Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales.

Par

Antoni Zygmund (Varsovie).

§ 1.

Soit $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ un système de fonctions (nous les supposons réelles) orthogonales et normales dans l'intervalle (a,b) c'est à dire que

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \begin{matrix} 0\,(m \neq n) \\ 1\,(m=n) \end{matrix}, \qquad (m,n=0,1,2,\ldots).$$

Soit une suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de nombres réels tels que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 < \infty.$$

Désignons par s_n et σ_n respectivement les n'ièmes $(n=0,1,2,\ldots)$ sommes partielles et les n'ièmes moyennes arithmétiques du premier ordre de la série

(1) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\,\varphi_\nu(x).$$

On a la proposition suivante

Théorème. *Si dans un ensemble $E \subset (a,b)$ la série (1) est sommable par la première moyenne arithmétique vers la somme $s=s(x)$, on a presque partout dans E*

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{|s-s_0|+|s-s_1|+\ldots+|s-s_n|}{n+1}=0$$

ou même

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(s-s_0)^2+(s-s_1)^2+\ldots+(s-s_n)^2}{n+1}=0$$ [1] [2].

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme. On a presque partout dans (a,b)

$$\eta_n = \frac{(s_0-\sigma_0)^2+(s_1-\sigma_1)^2+\ldots+(s_n-\sigma_n)^2}{n+1} \to 0.$$

En effet

$$\int_a^b (s_k-\sigma_k)^2\,dx = \frac{1}{(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k} a_j^2 . j^2 .$$

Donc

$$\int_a^b \eta_{2^n}\,dx = \frac{1}{2^n+1}\sum_{k=0}^{2^n}\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k} j^2 a_j^2 =$$

$$= \frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n} j^2 a_j^2 \sum_{k=j}^{2^n}\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n} j^2 a_j^2 \sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n} j\,a_j^2 .$$

D'ou

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \eta_{2^n}\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}\sum_{j=0}^{2^n} j\,a_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} j\,a_j^2 . \sum_{n \geq \lg j}^{\infty}\frac{1}{2^n+1} \leqslant$$ [3]

$$\leqslant 2\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty.$$

On en deduit que la série à termes non négatifs

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2^n}$$

[1]) La relation (2) résulte de (3) par l'application de l'inégalité de Schwarz.

[2]) Les expressions de la forme (2) et (3) étaient considérées pour la première fois par MM. Hardy et Littlewood, C. R., t. **156**, p. 1307—9.

[3]) Nous prenons les logarithmes à base 2.

converge presque partout dans (a,b), car dans le cas contraire la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \eta_{2^n}\, dx$$

serait divergente ce qui contredit au résultat obtenu tout à l'heure. En particulier, on a pour presque tout x dans (a,b):

$$\eta_{2^n} \to 0\,.$$

Soit $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$. Alors

$$\eta_k \leqslant 2\,\eta_{2^{n+1}},$$

ce qui justifie notre lemme. Pour la démonstration du théorème il suffit de s'appuyer sur l'inégalité

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(s_k - s)^2}{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}[(s_k - \sigma_k) + (\sigma_k - s)]^2}{n+1} \leqslant \frac{2\sum\limits_{k=0}^{n}(s_k - \sigma_k)^2}{n+1} + \frac{2\sum\limits_{k=0}^{n}(\sigma_k - s)^2}{n+1} \to 0.$$

§ 2.

On peut facilement déduire du lemme démontré dans le § précédent le théorème suivant [1]: Si la série (1) est sommable dans un ensemble $E \subset (a,b)$ par le procédé de Poisson, elle est sommable presque partout dans E par le procédé de la première moyenne arithmétique. Remarquons d'abord qu'on presque partout dans (a,b)

$$\frac{(s_0-\sigma_0)+(s_1-\sigma_1)+\dots+(s_n-\sigma_n)}{n+1} = \sigma_n - \frac{\sigma_0+\sigma_1+\dots+\sigma_n}{n+1} = \sigma_n - \overline{\sigma}_n \to 0.$$

D'autre part, si la suite $\{s_n\}$ est sommable par le procédé de Poisson, il en est de même de la suite $\{\sigma_n\}$. En effet, si

$$(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n \sim s, \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(s_0+s_1+\dots+s_n)\,r^n \sim \frac{s}{(1-r)^2}$$

[1]) S. Kaczmarz: Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen, Math. Zeitschr., **23**.

on obtient, en intégrant les deux membres

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n r^n \sim \frac{s}{1-r}.$$

On peut donc supposer que la série $\sum(\sigma_n - \sigma_{n-1})$ est sommable par le procédé de Poisson. Pour en déduire la convergence ordinaire il suffit [1]) de s'appuyer sur la relation suivante qu'on obtient par la transformation d'Abel:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k\,(\sigma_k - \sigma_{k-1})}{n+1} = \sigma_n - \overline{\sigma}_n \to 0\,.$$

On peut généraliser la proposition démontrée ci-dessus en y remplaçant la sommabilité $(C,1)$ par (C,ε) $(\varepsilon > 0)$ [2]).

A cet effet il suffit de démontrer 2 lemmes.

Désignons par σ_n^r les $n$ièmes moyennes arithmétiques d'ordre r pour la série (1), c'est-à-dire

$$(4) \quad \sigma_n^r = \frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^r\, a_k \varphi_k, \text{ où } A_n^r = \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{n!} \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)}.$$

Lemme I. On a presque partout dans (a,b)

$$\eta_n^r = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1})^2}{n+1} \to 0, \left(r > \frac{1}{2}\right).$$

En effet, en profitant des formules (4) on a

$$\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1} = \frac{1}{A_k^r A_k^{r-1}} \sum_{j=0}^{k} (A_{k-j}^r A_k^{r-1} - A_{k-j}^{r-1} A_k^r)\, a_k \varphi_k =$$

$$= \frac{1}{A_k^r A_k^{r-1}} \sum_{j=0}^{k} \left(-\frac{j}{r} A_{k-j}^{r-1} A_k^{r-1}\right) a_k \varphi_k.$$

[1]) Tauber, Monatshefte für Math. und Phys., 8 (1897) p. 273—276.

[2]) Une autre démonstration un peu plus courte, mais moins élémentaire, a été donnée par moi antérieurement dans Bull. de l'Acad. Polonaise, 1926, pp. 185—191.

Donc

$$\int_a^k (\sigma_k^r - \sigma_k^{r-1})^2\, dx = \frac{1}{r^2 (A_k^r)^2} \sum_{j=0}^{k} j^2 (A_{k-j}^{r-1})^2\, a_j^2.$$

Il résulte de cette égalité que

$$\int_a^b \eta_{2^n}^r\, dx = \frac{1}{r^2(2^n+1)} \sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{(A_k^r)^2} \sum_{j=0}^{k} j^2 (A_{k-j}^{r-1})^2\, a_j^2 =$$

$$= \frac{1}{r^2(2^n+1)} \sum_{j=0}^{2^n} j^2 a_j^2 \sum_{k=j}^{2^n} \frac{(A_{k-j}^{r-1})^2}{(A_k^r)^2}.$$

Mais [1])

$$\sum_{k=j}^{2^n} \frac{(A_{k-j}^{r-1})^2}{(A_k^r)^2} < \sum_{k=j}^{\infty} = \sum_{k=j}^{2j} + \sum_{k=2j+1}^{\infty} < \frac{C_1}{(A_j^r)^2} \sum_{k=0}^{j} (A_k^{r-1})^2 +$$

$$+ C_2 \sum_{k=2j+1}^{\infty} \frac{k^{2r-2}}{k^{2r}} < \frac{C_3}{(A_j^r)^2} \sum_{k=0}^{j} A_k^{2r-2} + \frac{C_4}{j} < \frac{C_5}{j}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \eta_{2^n}^r\, dx \leqslant C_6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \sum_{j=0}^{2^n} j a_j^2 =$$

$$= C_6 \sum_{j=0}^{\infty} j a_j^2 \sum_{n \geq \lg j}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} = C_7 \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty.$$

On en déduit que la série $\Sigma \eta_{2^n}^r$ converge presque partout, d'ou

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{2^n}^r = 0 \quad \text{ou même} \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n^r = 0 \quad \left(r > \frac{1}{2}\right).$$

Lemme II. *Soit* $\{\tau_n^r\}$ *la suite de moyennes de Cesàro d'ordre* r *pour une série quelconque* Σu_n. *Si*

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (\tau_k^r)^2}{n+1} \to 0 \qquad (r > -{}^1\!/_2),$$

[1]) Nous désignons par $C_1, C_2, \ldots$ des constantes absolues dont nous n'avons pas besoin de calculer la valeur.

on a

$$\tau_n^{r+\frac{1}{2}+\varepsilon} \to 0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

En effet, posons

$$\tau_n^\alpha = \frac{t_n^\alpha}{A_n^\alpha}.$$

Alors, d'après les propriétés bien connues des moyennes de Cesàro:

$$|t_n^{r+\frac{1}{2}+\varepsilon}| = \left| \sum_{k=0}^{n} t_k^r A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \tau_k^r A_k^r A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (\tau_k^r)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (A_k^r A_{n-k}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})^2} \leqslant o(\sqrt{n})\, C_8 \sqrt{\sum_{k=0}^{n} A_k^{2r} A_{n-k}^{-1+2\varepsilon}} =$$

$$= o(\sqrt{n})\, C_8 \sqrt{A_n^{2r+2\varepsilon}} = o(n^{r+\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On démontre maintenant le théorème annoncé plus haut de la manière suivante.

Si la série (1) est sommable $(C, 1)$ vers la somme s dans un ensemble $E \subset (a, b)$, on a, d'après le théorème du § 1

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (\sigma_k^0 - s)^2}{n+1} \to 0$$

presque partout dans E. La quantité $\sigma_k^0 - s$ est la k-ième somme partielle de la série

$$(a_0 \varphi_0 - s) + a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots$$

En appliquant le lemme II on obtient que $\sigma_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - s \to 0$ presque partout dans E. Appliquons encore une fois le lemme I, en y posant $r = \frac{1}{2} + \varepsilon$; nous aurons

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (\sigma_n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} - s)^2}{n+1} \to 0$$

donc, d'après le lemme II, $\sigma_n^{2\varepsilon} - s \to 0$ presque partout dans E. c.q.f.d.

Remarque. Des petites modifications dans la démonstration des lemmes I et II montrent que 1° le lemme I subsiste pour $r = {}^1\!/_2$ pourvu que $\Sigma a_n^2 \lg n < \infty$ 2°. Si dans l'hypothèse du lemme II on pose $r = -\frac{1}{2}$, on aura (pour $\varepsilon = 0$): $\sigma_n^0 = s_n = o(\sqrt{\lg n})$. Si l'on s'appuie maintenant sur le théorème de M. Weyl[1]) d'après lequel la condition $\Sigma a_n^2 \lg n < \infty$ entraîne la sommabilité $(C, 1)$ de la série (1) presque partout et sur le théorème connu de Kronecker[2]), on obtient que la série

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{\lg n}} \varphi_n$$

converge presque partout. On en déduit facilement le théorème de MM. Menchoff[3]) et Rademacher[4]) d'après lequel la série (1) converge presque partout pourvu que $\Sigma a_n^2 \lg^2 n < \infty$.

[1]) H. Weyl, Mathematische Annalen, **67**.
[2]) L. Kronecker, C. R., **103** (1886), p. 980.
[3]) D. Menchoff, Fund. Math., **4**.
[4]) H. Rademacher, Math. Annalen, 87.

Sur les constituants d'ensembles situés sur des continus arbitraires.

Par

Piotr Szymański (Varsovie).

Dans sa Thèse de 1911[1]) Janiszewski a prouvé que, si l'on entoure un point p d'un cercle et si C est un continu (plan) qui unit ce point à un autre point situé en dehors du cercle, alors on peut — sans sortir du cercle — unir le point p à la circonférence du cercle par un continu extrait de C. Les nombreuses applications de ce théorème ont conduit à la découverte d'autres propriétés analogues des continus.

D'abord Janiszewski, lui-même, a généralisé dans le *Bull. de l'Acad. de Cracovie*[2]) son théorème de la façon suivante:

„*C étant un continu borné et M un vrai sous ensemble fermé de C, tout constituant*[3]) *de M contient des points limites de l'ensemble $C - M$*[4]).

Plus tard M. Mazurkiewicz[5]) a démontré que:

„*C étant un continu borné et M un vrai sous-ensemble de C tel que*

[1]) S. Janiszewski. *Sur les continus irréductibles entre deux points* Thèse. Paris 1911, th. IV. p. 22. L'énoncé de Janiszewski est presque équivalent à celui du texte.

[2]) S. Janiszewski. *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*. Cracovie 1912, p. 907, lemme 1.

[3]) Le constituant S du point p dans M, c'est l'ensemble de tous les points de M, qui peuvent être unis avec p par un continu situé dans M. (Cf. B. Knaster et C. Kuratowski. *Sur les ensembles connexes*. Fund. Math. v. II, p. 215.

[4]) M. L. Vietoris a démontré un théorème analogue en remplaçant le continu C par un ensemble plus général. (L. Vietoris. *Stetige Menge*. Monatsh. f. Math. u. Phys. B. XXXI Satz. 33).

[5]) S. Mazurkiewicz. *O pewnej klasyfikacji punktów leżących na kontinuach*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 1916, p. 436—437.