'un vrai sous-ensemble fermé M de C, et K un sous-continu borné de C tel que $KS \neq 0 \neq K-S$, l'ensemble $K.S.\overline{C-M}$ est non-vide*".

Dans le N 1 je me propose de généraliser les théorèmes cités. Je prouve notamment (Théorème I) que :

C étant un continu (borné ou non) et M un vrai sous-ensemble de C, d'ailleurs tout-à-fait arbitraire, si S est un constituant borné de M la jonction[2]) *de S et de $C-M$ n'est pas vide*, c.-à-d.: ou bien S contient des points limites de $C-M$ ou bien $C-M$ contient des points limites de S (en symboles: $J(S, C-M) \neq 0$).

Les théorèmes précités en résultent facilement.

Dans le N 2 j'examine combien la condition que le constituant S soit *borné* est essentielle dans l'énoncé du th. I.

On voit facilement que si l'on omettait cette condition, le théorème serait en défaut. En effet, soit C le continu constitué par l'axe Y et par la courbe $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$; soit M l'ensemble que l'on obtient de C en enlevant la suite infinie des points situés sur la hyperbole $y = \frac{1}{x}$. Evidemment l'axe Y forme un constituant de M et sa jonction avec l'ensemble (divergent) $C-M$ est vide.

On parvient ainsi à poser le problème suivant: quelles sont les conditions suffisantes et nécessaires que l'on a à imposer au continu C pour qu'il jouisse de la propriété ($\mathfrak{S}$) suivante: „*pour tout vrai sous-ensemble M de C et tout constituant S de M on a $J(S, C-M) \neq 0$*".

Une condition suffisante en est que tous deux points de C se laissent unir par un sous-continu borné de C. Cela résulte du corollaire du th. I. Mais cette condition n'est pas nécessaire, comme le prouve l'exemple suivant : Soit I_1 l'ensemble constitué par la demi-droite $x = 0$ $y = 1$, par le segment joignant les points $(0, -1)$ et $\left(\frac{1}{\pi}, 1\right)$, et par la courbe $y = \frac{1}{x^2}\sin^2\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}$. Soit I_2 l'image symétrique de I_1 par rapport à l'origine. Le continu $C = I_1 + I_1$ jouit de la propriété ($\mathfrak{S}$) selon le th. II de cette note.

[1]) R. L. Moore. *A characterization of a continuous curve.* Fund. Math. v. VII. p. 302 (lemme 2).

[2]) La jonction $J(A, B)$ d'ensembles A et B c'est l'ensemble $A\overline{B} + \overline{A}B$.

Or j'énonce une condition qui est en même temps suffisante et nécessaire, en me servant de la notion de pseudo-constituant. J'appelle pseudo-constituant du point p dans le continu C l'ensemble de tous les points qui se laissent unir à p par des sous-continus *bornés* de C. La condition cherchée est que le continu C ne contienne aucun vrai sous-continu qui soit somme des pseudo-constituants de C.

Dans le N 3 je prouve que la condition $J(S, C-M) = 0$ équivaut à l'égalité $F_c(S).F_c(M) = 0$, $F_c(X)$ désignant la frontière de X relative à C (en symboles $F_c(X) = \overline{X}\,\overline{C-X}$). Dans le cas où C est un continu de Jordan, on a $F_c(S) \subset F_c(M)$, S désignant un constituant quelconque de M[1]). Je prouve qu'inversement, si quel que soit M on a toujours l'inclusion $F_c(S) \subset F_c(M)$, C est un continu de Jordan; cette inclusion présente donc une condition suffisante et nécessaire pour que C soit un continu de Jordan.

N 1. Lemme. *C étant un continu, et S un constituant d'un vrai sous-ensemble M de C, si l'on a $J(S, C-M) = 0$, S est un continu.*

Démonstration. On a d'après l'hypothèse $\overline{S}.C-M = 0$, d'où $\overline{S} \subset M$, et comme S est un constituant de M, et $\overline{S}$ est un continu ayant des points communs avec S, on en conclut que $\overline{S} \subset S$, c.-à-d. que S est fermé. Par conséquent, S est un continu, c. q. f. d.

Théorème I. *C étant un continu et S un constituant borné d'un vrai sous-ensemble M de C, $J(S, C-M) \neq 0$.*

Démonstration. Supposons que l'on ait, au contraire, $J(S, C-M) = 0$; selon le lemme, S est un continu. On a de plus $S.\overline{C-M} = 0$. On peut donc entourer S par un ensemble ouvert borné G tel que :

$$S \subset G \quad \text{et} \quad \overline{G}.\overline{C-M} = 0\ ^2).$$

[1]) C. Kuratowski. *Une définition topologique de la ligne de Jordan.* Fund. Math. I, p. 43 énoncé (8) et aussi C. Kuratowski. *Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer.* Fund. Math. VIII. p. 144.

[2]) En vertu du théor. général suivant: *si A et B sont deux ensembles fermés disjoints, il existe un ensemble ouvert G tel que $A \subset G$ et $\overline{G}.B = 0$.* Cf.

Posons $F = C.\overline{G}$; comme $S \subset F \subset M$, S est un constituant de F.

D'après le théorème de Janiszewski [1]), cité dans l'introduction, on a $S.\overline{C-F} \neq 0$; mais $\overline{C-F} = \overline{C-\overline{G}} \subset \overline{C-G} = C-G$, d'où $S.C-G \neq 0$, ce qui implique une contradiction, puisque $S \subset G$.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Corollaire. *Si C est un continu, S un constituant d'un vrai sous-ensemble M de C et K un continu borné tel que $K \subset C$ et $KS \neq 0 \neq K-S$; on a $J(KS, C-M) \neq 0$.*

Démonstration: $K-M \neq 0$. En effet, dans le cas contraire $K \subset M$, et comme $KS \neq 0$, on a $K \subset S$, d'où $K-S=0$, contrairement à l'hypothèse.

Soit S_1 un constituant de l'ensemble KM, contenu dans S ($KS \neq 0$, donc S_1 existe). S_1 est borné et $K-M \neq 0$, d'où, selon le th. I, $J(S_1, K-M) \neq 0$. D'autre part: $J(S_1, K-M) \subset J(KS, C-M)$, puisque $S_1 \subset KS$ et $K-M \subset C-M$, d'où $J(KS, C-M) \neq 0$, c. q. f. d.

L'énoncé de M. Moore cité dans l'introduction résulte immédiatement de notre corollaire.

Il est à remarquer que le terme „constituant" peut être remplacé dans le th. I et dans le corollaire par le terme *„composante"* [2]). Cela résulte du fait que toute composante d'un ensemble arbitraire M est somme de constituants de M.

Comme simple application du th. I nous citerons ici la proposition suivante [3]):

(α) *Si M est un sous-ensemble borné d'un continu non-borné C, l'ensemble $C-M$ contient un continu non-borné.*

La proposition est évidente si C est l'espace entier. Dans le cas contraire soit v *non* εC. Transformons l'espace par l'inversion ayant v comme centre. L'ensemble $C^* + v$ est un continu borné [1]). Comme M est borné, il existe une hypersphère W ayant v comme centre et telle que $\overline{W}M^* = 0$. Soit K le constituant du point v dans l'ensemble $\overline{W}.(C^* + v)$ et S un consituant quelconque de $K-v$. On a selon le th. I: $J(S, v) \neq 0$ c. à d. $v \varepsilon \overline{S}$. D'autre part $\overline{S}$ est un continu et comme $S \subset \overline{S} - v \subset \overline{S}$, l'ensemble $\overline{S} - v$ est connexe [2]), donc $(\overline{S} - v)^*$ est un continu non-borné [3]). Mais on a: $\overline{S} \subset \overline{W}$, donc $\overline{S} - v \subset C^* - M^*$, d'où $(\overline{S} - v)^* \subset \subset C - \mathrm{M}$, c. q. f. d.

Vietoris. l. c., p. 190. Satz. 27). De plus, si A est borné, G peut être supposé borné aussi.

[1]) Dans la démonstration de Janiszewski le continu C était supposé borné, mais elle reste valable quand on suppose C non-borné, pourvu que l'ensemble M soit borné.

[2]) Cf. F. Haussdorff: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig. 1914. p. 245 ou B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les ensembles connexes.* Fund Math. vol. II. p. 214. C est dit composante de M si C est un sous-ensemble connexe de M et n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de M.

[3]) C'est une généralisation du théorème suivant dû à MM. Knaster et Kuratowski: *tout continu non-borné contient un vrai sous-continu non-borné.* Fund Math. v. V, p. 37.

N 2. Définition. *C étant un continu et $a \varepsilon C$, l'ensemble $H(a, C)$ de tous les points qui peuvent être unis avec a par un sous-continu borné de C, sera dit le pseudo-constituant de a dans C.*

Le continu C du premier exemple, défini p. 364, se compose de deux pseudo-constituants dont l'un est l'axe Y. Dans le second exemple les pseudo-constituants de C sont les ensembles I_1 et I_2.

On obtient immédiatement les deux propriétés suivantes des pseudo-constituants:

1°: *Tous deux pseudo-constituants différents sont disjoints.*

2°: *Tout pseudo-constituant d'un continu borné est égal au continu même.*

Le th. I implique que:

3°: *Tout pseudo-constituant H d'un continu non-borné est également non-borné.*

En effet, l'hypersphère de rayon n ayant son centre dans H, contient un continu borné de diamètre $\geqslant n$ contenu dans H, quel que soit n.

Comme nous avons déjà remarqué dans l'introduction, *tout continu C qui se compose d'un seul pseudo-constituant, jouit de la propriété* ($\mathfrak{G}$). Cela résulte immédiatement du corollaire du th. I. On peut remplacer cette condition suffisante par une autre, en se servant de la notion de point à l'oscillation infinie. Selon MM. Kuratowski et Knaster [4]), un pont p d'un continu C est dit à oscillation infinie, si dans tout voisinage de p il existe des points de C appartenant à des pseudo-constituants différents de C.

[1]) B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les continus non-bornés.* Fund. Math. vol. V, p. 23.

[2]) D'après la proposition générale: *si S est connexe et $S \subset T \subset \overline{S}$, T est connexe également.* F. Hausdorff, l. c. p. 246.

[3]) B. Knaster et C. Kuratowski, l. c. p. 24.

[4]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les continus non-bornés.* Fund. Math. v. V. p. 27.

Désignons par $\Omega(C)$ l'ensemble de tous les points de C où l'oscillation est infine. Alors les conditions $\Omega(C)=0$ et $C=H(a,C)$ sont équivalentes [1]. Donc *la condition* $\Omega(C)=0$ *est suffisante pour que le continu* C *jouisse de la propriété* $(\mathfrak{G})$. Il en résulte en particulier, que *tout continu de Jordan (borné ou non) la possède également.* D'ailleurs aucune de ces conditions n'est nécessaire, comme le prouve l'exemple déjà cité dans l'introduction.

Nous allons démontrer à présent un théorème qui donne une telle condition:

Théorème II. *Pour qu'un continu* C *jouisse de la propriété* $(\mathfrak{G})$, *il faut et il suffit, qu'il ne contienne aucun vrai sous-continu, qui soit somme de pseudo-contituants de* C.

Démonstration. 1. *La condition est suffisante.* Supposons que S soit un constituant d'un vrai sous-ensemble M de C et que $J(S, C-M)=0$. Selon le lemme, S est un continu; en tenant compte du corollaire du th. I, on a de plus: $H(p,C)\subset S$ pour tout $p \varepsilon S$. Donc

$$S=\sum_{p\varepsilon S} H(p,C) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2. *La condition est nécessaire.* Supposons qu'il existe un vrai sous-continu L de C qui soit somme de pseudo-constituants de C. Il n'existe donc aucun continu borné $Q\subset C$ tel que:

$$QL \neq 0 \neq Q-L. \tag{1}$$

Pour prouver que notre condition est nécessaire, nous allons construire un vrai sous-ensemble (fermé) M de C, contenant le continu L comme constituant tel que $J(L, C-M)=0$.

Construction de l'ensemble M.

Soit L_n $(n=1,2,3,\dots)$ l'ensemble de tous les points $x \varepsilon C$, tels que

$$\varrho(x,L) < \frac{1}{n} \text{ [2]}. \tag{2}$$

Fixons un point arbitraire $a \varepsilon L$, et désignons par W_n $(n=1,2,3,\dots)$ l'intérieur de l'hypersphère de rayon n ayant le point a comme centre.

[1] Ibid. p. 28. Cette équivalence peut être aussi déduite de la formule générale $\Omega(C)=\sum H.\overline{C-H}$ où la sommation s'étend à tous les pseudo-constituants H de C. La démonstration de cette formule ne présente aucune difficulté.

[2] $\varrho(x,L)$ désigne la distance de x à L, c.-à-d. la borne inférieure des distances $\varrho(x,y)$ où $y \varepsilon L$.

Posons:

$$G_n = W_n L_n. \tag{3}$$

Il est aisé de voir que tous les L_n, ainsi que tous les G_n, sont ouverts par rapport à C (c.-à-d. les ensembles $C-L_n$ et $C-G_n$ sont fermés).

On a, en outre, pour $n<n'$.

$$L_{n'} \subset L_n \quad \text{et} \quad \overline{W_n} \subset W_{n'}. \tag{4}$$

Soit n_1 un nombre naturel tel que:

$$C - L_{n_1} \neq 0. \tag{5}$$

Un tel nombre existe, puisque dans le cas contraire on aurait $C \subset \prod_{n=1}^{\infty} \overline{L_n} = L$, contrairement à l'hypothèse: $L \neq C$.

Je vais définir par l'induction une suite croissante $\{n_m\}_{m=1,2,3,\dots}$ des nombres naturels.

Soient

$$n_1 < n_2 < \dots < n_{m-1}$$

les $(m-1)$ premiers termes de cette suite. Le terme n_m sera alors défini comme suit. Posons:

$$M_{m-1} = \overline{G_{n_1}} + \overline{G_{n_2}} + \dots + \overline{G_{n_{m-1}}}. \tag{6}$$

C'est un ensemble fermé et borné, puisque selon (3) et (4):

$$\overline{G_n} \subset \overline{W_n} \subset W_{n+1} \subset W_{n+2} \dots \quad \text{d'où:}$$

$$M_{m-1} \subset \overline{W_{n_{m-1}}} \subset W_{n_{m-1}+1}. \tag{7}$$

Il existe un nombre naturel $n' > n_{m-1}$ vérifiant la condition $(\mathfrak{K})$ suivante:

Il n'existe aucun continu K *tel que:*

$$K \subset M_{m-1} + \overline{L_{n'}} \tag{8}$$

et

$$KL \neq 0 \neq K - \overline{L_{n_{m-1}}}. \tag{9}$$

Supposons, en effet, que, si $n > n_{m-1}$ la condition $(\mathfrak{K})$ n'est pas vérifiée, c.-à-d. qu'il existe une suite $\{K_n\}_{n=n_{m-1}+1,\, n_{m-1}+2,\dots}$ des continus

$$K_n \subset M \quad + \overline{L_n}. \tag{10}$$

joignant L avec un point x_n de $K_n - \overline{L}_{n_{m-1}}$; donc:

(11) $$x_n \varepsilon M_{m-1} - \overline{L}_{n_{m-1}}.$$

Désignons par S_n le constituant de x_n dans $K_n \overline{W}_\mu$, où pour abréger, nous posons $\mu = n_{m-1} + 1$. S_n est borné, d'où selon le th. I.

$$S_n . \overline{K_n - \overline{W}_\mu} \neq 0.$$

Mais W_μ est ouvert, donc:

$$\overline{K_n - \overline{W}_\mu} \subset \overline{K_n - W_\mu} = K_n - W_\mu$$

et, selon (7) et (10):

$$K_n - W_\mu \subset K_n - M_{m-1} \subset \overline{L}_n$$

d'où

$$S_n . \overline{L}_n \neq 0.$$

Soit

(12) $$p_n \varepsilon S_n \overline{L}_n.$$

Comme $p_n \varepsilon \overline{W}_\mu$ et $x_n \varepsilon M_{m-1} \subset \overline{W}_\mu$ (selon (7)), les suites $\{p_n\}$ et $\{x_n\}$ sont bornées; par conséquent, chacune d'elles possède un au moins point d'accumulation. On peut donc définir une suite $\{n^{(k)}\}$ de nombres naturels, de manière que la suite $\{p_{n^{(k)}}\}$ converge vers un point $p \varepsilon \Pi \overline{L}_n = L$ (en raison de (12)), tandis que la suite $\{x_{n^{(k)}}\}$ converge vers un point $x \varepsilon C - \overline{L}_{n_{m-1}} \subset C - L$ (voir (11)).

L'ensemble d'accumulation [1]) des continus $S_{n^{(k)}}$ qui sont situés dans $\overline{W}_\mu$, est un continu borné Q [2]) joignant les points x et p dans C; donc $QL \neq 0 \neq Q - L$. Or c'est impossible en vertu de l'hypothèse (1); il est donc établi que des nombres $n' > n_{m-1}$ assujettis à la condition ($\mathfrak{K}$) existent.

Soit n_m le plus petit parmi ces nombres; la suite $\{n_m\}$ est par conséquent definie, ainsi que la suite $\{M_m\}$.

Posons:

(13) $$M = \sum_{m=1}^{\infty} M_m = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_{n_m}$$

[1]) On dit que le point x appartient à l'ensemble d'accumulation des ensembles E_k, si dans tout voisinage de x il existe des points appartenant à une infinité d'ensembles E_k.

[2]) Voir p. e. S. Janiszewski. *Thèse*, th. I, p. 20, ou L. Zoretti. *Leçons sur le prolongement analytique.* Paris 1911. p. 26.

et

(14) $$G = \sum_{m=1}^{\infty} G_{n_m}.$$

L'ensemble M que nous venons de construire est l'ensemble cherché. Nous prouverons d'abord que:

(15) $$M = \overline{G}.$$

Soit $\{x_n\}_{n=1,2...}$ une suite de points de G et $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$. Soit n_m un indice tel que W_{n_m} renferme tous les x_n.

Comme selon (3) et (4), pour $m < k$:

$$W_{n_m} G_{n_k} = W_{n_m} W_{n_k} L_{n_k} \subset W_{n_m} L_{n_m} = G_{n_m},$$

on a:

$$W_{n_m} G = G_{n_1} + G_{n_2} + \ldots + G_{n_m},$$

d'où:

$$\lim_{n=\infty} x_n = x \varepsilon \overline{G}_{n_1} + \overline{G}_{n_2} + \ldots \overline{G}_{n_m} = M_m \subset M.$$

donc:

$$\overline{G} \subset M.$$

D'autre part:

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{G}_{n_m} \subset \overline{\sum_{m=1}^{\infty} G_{n_m}} = \overline{G},$$

par conséquent $M = \overline{G}$. c. q. f. d.

On a à présent:

1°. $M \subset C$, car $M \subset \overline{L}_{n_1} \subset C$ ((13) et (2)) et $M \neq C$ puisque $C - \overline{L}_{n_1} \neq 0$, d'après (5).

2°. $$J(L, C - M) = 0.$$

En effet, selon (14) et (15):

(16) $$L = \sum_{m=1}^{\infty} W_{n_m} L \subset \sum_{m=1}^{\infty} W_{n_m} L_{n_m} = G \subset M$$

d'où $L - M = 0$, donc:

(17) $$\overline{L}(C - M) = 0;$$

d'autre part, selon (15):

$$\overline{C-M}=\overline{C-G}\subset\overline{C-G}=C-G$$

d'où en raison de (16):

$$L\,\overline{C-M}\subset G\,.\,C-G=0. \tag{18}$$

Ainsi:

$$J(L,C-M)=\overline{L}\,(C-M)+L\,\overline{C-M}=0.$$

3°. L est un constituant de M. Soit, en effet, $x\,\varepsilon\,M-L$; nous allons prouver qu'il n'existe aucun sous-continu de M joignant x et L.

Posons $r=\varrho(x,L)$. Soit m un entier tel que:

$$\frac{1}{n_{m-1}}<r. \tag{19}$$

On a donc, en tenant compte de (2):

$$x\,\varepsilon\,M-\overline{L}_{n_{m-1}}. \tag{20}$$

D'autre part: $x\,\varepsilon\,M_{m-1}$.

En effet, selon (13), (3) et (4):

$$M=M_{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\overline{G}_{n_i}\subset M_{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\overline{L}_{n_i}\subset M_{m-1}+\overline{L}_{n_m}; \tag{21}$$

ainsi, si l'on supposait $x\,\varepsilon\,M-M_{m-1}$ on aurait $x\,\varepsilon\,\overline{L}_{n_m}$, ce qui équivaut à $\varrho(x,L)=r\leqslant\frac{1}{n_m}<\frac{1}{n_{m-1}}$ contrairement à (19).

Donc $x\,\varepsilon\,M_{m-1}-\overline{L}_{n_{m-1}}$.

Mais n_m vérifie la condition ($\mathfrak{K}$); c.-à-d. il n'existe aucun sous-continu de $M_{m-1}+\overline{L}_{n_m}$ joignant L à $x\,\varepsilon\,M_{m-1}-\overline{L}_{n_{m-1}}$. A fortiori, il n'existe aucun sous-continu de ce genre dans M, puisque $M\subset M_{m-1}+$ $+\overline{L}_{n_m}$ (selon (21)). Donc L est un constituant de M.

L'ensemble M vérifiant ainsi toutes les conditions demandées, notre théorème se trouve démontré.

Il est à remarquer qu'on peut construire un continu C renfermant un sous-ensemble M, dont *tous* les constituants S jouissent de la singularité $J(S,C-M)=0$. Pour ce but, envisageons le continu C indécomposable, construit par M. M. Knaster et Kuratowski [1]), dont tous les composants sont fermés.

[1]) B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les continus non-bornés*. Fund. Math. V. p. 51. § 4.

Soit N un de ce ces composants et $M=C-N$. Les constituants de M coïncident avec les composants de C; ce sont donc des ensembles fermés.

Soit S un de ces constituants. M étant ouvert par rapport à C, on a $J(S,C-M)=S\,\overline{C-M}+\overline{S}\,C-M=S\,.\,C-M=0$. C. q. f. d.

On remarquera enfin qu'aucun ensemble M *fermé* ne saurait présenter la singularité en question.

N 3. On peut présenter la condition $J(S,C-M)=0$ sous une forme différente, en se servant de la notion de frontière relative de M par rapport à C:

$$F_c(M)=\overline{M}\,.\,\overline{C-M}.$$

On a, en effet: $F_c(M)=J(M,C-M)$, d'où on obtient par un simple calcul la relation:

$$F_c(S)\,.\,F_c(M)=J(S,C-M)+M\,.\,\overline{C-M}\,.\,S\,.\,\overline{C-S}.$$

Puis, en se basant sur le lemme du N 1, on en conclut aussitôt, que: *les conditions $J(S,C-M)=0$ et $F_c(S)\,F_c(M)=0$ sont équivalantes.*

Nous allons nous occuper à présent d'un problème analogue à celui, dont la solution est fournie par le th. II., en remplaçant la condition $F_c(S)\,F_c(M)=0$ par $F_c(S)\subset F_c(M)$.

Nous dirons que *le continu C jouit de la propriété (F), si pour tout vrai sous-ensemble M de C et tout constituant S de M, on a $F_c(S)\subset F_c(M)$.*

Comme l'a, démontré M. Kuratowski [1]), *tout continu jordannien (borné ou non) jouit de la propriété (F).*

Or, je vais prouver que reciproquement: tout continu jouissant de la propriété (F) est un continu de Jordan. Cela résulte du théorème suivant, qui est un peu plus général.

Théorème III. *C étant un continu, si pour tout vrai sous-ensemble G de C, ouvert dans C, et pour tout constituant S de G, on a $F_c(S)\subset F_c(G)$, C est un continu de Jordan.*

Démonstration. Supposons par contre, que C n'est pas un continu de Jordan. D'après un théorème de M. Kuratowski [2]),

[1]) C. Kuratowski: *Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer.* Fund. Math. v. VIII p. 143—144. Lemme 2. M. Kuratowski énonce ici une proposition analogue concernant les „composantes" d'ensembles, mais on peut remplacer partout dans sa démonstration le terme composante par le terme constituant. (Cf. C. Kuratowski. Fund. Math. I. p. 43).

[2]) C. Kuratowski. *Une définition topologique de la ligne de Jordan.* Fund. Math. I. p. 43.

il existe alors un ensemble G ouvert dans C et contenant un constituant S qui n'est pas ouvert dans C. Il existe donc un point $x \varepsilon S.\overline{C-S}$. Comme $F_e(S) = \overline{S}.\overline{C-S}$, x appartient à $F_e(S)$ et, comme par hypothèse, $F_e(S) \subset F_e(G)$, on en conclut que

$$x \varepsilon F_e(G). \tag{22}$$

D'autre part G est ouvert dans C, donc

$$F_e(G) = \overline{G}.C - G + G.\overline{C-G} = \overline{G}.C - G.$$

Or x appartenant à G, x n'appartient pas à $F_e(G)$, contrairement à (22). Le théorème est donc démontré.

Il en résulte que: *pour qu'un continu C soit Jordannien, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété (F).*

Il est à noter enfin que le terme „ensemble G ouvert dans C" peut être remplacé dans l'énoncé du th. III par le terme „ensemble fermé".

Sur les séries de fonctions orthogonales.

Par

D. Menchoff (Moscou).

TROISIÈME PARTIE.

Chapitre I.

La divergence des séries orthogonales et quasi-orthogonales.

§ 1. Convenons d'appeler *série orthogonale de Fischer-Riesz*, toute série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

dont les fonctions $\varphi_n(x)$ et les constantes a_n satisfont aux conditions suivantes:

1°. Les $\varphi_n(x)$ forment un système normé de fonctions orthogonales, c'est-à-dire qu'on a:

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0\,; \qquad \text{si } n \neq m$$

$$\int_0^1 [\varphi_n(x)]^2\,dx = 1 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2°. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{2}$$

est convergente.

On sait alors, ces conditions étant satisfaites, que la série (1) est

[1]) Nous supposerons, pour simplifier, les fonctions $\varphi_n(x)$ définies aux points de l'intervalle (0, 1).