Quelques propriétés des ensembles abstraits.

Par

Maurice Fréchet (Strasbourg).

Dans ce qui suit, j'adopterai la terminologie de mon livre sur les ensembles abstraits[1]). Je me contenterai de reproduire les définitions qui ne figuraient pas dans mes mémoires antérieurs.

PREMIÈRE PARTIE.

Les ensembles abstraits clairsemés.

Définition. Cantor avait considéré sous le nom de „separierte Mengen" des ensembles dont il avait énoncé certaines propriétés que M. Denjoy a retrouvées plus tard, et auxquelles M. Denjoy a ajouté d'autres propriétés nouvelles. Ces deux auteurs s'étaient bornés au cas des ensembles de points appartenant aux espaces à un nombre entier de dimensions. Nous nous proposons d'étendre à la fois les définitions et les propriétés ci-dessus au cas des espaces abstraits.

Nous adopterons le nom, dû à M. Denjoy, d'ensembles clairsemés pour désigner les „separierte Mengen" de Cantor. Nous montrerons que les définitions distinctes dues à ces deux auteurs coïncident, non seulement dans le cas considéré par eux, mais dans le

[1]) „*Les espaces abstraits* et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale", par Maurice Fréchet, Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions sous la direction de M. Emile Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1927. En attendant l'apparition de ce livre qui est sous presse, on pourra aussi consulter: *Sur la terminologie de la théorie des ensembles abstraits*, Congrès des Soc. Savantes; Dijon, 1924; pp. 65—73.

cas plus général des espaces que nous avons appelé espaces accessibles ou espaces (H). Par contre, ces deux définitions cessent de coïncider dans le cas plus général encore des espaces (V).

Un ensemble de points d'un espace (V) est dit clairsemé s'il ne contient aucun ensemble dense en soi (c'est la condition posée par Cantor).

Propriétés. Soit maintenant un ensemble quelconque E de points d'un espace (V). S'il n'est pas clairsemé, il contient au moins un ensemble dense en soi. Soit D la somme de tous les sous-ensembles de E qui sont chacun dense en soi. Tout point de D étant point d'accumulation d'un sous-ensemble dense en soi de D, est aussi point d'accumulation de D. Donc D est dense en soi. On peut avec M. Hausdorff qui a fait cette remarque pour des espaces abstraits moins généraux que les espaces (V), appeler D *le plus grand des sous-ensembles de E qui sont chacun dense en soi.* Si E n'est pas dense en soi, l'ensemble $C = E - D$ n'est pas vide. C'est un ensemble clairsemé puisqu'il ne peut, par définition, contenir aucun sous-ensemble dense en soi.

Ainsi:

dans un espace (V), *tout ensemble est la somme d'un ensemble dense en soi et d'un ensemble clairsemé,* ces ensembles étant disjoints et l'un deux pouvant éventuellement être vide[1]).

Considérons maintenant le cas où E est fermé. Si a est un point d'accumulation de D, a est un point d'accumulation de E et par suite appartient à E, donc $a + D$ est un sous-ensemble de E. Or tout point de l'ensemble $a + D$ est point d'accumulation de D, donc de $a + D$. Ainsi ce dernier ensemble est un sous-ensemble dense en soi de E, il appartient donc à D. Finalement a appartient à D, D est fermé en même temps que dense en soi:

dans un espace (V): *tout ensemble fermé est la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble clairsemé.*

Ce théorème doit être considéré comme la généralisation du théorème de Cantor-Bendixson en ce qui concerne les ensembles fermés quelconques pris dans un espace (V) quelconque. Pour de tels ensembles, en effet, on ne peut plus affirmer qu'un ensemble

[1]) Cette généralisation d'un théorème classique vient d'être publiée dans un mémoire de M. Sierpiński dont celui-ci a bien voulu me communiquer les épreuves et qui doit paraître dans les Math. Ann. 1926 sous le titre „*La notion de dérivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits*".

fermé est toujours la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. Sans chercher des exemples parmi les espaces (V) les plus singuliers, on peut en effet citer un ensemble isolé non dénombrable appartenant à un espace (D) très simple[1]).

On pourra au contraire arriver à l'énoncé de Cantor-Bendixson, et même à un énoncé plus précis si l'on s'adresse aux ensembles parfaitement séparables que nous considérons exclusivement à partir de la page suivante.

Définition de M. Denjoy. Sans connaître les „separierte Mengen" de Cantor, M. Denjoy a été amené à définir des ensembles qu'il a appelé clairsemés. Dans le cas des espaces à n dimensions, que Cantor et lui considéraient, ces deux sortes d'ensembles coïncident. Nous allons même démontrer que les deux définitions sont équivalentes dans le cas beaucoup plus général des espaces accessibles.

M. Denjoy dit qu'un ensemble E est dense sur un ensemble P si P est identique à l'ensemble dérivé de l'ensemble $E.P$ commun à E et P. *Il appelle ensemble clairsemé un ensemble qui n'est dense sur aucun ensemble parfait.*

1⁰. Dans tout espace (V), un ensemble clairsemé au sens de Cantor est clairsemé au sens de Denjoy. En effet, soit un ensemble C clairsemé au sens de Cantor; s'il était dense sur au moins un ensemble parfait P, celui-ci serait identique à l'ensemble H' dérivé de $H = P.C$. Puisque P, par hypothèse, n'est pas vide, il en est de même de H', donc de H. Or tout point de H appartenant à P appartient à H'. Donc C contiendrait un sous-ensemble H non vide et dense en soi.

2⁰. Dans tout espace accessible, un ensemble clairsemé au sens de Denjoy est clairsemé au sens de Cantor. En effet, soit C, un ensemble clairsemé au sens de Denjoy. S'il contenait un ensemble D non vide et dense en soi, l'ensemble P, dérivé de D, serait parfait. Car il est d'abord fermé, comme cela a lieu pour tout ensemble dérivé dans un espace accessible, (mais non dans un espace (V) quelconque).

Il est aussi dense en soi; car, si a est un point de P, c'est un point d'accumulation de D et comme D, étant dense en soi, est un sous-ensemble de D' (éventuellement identique à D'), a est point d'accumulation de D', c'est-à-dire de P.

[1]) *Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel:* Circolo Mat. Palermo, 1910, t. 30, p. 13.

Soit alors $H = PC = D'C$. Puisque D appartient à D' et à C, D appartient à H et par suite D', c'est-à-dire P, appartient à H'. Ainsi P appartient à H'. Inversement H appartient à D', donc H' à D'' et par suite à D' c'est-à-dire à P. Ainsi H' appartient à P. Finalement $H' = P$ et C serait dense sur un ensemble parfait P (non vide comme contenant D).

Ainsi *dans tout espace accessible, il y a équivalence entre les définitions des ensembles clairsemés dues à Cantor et à M. Denjoy.* (Il y a même encore équivalence dans tout espace (V) satisfaisant à la seule condition que tout ensemble dérivé y est fermé). Il faut d'ailleurs observer que la *définition de Cantor* a cet avantage d'être *intrinseque* tandis que celle de M. Denjoy fait, en apparence au moins, intervenir des points n'appartenant pas à l'ensemble considéré.

Les deux définitions ne sont pas équivalentes dans l'espace (V) le plus général comme le montre l'exemple suivant inspiré par l'espace de M. Linfield. Considérons un collier de perles dont chacune est en contact avec deux autres et deux seulement et qui contient au moins cinq perles a, b, c, d, e. L'espace (V) pris comme exemple, a chaque perle comme élément et le voisinage d'une perle est constitué par cette perle et les deux perles contigües. L'ensemble C constitué par les deux perles contigües c, d est dense en soi: il n'est pas clairsemé au sens de Cantor. Un ensemble parfait P ne peut être ici qu'identique à l'espace entier, c'est-à-dire au collier. L'ensemble $PC = C$, son dérivé est formé des perles b, c, d, e; l'ensemble dérivé de PC n'est donc pas identique à P: l'ensemble C n'est dense sur aucun ensemble parfait, il est clairsemé au sens de M. Denjoy[1]).

Nous voyons que dans un espace (V) où les ensembles dérivés ne sont pas tous fermés, *la définition de Cantor est plus stricte que celle de M. Denjoy.*

Etude spéciale des ensembles parfaitement séparables.

Définition. J'avais introduit depuis longtemps, la considération des ensembles séparables: dans un espace (V), un ensemble E est

[1]) Il serait intéressant de chercher un autre exemple en essayant de prendre pour espace, l'espace des fonctions réelles de variables réelles, la limite d'une suite de fonctions étant prise au sens ordinaire. C'est en effet un espace (L) où les ensembles dérivés ne sont pas tous fermés.

séparable s'il appartient à la fermeture $N+N'$ d'un des sous-ensembles dénombrables de E.

Dans un espace (D), cette condition est équivalente, à la suivante: *il existe une famille dénombrable d'ensembles qui couvre E et telle que la famille de ceux des ensembles de la famille auxquels un point x de E est intérieur est équivalente à la famille donnée des voisinages de x.* Cette équivalence n'existe plus lorsque E fait partie d'un espace (V) quelconque; mais la seconde condition implique encore la première. C'est pourquoi j'ai appelé *ensemble parfaitement séparable tout ensemble E de points d'un espace (V) qui satisfait à la seconde condition*[1]. L'utilité d'une étude spéciale de ces ensembles a été mise en évidence récemment. Pour généraliser les propriétés que j'avais établies pour les espaces (D) séparables, M. Hausdorff avait consideré avec profit dans son livre parmi les espaces qu'il nomme topologiques, ceux qui satisfont à cette condition — qu'il appelait le second axiome de dénombrabilité. M. M. Alexandroff, Tychonoff et Vedenissoff ont étendu certaines propositions de M. Hausdorff aux espaces (V) parfaitement séparables. Enfin nous croyons utile de considérer non seulement les espaces, mais les ensembles parfaitement séparables.

Propriétés. *Dans tout espace (V), un ensemble parfaitement séparable E est séparable, possède la propriété de Lindelöf et est condensé en soi.*

Puisque E est parfaitement séparable, les voisinages des points de E forment une suite dénombrable Σ d'ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_n \ldots$

Appelons a_n un quelconque des points de E qui sont intérieurs à V_n et N l'ensemble des points a_n. L'ensemble N a un point, au moins, en commun avec chacun des ensembles V_n auxquels un point déterminé x de E est intérieur, c'est-à-dire avec chacun des voisinages de x. Donc tout point x de E appartient à N où à N': E est séparable.

Supposons que E soit couvert par une certaine famille F d'ensembles, c'est-à-dire que tout point x de E soit intérieur à l'un au moins W des ensembles de F.

L'un au moins des V_n est un voisinage de x qui appartient

[1]) Celle-ci peut aussi s'exprimer en disant que l'on peut supposer — sans changer l'opération de dérivation des ensembles dans l'espace considéré — que les voisinages des points de E appartiennent à une même famille dénombrable d'ensembles.

à W. Soient $V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots$, les V_n qui appartiennent chacun à l'un au moins des ensembles de F. Soit W_p, l'un au moins des ensembles de F auxquels V_{n_p} appartient. On voit qu'il est possible d'extraire de F une famille dénombrable $W_1, W_2, \ldots$ qui couvre encore E au même titre que F. C'est ce qu'on exprime en disant que E possède la propriété de Lindelöf.

Un ensemble E possédant la propriété de Lindelöf est condensé en soi: autrement dit, tout sous-ensemble non dénombrable, e, de E donne lieu à au moins un point de condensation appartenant à E. Car, dans le cas contraire, tout point x de E aurait un voisinage V_x ne contenant qu'un ensemble dénombrable de points de e. Or, d'après l'hypothèse, on peut extraire de la famille des V_x une famille dénombrable qui couvre E. L'ensemble non dénombrable e serait donc la somme d'un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables.

Il résulte bien de la combinaison des propriétés précédentes que tout ensemble parfaitement séparable est condensé en soi.

Toute partie d'un ensemble parfaitement séparable est elle-même parfaitement séparable. Donc, si e est un sous-ensemble non-dénombrable d'un ensemble E parfaitement séparable, il y a au moins un point de condensation de e qui appartient non seulement à E, mais à e lui-même.

En passant, notons que dans un espace (V), la catégorie des ensembles parfaitement séparables contient la catégorie des ensembles possèdant la propriétés des ensembles condensés en soi. Or on sait que ces trois catégories coïncident dans un espace (D).

Il serait intéressant de rechercher s'il existe des espaces simples plus généraux que les espaces (D) (par exemple les espaces (S), les espaces de Hausdorff, les espaces (E)) où ces trois catégories coïncident encore. On sait d'ailleurs qu'elles ne coïncident pas dans l'espace (V) le plus général.

2°. Soit D l'ensemble de ceux des points de condensation d'un ensemble E, qui appartiennent à cet ensemble E. Si E est non dénombrable et parfaitement séparable, l'ensemble D, non vide d'après ce qui précéde, est aussi dense en soi. En effet, soit a un des points de D et V_a un de ses voisinages; l'ensemble $L = E.V_a - a$ est un sous ensemble non dénombrable de l'ensemble parfaitement séparable E. Il y a donc dans L un point de condensation de L et par suite, il y a dans V_a un point de D, distinct de a. Donc D

est dense en soi. Par suite: *dans un espace (V), tout ensemble parfaitement séparable et clairsemé est dénombrable.*

Généralisation d'un théorème plus précis que le théorème dit de Cantor-Bendixson. En combinant les propositions précédentes, on voit que:

dans un espace (V) quelconque, tout ensemble parfaitement séparable et fermé est la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable qui est clairsemé, ces deux ensembles étant disjoints et pouvant être l'un ou l'autre vide. Dans le cas des ensembles linéaires (qui sont tous parfaitement séparables), nous obtenons le théorème de Cantor-Bendixson avec cette précision par rapport à l'énoncé ordinaire que le sous-ensemble dénombrable qui intervient est démontré être clairsemé. Or si un ensemble linéaire clairsemé est dénombrable, tout ensemble linéaire dénombrable n'est pas clairsemé.

Généralisation du théorème de Baire. *Dans une suite bien ordonnée monotone d'ensembles fermés et parfaitement séparables* [1]) *situés dans un même espace (V), il n'y a qu'une suite dénombrable d'ensembles distincts.*

La propriété est démontrée si les ensembles de la suite donnée $E \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ sont identiques à partir du premier. Dans le cas contraire, appelons C l'ensemble $E-F$, où F est l'ensemble des points communs aux ensembles de la suite, F pouvant éventuellement être vide.

Soient $T_1 = V_{n_1}$, $T_2 = V_{n_2}, \ldots$ ceux des ensembles de la famille Σ considérée plus haut qui sont chacun disjoints de l'un au moins des ensembles E_α de la suite donnée. Nous allons montrer non seulement qu'il existe au moins un ensemble T_i, mais encore que

$$C = E(T_1 + T_2 + \ldots) \tag{1}$$

En effet, un point b de C appartient à E sans appartenir à tous les ensembles de la suite donnée; par exemple, il n'appartient pas à E_α. Comme E_α est fermé, il ne peut appartenir à E'_α. Mais b est intérieur à l'un au moins des V_n et d'après la définition de Σ, il est même intérieur à un V_n disjoint de E_α. Finalement b est

[1]) Si le premier est parfaitement séparable, tous les autres ensembles de la suite seront aussi parfaitement séparables.

intérieur à l'un au moins des T_i et comme il appartient à E, on voit que b appartient à $E(T_1 + T_2 + \ldots)$. Inversement, si d est un point de ce dernier ensemble, d appartient à un ensemble T, donc est disjoint de l'un des E_α; d, appartenant à E sans appartenir à tous les E_α, appartient à C. La formule (1) est établie.

Ceci étant, soit E_{α_n} le premier des ensembles E_α qui est disjoint de T_n. Il y a un nombre β supérieur à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ L'ensemble T_n étant disjoint de E_{α_n} sera disjoint de son sous-ensemble E_β. Donc E_β est disjoint de $T_1 + T_2 + \ldots$ et, d'après (1), de C. Ainsi E_β, qui est une partie de E, est disjoint de $E-F$. E_β doit appartenir à F. Or il est clair que F appartient à E_β. Finalement $E_\beta = F$: ou bien tous les E_α sont nuls à partir d'un certain rang, ou bien ils sont tous identiques à partir d'un certain rang; la proposition est démontrée.

Celle-ci a été prouvée par M. Baire pour le cas où les ensembles de la suite appartiennent à un espace R_n à un nombre entier de dimensions. Il est d'ailleurs, dans ce cas inutile de spécifier que les ensembles de la suite sont parfaitement séparables, cette condition étant réalisée d'elle-même dans R_n.

Remarque. Appliquons ce théorème aux dérivés d'un ensemble fermé parfaitement séparable F appartenant à un espace *accessible.* Ces dérivés forment une suite monotone bien ordonnée d'ensembles fermés et parfaitement séparables. Ils sont donc soit vides, soit identiques à partir d'un certain rang.

Si F n'est pas un ensemble clairsemé, il contient un ensemble dense en soi, soit même P le plus grand des sous-ensembles denses chacun en soi de F. Il est parfait, donc il appartient à tous les dérivés de F. Aucun de ceux-ci ne peut être vide. Ils sont identiques à partir d'un certain rang α. Alors comme $F^{(\alpha)} = F^{(\alpha+1)}$, $F^{(\alpha)}$ est parfait. C'est un ensemble qui contient P et qui étant dense en soi appartient à P. Donc $F^{(\alpha)} = P$.

Si au contraire F est clairsemé, les dérivés sont nécessairement vides à partir d'un certain rang, sans quoi ils seraient identiques à partir d'un certain rang et à partir de ce rang constitueraient un sous ensemble dense non vide de F.

Finalement: *étant donné un ensemble fermé parfaitement séparable appartenant à un espace accessible, ou bien F est clairsemé, alors il est dénombrable et ses dérivés sont vides à partir d'un certaing rang fini ou transfini, ou bien F n'est pas clairsemé, alors ses dérivés sont à partir d'un certain rang, fini ou infini, identiques à un ensemble* *parfait P qui est le plus grand sous-ensemble dense en soi de F, de sorte que $F-P$ est clairsemé (et dès lors dénombrable).*

Généralisation d'un théorème de M. Denjoy sur les ensembles clairsemés.

Nous dirons d'un ensemble E qu'il a *la propriété de Denjoy*, s'il est possible d'affecter à chaque point a de cet ensemble un ensemble propre I_a auquel a soit intérieur, de manière qu'aucun point de l'espace ne soit intérieur à une infinité d'ensembles I_a.

M. Denjoy a démontré [1]) que, dans l'espace à un nombre entier de dimensions, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble possède la propriété précédente est qu'il soit clairsemé. Pour assurer l'exactitude de ce résultat, il y a lieu de bien préciser la définition de la propriété de Denjoy. On doit y supposer: ou bien que les I_a diffèrent avec chaque point a, ou bien que si I_a et I_b sont formés des mêmes ensembles de points, on les considère comme distincts si a et b sont distincts. Par exemple, considérons l'espace formé des points d'une droite, appelons E l'ensemble des points d'abscisse rationnelle et affectons à chaque point a de E, l'intervalle ouvert: $n-1<x<n+1$ où n est la partie entière de a. Chaque point b, de la droite est intérieur à un ou deux au plus des ensembles distincts $n-1<x<n+1$ où n est entier et cependant l'ensemble E n'est pas clairsemé. Mais si on appelle I_a l'intervalle affecté au nombre rationnel a, il y a pour tout point x une infinité de points a de E tels que x soit intérieur à I_a.

Théorème. *Dans un espace (D) séparable quelconque, tout ensemble clairsemé possède la propriété de Denjoy.*

Suivons la démonstration de M. Denjoy avec les legers changements appropriés au cas plus général considéré. Nous verrons d'ailleurs qu'au lieu de supposer séparable tout l'espace il suffit d'admettre que l'ensemble clairsemé considéré soit séparable.

Faisons d'abord une remarque. Appelons C' l'ensemble dérivé de l'ensemble donné, C_1 l'ensemble $C.C'$ commun à C et C', etc...; et, pour tout entier n, $C_{n+1}=C_n.C'_n$. L'ensemble C_α étant défini pour toute valeur entière de α, on le définira par récurrence pour

[1]) „Sur les ensembles clairsemés", Koninklijke Akademie van Wetenschapen te Amsterdam, 27 Maart 1920, Deel XXVIII.

α transfini quelconque en posant $C_{\alpha+1}=C_\alpha.C'_\alpha$ et en appelant C_α, lorsque α est de seconde espèce, l'ensemble commun aux C_β où $\beta<\alpha$. Ceci étant, $C_1, C_2, \dots C_\alpha, \dots$ forment une suite non croissante bien ordonnée de sous-ensembles de C. Il en sera de même de leurs ensembles dérivés. Or ceux-ci sont fermés et, appartenant à un espace (D) séparable, sont parfaitement séparables. On peut donc appliquer la généralisation du théorème de Baire à la suite $C'_1, C'_2, \dots C'_\alpha, \dots$ Par suite, ou bien ces ensembles sont vides à partir d'un certain rang, ou bien ils seraient identiques et non vides à partir d'un certain rang β. Alors on aurait $C'_\beta=C'_{\beta+1}$. Or $C_\beta.C'_\beta=C_{\beta+1}$. Donc $C_{\beta+1}$ appartiendrait à $C'_{\beta+1}$: C contiendrait un sous-ensemble $C_{\beta+1}$ non vide et dense en soi, contrairement à l'hypothèse Ainsi les C'_α sont vides à partir d'un certain rang. Si par exemple C'_β est vide, $C_{\beta+1}=C_\beta.C'_\beta$ serait aussi vide: *les C_α sont vides à partir d'un certain rang.*

Ceci étant, on en conclut que, quel que soit le point a de C, il y a certainement des ensembles C_α qui ne contiennent pas a. Soit C_γ le premier d'entre eux. γ est de première espèce; autrement, C_γ serait l'ensemble commun à des ensembles C_α, $(\alpha<\gamma)$, qui contiendraient a et C_γ devrait aussi contenir a. Soit donc $\delta=\gamma-1$; a appartient à C_δ sans appartenir à $C_{\delta+1}=C_\delta C'_\delta$: a appartient à C_δ sans appartenir à C'_δ; a est un point isolé de C_δ. Dans un sphéroïde de centre a et de rayon assez petit, il n'y aura pas d'autre point de C_δ que a. Il n'y aura même dans ce sphéroïde, (en le prenant assez petit), aucun point de C'_δ, sans quoi C'_δ étant fermé a appartiendrait à C'_δ. Alors, nous pouvons affecter à un point quelconque a de C, un voisinage I_a de a, ne contenant d'autre point de C_δ que a et ne contenant aucun point de C'_δ.

Supposons maintenant qu'un point b de l'espace (D) considéré soit intérieur à une infinité des ensembles I_a. Plus précisément, pour nous conformer à l'observation ci-dessus, supposons qu'il existe une infinité de points distincts $b_1, b_2, \dots$ appartenant à C et tels que b soit intérieur à $I_{b_1}, I_{b_2}, \dots$ (ensembles distincts par les points auxquels ils sont attachés, sinon par les points qui les constituent) [1]).

La valeur de l'indice δ attaché plus haut au point a de C

[1]) Même si ces ensembles étaient des sphéroïdes de centres respectifs $b_1, b_2, \dots$, il ne suffirait pas que $b_1, b_2, \dots$ fussent distincts pour que les ensembles le soient aussi. On peut définir des espaces (D) séparables où deux sphéroïdes de centres différents peuvent coïncider. Par exemple, on prendra pour espace (D) séparable,

pourra varier quand α varie; soient $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ses valeurs pour les points $b_1, b_2, \ldots$ L'un de ces nombres tranfinis est égal ou inférieur à tous les autres, appelons celui-là δ et appelons a un des points b_k dont le δ_k correspondant est égal à δ. Alors I_a contient b à son intérieur et ne contient aucun point de C'_δ. Donc b ne peut appartenir à C'_δ. Or b_k appartient à C_{δ_k} qui appartient à C_δ. Donc $b_1, b_2, \ldots$ appartiennent à C_δ.

Tout ce qui précède s'applique lorsque l'ensemble C est un ensemble clairsemé, parfaitement séparable appartenant à un espace accessible quelconque.

Lorsqu'on a choisi les voisinages I_a attachés respectivement aux différents points a de C, on a pu prendre ceux-ci parmi la famille dénombrable Σ d'ensembles V_n précédemment considérée et même choisir pour chaque I_a un V_n d'un rang très élevé. Il serait intéressant de voir si l'on peut choisir ce rang de façon à étendre au cas d'un espace accessible le reste, qui va suivre, de la démonstration.

Faisons maintenant intervenir l'hypothèse que l'espace considéré est un espace (D), nous voyons que l'on a pu prendre pour chaque I_a un sphéroïde de centre a et d'un rayon tendant vers zéro avec le rang qu'occupe a dans la suite des éléments de l'ensemble C. Celui-ci est en effet, dans nos hypothèses, nécessairement dénombrable. On peut supposer que $b_1, b_2, \ldots$ ont été pris de rangs croissant dans C. Alors les rayons des sphéroïdes $I_{b_1}, I_{b_2}, \ldots$ tendant vers zéro et comme I_{b_k} contient b et b_k, b est point limite de la suite $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ Comme ces points appartiennent à C_δ et qu'ils sont, par hypothèse, distincts, b appartiendrait à C'_δ. La contradiction ainsi rencontrée nous assure que C possède la propriété de Denjoy.

Validité de la réciproque Dans les espaces euclidiens considérés par M. Denjoy, le théorème précédent possède une réciproque. Il est facile de voir que *la réciproque n'est pourtant pas exacte dans* *une catégorie d'ensembles abstraits aussi étendue que celle pour laquelle nous avons établi la proposition directe.*

l'espace formé par un certain ensemble E de points d'un plan avec la définition ordinaire de la distance. On choisira pour E l'ensemble des points

$$\begin{array}{ll} x=0, & y=1 \\ x=0, & y=-1 \\ -3 \leq x \leq 3, & y=0 \\ x \text{ quelconque}, & |y| \geq 10 \end{array}$$

et on comparera les sphéroïdes de rayon 4 qui ont pour centres respectifs les deux premiers points.

Il est facile de former un exemple d'un espace (D) séparable contenant un ensemble non clairsemé possédant la propriété de Denjoy. Considérons en effet l'espace dont les points sont les nombres rationnels compris entre zéro et l'unité et où la distance de deux nombres x, x' est encore $|x-x'|$. C'est un espace (D) qui est séparable puisque dénombrable. L'ensemble E constitué par tous les points de cet espace est dense en soi, donc non clairsemé. Attribuons à chaque point de E un ensemble de la manière suivante. Soient $c_1, c_2, \ldots$ les points de E. Appelons $I(c_n)$ l'ensemble des points de E à distance de c_n inférieure à r_n, r_n étant un nombre irrationnel positif inférieur à $|c_n-c_1|, |c_n-c_2|, \ldots |c_n-c_{n-1}|$. On voit que $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ n'appartiennent par à $I(c_n)$. Par conséquent, *il a été possible d'affecter à chaque point c_n de l'ensemble non clairsemé E un ensemble propre $I(c_n)$ auquel c_n soit intérieur de manière qu'aucun point de l'espace considéré ne soit intérieur à une infinité d'ensembles $I(c_n)$.*

(Bien entendu, si on considérait comme espace l'espace linéaire et comme ensemble $I(c_n)$ l'intervalle de centre c_n, rayon r_n, il y aurait des points — d'abscisses irrationnelles — intérieurs à une infinité des $I(c_n)$).

Mais si la réciproque n'est pas, au contraire de la proposition directe, valable pour les espaces (D) séparables les plus généraux, elle redevient valable en introduisant une restriction simple L'espace E qui vient d'être pris en exemple n'était pas complet. La réciproque est vraie pour les espaces (D) séparables *et complets.*

Réciproquement. *Dans un espace (D) séparable et complet, tout ensemble qui possède la propriété de Denjoy est clairsemé* [1]).

Soit dans cet espace un ensemble C possèdant la propriété de Denjoy.

S'il n'était pas clairsemé. il contiendrait un ensemble dense en soi D. Celui-ci étant, comme l'ensemble C, nécessairement séparable, contient un sous-ensemble dénombrable dense en soi N.

[1]) Comme l'espace euclidien à n dimensions est séparable et complet, on voit que nous obtenons ainsi comme cas particulier une proposition dont M. Denjoy a donné incidemment la démonstration à la page 150 de son „Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues", Journal de Mathématiques, 1915, tome I, p. p. 105—239.

Chacun des points de N: $a_1, a_2, \dots$ est intérieur à un ensemble propre, soit $I(a_n)$ pour a_n. En choisissant son rayon ϱ_n assez petit un sphéroïde $S(a_n)$ de centre a_n appartiendra à $I(a_n)$; on peut en outre supposer $\varrho_n < \frac{\varrho_{n-1}}{2}$.

Si nous montrons qu'il existe au moins un point de l'espace qui est intérieur à une infinité des $S(a_n)$, nous aurons prouvé qu'il existe au moins un point de l'espace intérieur à une infinité des ensembles $I(x)$ couvrant l'ensemble donné C. Nous aurons ainsi obtenu la contradiction annoncée.

Or, a_1 étant intérieur à $S(a_1)$ et limite d'une suite de points de N, il existe au moins un point de N, distinct de a_1 et que nous appellerons b_2, tel que

$$(a_1, b_2) + r_2 < \varrho_1,$$

en appelons r_2 le rayon de $S(b_2)$.

Donc le sphéroïde $S(b_2)$ est *intérieur* à $S(a_1)$ ou encore à $S(b_1)$ en posant $b_1 = a_1$. De la même manière, on pourra former une suite de points de N, distincts, $b_1, b_2, \dots b_t, \dots$ tels que $S(b_{t+1})$ soit intérieur à $S(b_t)$. Nous allons prouver que la suite des sphéroïdes $S(b_t)$ a un point commun et c'est ici que nous allons utiliser l'hypothèse que l'espace considéré est complet. Prouvons d'abord que les points $b_1, b_2, \dots$ satisfont au critère de convergence de Cauchy.

On a $(b_t, b_{t+1}) < r_t$ le rayon de $S(b_t)$, d'où

$$(b_t, b_{t+s}) < r_t + r_{t+1} + \dots + r_{t+s} < r_t + r_{t+1} + \dots + r_{t+s} + \dots$$

Or, on peut supposer qu'on a pris pour b_{t+1} un point de N qui dans la suite des points $a_1, a_2, \dots$ occupe un rang supérieur à celui de b_t. Comme $\varrho_1 > \varrho_2 > \dots$ r_t sera inférieur ou au plus égal à $\varrho_t < \frac{\varrho_1}{2^{t-1}}$. Donc:

$$(b_t, b_{t+s}) < \varrho_1 \left[\frac{1}{2^{t-1}} + \frac{1}{2^t} + \dots\right] = \frac{\varrho_1}{2^{t-2}}$$

et ceci quel que soit t et s. Alors, puisque l'espace considéré est complet — et même il suffit de supposer que l'ensemble C est complet, — la suite des points $b_1, b_2, \dots$ est convergente. Soit α sa

limite. Comme $b_r, b_{r+1}, \dots$ appartiennent au sphéroïde $S(b_r)$ qui est un ensemble fermé, α appartiendra aussi à $S(b_r)$ quelque soit r. De plus, comme $S(b_{r+1})$ est intérieur à $S(b_r)$, α est aussi intérieur à $S(b_r)$ quelque soit r. Il existe bien dans l'espace considéré un point α qui est intérieur à une infinité des $S(a_n)$.

Comme la démonstration s'applique à un espace (D) quelconque où on envisage un ensemble séparable et complet, on voit finalement que:

Dans un espace (D) quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble séparable et complet possède la propriété de Denjoy est que cet ensemble soit clairsemé.

En particulier comme dans un espace (D) tout ensemble compact est à la fois séparable et complet: *Dans tout espace (D), la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble compact possède la propriété de Denjoy est que cet ensemble soit clairsemé.*

Application. M. Denjoy a déduit du théorème précédent (énoncé dans le cas des espaces euclidiens) une application importante à certaines séries de fonctions à un nombre fini de variables (3).

On peut étendre mot pour mot sa démonstration au cas de certaines séries de fonctionnelles et en particulier à certaines séries de fonctions d'une infinité de variables. Toute-fois dans sa démonstration, nous remplaçerons pour en accroitre encore la généralité, le mot „clairsemé“ par „possédant la propriété de Denjoy“.

On a alors l'énoncé suivant:

Soit E, un ensemble dénombrable de points $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots a^{(n)}, \dots$ d'un espace (D), $F_n(x)$ une fonctionnelle (définie en tout point x de l'espace, sauf peut être sur E), qui est bornée en dehors de tout sphéroïde ayant pour centre le point $a^{(n)}$ et qui croit indéfiniment en valeur absolue quand la distance $(a^{(n)}, x)$ tend vers zéro par valeurs non nulles.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système de coefficients α_n indépendants de x et tels que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n F_n(x)$$

soit partout convergente en dehors de E est que l'ensemble E possède la propriété de Denjoy.

En outre, *lorsque E possède la propriété de Denjoy, on peut choi-*

sir les coefficients α_n de sorte que la convergence de la série soit uniforme sur tout ensemble fermé H disjoint de E et de son dérivé E' pourvu que l'un des ensembles H ou E soit compact.

On peut donc dire aussi:

Si E est un ensemble séparable et clairsemé appartenant à un espace (D) quelconque, on peut toujours choisir les coefficients α_n de sorte que la série converge partout sauf peut être sur E et converge uniformément sur tout ensemble fermé H disjoint de E et E' pourvu que l'un des ensembles H ou E soit compact.

Si E est un ensemble séparable et complet appartenant à un espace (D) quelconque, on ne peut choisir les coefficients α_n de sorte que la série converge partout sauf peut être sur E, que si l'ensemble E est clairsemé.

La démonstration grâce à laquelle M. Denjoy établit l'uniformité de la convergence sur H suppose implicitement que les distances entre les points de H et ceux de E ont une borne inférieure positive. La condition de M. Denjoy que H soit fermé et disjoint de E' n'est pas suffisante pour assurer la propriété précédente.

Mais, vraisemblablement, M. Denjoy a admis implicitement, comme on le fait d'habitude, (ce qui, d'ailleurs, n'est pas toujours sans inconvénient) que les ensembles considérés étaient bornés. Il n'est pas cependant évident que cette hypothèse, utile pour la démonstration, intervienne dans le résultat. Il ne sera donc pas inutile de donner l'exemple suivant.

La série

$$\sum \frac{\alpha_n}{(x-n)^2+y^2}$$

est telle que le terme de rang n soit en valeur absolue plus grand que l'unité si l'on prend pour point x, y un point x_n, y_n, tel que

$$(x_n-n)^2+y_n^2<|\alpha_n|.$$

Or on peut prendre ce point dans une région H vérifiant à la fois toutes les inégalités

$$(x-n)^2+y^2\geqslant\frac{|\alpha_n|}{2}$$

région formant un ensemble fermé disjoint de E et de E', — E étant ici l'ensemble clairsemé des points $x=0$, $y=n$. Il n'y a pourtant pas convergence uniforme sur H.

Ainsi, non seulement la démonstration, mais encore l'énoncé de M. Denjoy nécessitent pour être exacts une restriction supplémentaire: il suffit d'admettre que H ou E est borné.

Ceci concerne le cas étudié par M. Denjoy d'un espace à un nombre entier de dimensions. Il est facile de voir que la démonstration et l'énoncé de M. Denjoy s'étendent au cas d'un espace (D) quand on les complétent conformément à l'observation ci-dessus, le mot borné étant remplacé dans le cas général par le mot compact.

Exemple. Plaçons nous dans l'espace A des séries absolument convergentes dont chaque point abstrait, x, a pour coordonnées les termes d'une série absolument convergente

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$$

et où la distance de deux points x, y est de la forme

$$|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\ldots+|x_n-y_n|+\ldots.$$

Alors on voit que si dans cet espace qui est un espace (D) séparable, un ensemble dénombrable de point $a^{(1)}, a^{(2)},\ldots a^{(n)},\ldots$ est clairsemé, on pourra choisir des coefficients $\alpha_1, \alpha_2,\ldots$ tels que, par exemple, la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_n}{|x_1-a_1^{(n)}|+|x_2-a_2^{(n)}|+\ldots+|x_p-a_p^{(n)}|+\ldots}$$

soit convergente partout dans l'espace A en dehors de l'ensemble E des points $a^{(1)}$, $a^{(2)},\ldots$

DEUXIÈME PARTIE.

I Prolongement d'un espace non compact en un espace non compact.

Introduction. On sait qu'on peut, en adjoignant au plan *un seul point*, (le point à l'infini) et en définissant convenablement la convergence vers ce point *sans modifier la convergence des suites bornées*, considérer le plan euclidien comme une partie d'un espace, le plan complexe, dans lequel, de tout ensemble infini, on peut extraire une suite convergente.

Dans le langage qui convient à des espaces de nature plus générale, nous pouvons dire que le plan eucliden est un *espace non compact* qui par l'adjonction d'un seul point *peut être prolongé en* *un espace compact* sans modification de l'opération de dérivation des ensembles lorsqu'on ne fait entrer en ligne de compte que les points de l'espace primitif.

M. Alexandroff a pu étendre[1]) ce procédé à une catégorie d'espaces beaucoup plus générale, à savoir à ceux des espaces de Hausdorff qu'il appelle *localement* compacts. Il a montré qu'un espace de Hausdorff. g, non compact, mais localement compact, peut être considéré comme un ensemble appartenant à un espace de Hausdorff compact, G, obtenu par l'adjonction d'un seul point a à l'espace initial. Et ceci sans changer la loi qui détermine les points d'accumulation d'un ensemble lorsqu'on ne s'occupe que des points d'accumulation et des ensembles qui appartiennent à l'espace initial.

Nous allons prouver que le prolongement ainsi défini d'un espace de Hausdorff non compact en un espace de Hausdorff compact moyennant l'adjonction d'un seul point, non seulement est possible pour la catégorie considérée par M. Alexandroff, mais encore *ne peut l'être que pour cette catégorie*. En outre, nous étudierons et nous résoudrons les problèmes analogues qui se posent quand on considère, au lieu des espaces de Hausdorff, des espaces accessibles, des espaces (S) et des espaces (D). Enfin nous donnerons aussi les solutions des problèmes correspondants quand on veut prolonger un espace non parfaitement compact en un espace parfaitement compact.

Prolongement d'un espace accessible ou espace (H). Donnons-nous un espace accessible non compact quelconque g et un point a non compris dans g. Nous allons chercher la façon la plus générale de définir les voisinages du point a, sans modifier les voisinages des points de g, pour que l'espace $G = g + a$, soit un espace accessible compact, — en supposant le problème possible.

Pour qu'il soit compact, il faut (par définition) que tout ensemble E composé d'une infinité de points de G distincts (ou plus brièvement tout sous-ensemble infini de G) ait un dérivé non vide.

Si donc V_a est un voisinage de a dans G, le complément $W = G - V_a$ de V_a dans G est un ensemble de g compact dans g. Sans quoi, W contiendrait un sous-ensemble infini qui n'aurait dans g aucun point d'accumulation, qui aurait par conséquent dans G

[1]) *Ueber die Metrisation der im kleinen kompakten topologischen Räume*, Math. Ann. Bd, 92, 1924, pages 294—301.

le seul point d'accumulation a. Par suite, W aurait dans G le point a pour point d'accumulation et devrait alors avoir au moins un point (distinct de a) en commun avec V_a.

Ainsi la famille F des voisinages de a est composée des ensembles $G - W$ complémentaires dans G des ensembles W d'une certaine famille K d'ensembles W appartenant à g et compacts dans g.

Cherchons les conditions auxquelles doit satisfaire la famille K pour que l'espace G soit accessible.

Il suffit de se reporter aux conditions que doivent vérifier les voisinages dans un espace accessible.

Il faut d'abord qu'étant donnés deux voisinages V_a^1, V_a^2 de a, il existe un voisinage V_a^3 commun à ceux-ci. C'est-à-dire qu'étant donnés deux ensembles W^1, W^2 de K, il existe un ensemble W^3 de K contenant $W^1 + W^2$. Il faut ensuite qu'étant donné un point x quelconque de g, il existe un voisinage V_a de a qui soit disjoint de x. C'est-à-dire que tout point x de g appartienne à l'un au moins des ensembles W de K.

Il faut enfin qu'étant donné un voisinage quelconque V_a de a, il existe un voisinage V_a^0 de a intérieur à V_a, quand on considère ces ensembles comme appartenant à G. (Ceci implique, bien entendu, que V_a^0 est un sous-ensemble de V). C'est-à-dire qu'étant donné un ensemble W de K, il existe un ensemble W^0 de K comprenant non seulement l'ensemble W, mais aussi le dérivé de celui ci dans l'espace g, dérivé que nous désignerons par W'_g.

L'ensemble $W + W'_g$ est fermé dans g; et il est compris dans W^0 qui est compact dans g. On voit que W devra être compris dans un ensemble (savoir $W + W'_g$) qui est compact et fermé dans g.

Réciproquement, toute famille F vérifiant ces conditions donne une solution du problème. Or, on peut évidemment former une telle famille en choisissant pour K la famille K_0 des ensembles de g qui sont à la fois compacts et fermés dans g. Car: si W^1, W^2 sont compacts et fermés, il en est de même de $W^1 + W^2$; tout point de x appartient à au moins un ensemble compact et fermé, par exemple celui formé par x lui même. Enfin si un ensemble W est compact et fermé dans g, $W + W'_g = W$ et par suite il existe un ensemble de K, à savoir l'ensemble $W^0 = W$, qui contient $W + W'_g$.

Donc *le problème est possible* et a au moins une solution.

Il n'y a pas lieu de considérer comme distinctes deux solutions fournies par deux familles équivalentes de voisinages. Mais, même avec cette restriction, *il y aura en général plus d'une solution.*

Supposons, par exemple, que l'espace g soit l'espace plan euclidien. Et prenons pour F la famille F_1 des ensembles complémentaires des ensembles de la famille K_1 formés chacun de la somme d'un nombre fini de suites convergeant au point de vue métrique. Cette famille satisfait aux conditions demandées. Les deux familles F_0, F_1 correspondant à K_0 et K_1 ne sont pas équivalentes en général. Car l'ensemble complémentaire d'un ensemble compact et fermé peut ne contenir l'ensemble complémentaire d'aucune suite convergente. Mais en revenant au cas d'un espace accessible quelconque, on peut lever l'indétermination du problème en imposant à la solution d'être *la plus stricte possible.* C'est à-dire que a ne sera considéré comme point d'accumulation d'un ensemble dans cette solution particulière que s'il l'est dans toute autre solution.

Or cette solution particulière existe: En effet; la dernière des conditions imposées à une quelconque des familles K montre que tout ensemble W de K doit être compris dans un ensemble compact et fermé, c'est-à dire dans un ensemble de K_0. Donc si a est point d'accumulation d'un ensemble E de G dans la solution correspondant à la famille K, $E - a$ doit n'être contenu dans aucun des ensembles de K et par suite ne doit être contenu dans aucun des ensembles de K_0. Par suite a est aussi élément d'accumulation de E dans la solution correspondant à K_0.

Finalement *la solution la plus stricte possible consiste à prendre pour famille des voisinages de a, la famille de tous les ensembles complémentaires dans G des ensembles qui sont compacts et fermés dans g.*

Prolongement d'un espace de Hausdorff. Arrivons maintenant au problème résolu par M. Alexandroff: déterminer *une* catégorie d'espaces de Hausdorff non compacts qui peuvent chacun être prolongé par l'adjonction d'un seul point en un espace de Hausdorff compact. Nous allons montrer que le cas découvert par M. Alexandroff où la solution est possible *est le seul* où elle soit possible.

Un espace de Hausdorff étant un espace accessible, nous savons déjà que tout espace de Hausdorff non compact g peut être considéré comme partie d'un espace accessible compact G obtenu par l'adjonction d'un seul point. Pour que cet espace G soit même un espace de Hausdorff, il suffit qu'il possède la propriété D) de M. Hausdorff: Pour tout point x de g, il doit donc exister un couple de voisinages de x et de a, soient V_x et V_a, qui soient disjoints. Autremens dit, x doit être intérieur au complément W de V_a. Or chacun des ensembles W de la famille K est compris dans un ensemble compact et fermé dans g. Ainsi, tout point x de g doit être intérieur à un ensemble compact et fermé dans g.

En modifiant un peu la forme de la définition de M. Alexandroff, *nous appellerons ensemble localement compact, un ensemble dont chaque point x est intérieur à un ensemble compact et fermé.*

Ainsi, le prolongement désiré n'est possible que si l'espace initial g est localement compact.

D'ailleurs, si cette condition est réalisée, la famille K_0 satisfera bien à la condition que tout x de g soit intérieur à l'un des ensembles de K_0. Donc le problème est possible.

Ainsi, *pour qu'un espace de Hausdorff non compact, g, puisse être, par l'adjonction d'un seul point, prolongé en un espace de Hausdorff compact, il suffit* (comme l'avait montré M. Alexandroff) et en outre, *il faut que l'espace g soit localement compact.* De plus, nous avons montré déjà, que *la solution la plus stricte est fournie en prenant pour famille des voisinages du point additionnel a, la famille des ensembles complémentaires dans G des ensembles compacts et fermés dans l'espace initial g.*

Prolongement d'un espace (S). Supposons maintenant que l'espace donné g soit un espace (S), c'est-à-dire un espace où l'opération de dérivation est définie par l'intermédiaire de suites convergentes et où tout ensemble dérivé est fermé. Et pour faciliter les démonstrations, supposons qu'on utilise la famille maximum de suites convergentes qui est compatible avec l'opération de dérivation donnée.

Nous nous proposons, étant donné un espace (S) non compact, déterminé, g, de trouver s'il est possible de prolonger cet espace g par l'adjonction d'un seul point a, en un espace (S) compact: $G = g + a$.

Un espace (S), de même qu'un espace de Hausdorff, est un cas particulier d'un espace accessible. (Ces deux cas particuliers, d'ailleurs se chevauchent: il y a des espaces (S) qui ne sont pas des espaces de Hausdorff et inversement).

On pourrait donc utiliser la solution donnée pour l'espace accessible.

On peut aussi procéder directement Il s'agit de définir les suites convergentes dans G sans changer la convergence, ni la limite dans g.

Soit M la famille des suites convergentes dans G, suites attachées chacune à un point de G considéré comme sa limite.

En supposant que M est une famille maximum pour G, M devra contenir comme seules suites convergeant vers un point x de g toute suite ne comprenant a qu'à un nombre fini ou nul de rangs et telle que la suite restante converge dans g. Elle devra contenir comme seules suites convergeant vers a, toute suite infinie de points de G ne comprenant aucune suite convergente dans g.

Inversement, si M est la famille ainsi déterminée, l'espace G constitué des points de $g+a$ et où la famille des suites convergentes est M sera un espace compact prolongeant g sinon à titre d'espace (S) au moins comme espace (L).

C'est d'abord un espace (L). En effet, toute suite de M n'a qu'une seule limite, toute suite de points identiques à un point de G converge vers ce point de G, toute suite extraite d'une suite convergeant dans G converge aussi dans G avec la même limite.

De plus, cet espace est compact, car tout ensemble infini, E, de points de G distincts contient une suite infinie de points distincts. Ou bien celle ci ne contient aucune suite convergeant dans g et alors a est point d'accumulation de E dans G. Ou, dans le cas contraire, il y a au moins un point de g qui est point d'accumulation de E.

Enfin, la définition de M montre que les points d'accumulation appartenant à g, d'un ensemble de points de g sont bien les mêmes, qu'on considère cet ensemble comme appartenant à l'espace g ou à l'espace G.

Il reste maintenant à voir dans quel cas l'espace bien défini G est un espace (S), c'est-à-dire dans quel cas tout ensemble dérivé y sera fermé.

Supposons qu'il existe un ensemble e de points de g qui soit compact dans g et qui ait pour dérivé un ensemble e'_g non compact dans g. Alors le dérivé de e dans G, e'_G serait identique à e'_g et le dérivé e''_G dans G de e'_G est identique à e''_g+a. Comme a n'appartient pas à e''_G, on voit que e'_G ne serait pas fermé dans G.

Au contraire, si tout ensemble compact de points de g a pour dérivé dans g un ensemble compact dans g, l'espace G défini plus haut est bien un espace (S).

En effet, si E est un ensemble infini de points de G, et si e $E-a$, e est infini et son dérivé e'_G dans G n'est pas vide. Si e est compact dans g, e'_g est compact dans g par hypothèse et $e'_G = e'_g$. Par suite $E''_G = e''_G = e''_g$ qui est compris dans $e'_g = e'_G = E'_G$. Donc E'_G est fermé. Si e n'est pas compact dans g, $e'_G = e'_g + a$, donc e''_G est égal soit à e''_g soit à $e''_g + a$, par conséquent est compris dans e'_G. Donc E''_G est encore compris dans E'_G.

En résumé, pour qu'un espace (S) non compact puisse être prolongé par l'adjonction d'un seul point en un espace (S) compact, il faut et il suffit que dans l'espace initial g, le dérivé de chaque ensemble compact soit compact. Et alors le prolongement est unique, c'est-à-dire que l'opération de dérivation des ensembles est bien déterminée dans l'espace final.

Il serait intéressant de former un exemple d'espace (S) contenant un ensemble compact dont le dérivé n'est pas compact.

Prolongement d'un espace (D).

Cherchons maintenant à prolonger moyennant l'adjonction d'un seul point a un espace (D) non compact, soit g, en un ensemble (D) compact, soit $G = g + a$.

Le prolongement le meilleur serait celui qui conserverait les distances dans g. Il n'est pas possible, même pour des espaces aussi simples que l'espace linéaire. Si on prend pour g l'espace linéaire, si on adjoint à g un point a, puis si on définit les distances mutuelles dans $G = g + a$ en conservant les distances mutuelles primitives dans g, on voit que G ne pourra être compact. En effet, si on considère la suite Σ des points d'abscisses $1, 2, 3, \ldots$ on devrait pouvoir en extraire une suite σ, $n_1, n_2, \ldots$ convergente dans G. Alors elle ne pourrait converger que vers a; or $|n_p - n_q|$ serait au plus égale à la somme des distances de a à n_p et de a à n_q. Donc $|n_p - n_q|$ devrait être très petit quand p et q sont grands, alors que $|n_p - n_q| \geqslant 1$ si $p \neq q$.

Nous allons donc nous contenter de chercher s'il est possible de déterminer le prolongement au sens topologique c'est-à dire de définir les distances dans G de façon qu'un point x qui est, dans l'espace g, point d'accumulation d'un ensemble e reste point d'accumulation de e quand on considère x et e comme appartenant à G.

Comme un espace (D) est un espace de Hausdorff, nous voyons d'abord que le problème n'est possible que si g est localement compact. D'autre part, dans un espace (D) tout ensemble compact est séparable. Donc g qui est compact quand on le considère comme sous-ensemble de G devra être séparable dans G. Il doit y avoir un sous-ensemble dénombrable n de g tel que tout point de g soit limite dans G d'une suite convergente de points de n quand la convergence est définie comme dans G. Mais alors cela a lieu aussi quand la convergence est définie comme dans l'espace g. Donc g doit être un espace séparable et localement compact.

Réciproquement, ces deux conditions sont suffisantes. En effet, puisque g est un espace de Hausdorff localement compact, il est d'abord possible de prolonger g par un espace de Hausdorff compact $G_1 = g + a$. D'autre part, puisque dans g, qui est un espace (D), le dérivé de tout ensemble compact est compact, il est possible de prolonger g qui est un espace (S) par un espace (S) compact G_2 formé comme G_1 des élements de g et de a. D'ailleurs G_2 est déterminé et s'obtient en prenant pour suite convergente vers a toute suite infinie σ qui, lorsqu'on y supprime les éléments identiques à a, est vide ou ne contient aucune suite convergeant dans g. Par suite, tout ensemble V_a complémentaire dans G_1 à un ensemble compact et fermé dans g a un point commun avec une telle suite σ. Et réciproquement, tout ensemble ouvert dans G_2 qui a un point commun avec toutes ces suites a pour complément dans G_1 un ensemble compact et fermé dans g. Ainsi, la famille des voisinages est la même dans l'unique prolongement qui est un espace (S) et dans le prolongement le plus strict qui est un espace de Hausdorff.

En résumé, si g est un espace (D) séparable localement compact, il existe un espace (S) et un seul qui prolonge g par l'adjonction d'un seul point, qui est compact et qui est en même temps un espace de Hausdorff. Or Urysohn a démontré que pour qu'un espace de Hausdorff compact soit en même temps un espace (D), il suffit qu'il soit parfaitement séparable.

Il nous suffira donc, pour prouver que l'espace prolongé $G = G_1 = G_2$ est un espace (D) de démontrer qu'il est parfaitement séparable. Comme l'espace g est un espace (D) séparable et par conséquent aussi parfaitement séparable, on peut supposer que les voisinages des points de g appartiennent à une famille dénombrable $V_1, V_2 \dots V_p \dots$ Il reste finalement à démontrer que les voisinages de a dans G sont équivalents à une famille dénombrable.

Or tout point x de l'espace localement compact g est intérieur à un ensemble compact fermé D_x. Il y a dans $V_1, V_2, \dots$ un ensemble V_p auquel x est intérieur et qui appartient à D_x. Alors V_p sera compact; on peut d'ailleurs supposer que $V_1, V_2, \dots$ sont tous fermés dans g. Soient alors $U_1, U_2, \dots$, ceux des ces ensembles qui sont compacts et fermés. On voit qu'on peut substituer à D_x, un des U_r ou encore prendre D_x parmi les ensembles $U_1, U_2, \dots$. Si e est un ensemble compact et fermé, on peut le couvrir au moyen d'ensembles U_r compacts et fermés, et par suite au moyen d'un nombre fini d'entre eux. On peut donc le couvrir au moyen de l'un des ensembles $T_r = U_1 + U_2 + \dots + U_r$.

Les voisinages de a sont les compléments dans G d'ensembles e compacts et fermés dans g. Or on peut couvrir e au moyen d'un des ensembles T_r qui sont compacts et fermés. Par conséquent, la famille des voisinages de a est équivalente à celle des compléments dans G des $T_1, T_2, \dots T_r, \dots$, c'est-à-dire à une famille dénombrable. Ainsi G est un espace de Hausdorff compact parfaitement séparable, c'est bien un espace (D) compact. D'ailleurs, c'est bien le seul espace (D) compact qui prolonge g par l'adjonction de a, puisqu'il il n'y a qu'un espace (S) compact qui prolonge g par l'adjonction de a.

Finalement, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace (D) non compact, g, puisse être prolongé par l'adjonction d'un seul point a en un espace (D) compact $G = g + a$ est que l'espace g soit séparable et localement compact. De plus, quand il y a une solution, elle est unique et s'obtient en maintenant dans g la règle de convergence des suites de points et en considérant comme suite convergeant vers a, toute suite infinie de points de G qui fournit après suppression des termes identiques à a, une suite vide ou ne contenant aucune suite convergeant dans g.*

Par exemple, le plan euclidien est un espace (D) non compact; comme il est séparable et localement compact, on peut par l'adjonction d'un seul point a le prolonger en un espace (D) compact. C'est un résultat connu, qu'on obtient directement en prenant l'inverse du plan par rapport à un point extérieur a' et en prenant pour distance de deux points x, y de l'espace prolongé G la distance x', y' des points correspondants sur la sphère, le point a étant considéré comme l'inverse du point a' adjoint à l'espace primitif g. Ceci amène naturellement à appeler a le point à l'infini du plan.

Ce qui précède montre *qu'il n'y a pas d'autre solution au point* *de vue topologique*; c'est-à-dire que si on prolonge le plan euclidien par l'adjonction d'un seul point en un espace (D) compact, dans celui-ci la distance pourra différer de la distance définie dans la solution classique, mais les suites convergentes de points et leurs limites respectives seront les mêmes que dans la solution classique.

II. Prolongement d'un espace non parfaitement compact en un espace parfaitement compact.

Nous allons étudier maintenant le problème qui consiste à prolonger au moyen de l'adjonction d'un seul point un espace non parfaitement compact en un espace parfaitement compact, mais de nature analogue.

Comme il n'y a aucune distinction entre les espaces parfaitement compacts et les espaces compacts quand on n'envisage que des espaces (D), le problème ne sera distinct du précédent que lorsqu'il s'agira d'espaces plus généraux que les espaces (D). Pour une raison analogue, d'ailleurs, il n'y a pas lieu non plus de traiter le problème dans le cas des espaces accessibles parfaitement séparables.

Dans les cas où le nouveau problème est distinct du précédent, on pourra encore suivre des procédés de démonstration entièrement analogues et dont nous ne signalerons que les détails qui seraient essentiellement nouvaux.

Prolongement d'un espace accessible. Supposons qu'il existe un espace accessible parfaitement compact $G = g + a$ qui prolonge l'espace accessible non parfaitement compact g moyennant l'adjonction à g d'un seul point a. Si un ensemble infini e de g n'a aucun point d'accumulation maximé dans g, il devra avoir dans G un seul point d'accumulation maximée qui sera a.

Alors si V_a est un voisinage de a, e devra avoir au moins un point (distinct de a) en commun avec V_a. Donc l'ensemble W complémentaire dans G de V_a, ne devra pas contenir e tout entier. Ainsi W ne peut contenir aucun sous ensemble infini n'ayant aucun point d'accumulation maximé dans g. C'est-à-dire que W est un ensemble parfaitement compact.

La famille K des ensembles W devra en outre satisfaire aux conditions correspondant aux conditions que doivent vérifier les voisinages dans un espace accessible et que nous avons

précisées page 345. Ces conditions nécessaires sont suffisantes. On aura bien un espace accessible $G = g + a$. Il sera parfaitement compact. En effet, soit E un ensemble infini de G; alors $e = E - a$ est aussi infini et appartient à g: 1° Si e a au moins un point d'accumulation maximée, x, dans g, tout voisinage V_x de x contient un sous-ensemble de e qui a même puissance que e et par conséquent que E. Donc E a un point d'accumulation maximée dans G. 2° Si e n'a aucun point d'accumulation maximée dans g, l'ensemble (vide ou non) e_1 des points de e appartenant à W, ne peut avoir même puissance que e.

Car dans ce cas e_1 qui appartient à un ensemble parfaitement compact dans g, W, aurait un point d'accumulation maximée, x, dans g.

Tout voisinage de x contiendrait un ensemble de points de e ayant même puissance que e, x serait point d'accumulation maximée dans g de e contrairement à l'hypothèse. Ainsi l'ensemble des points de E qui appartiennent à un voisinage arbitraire V_a de a a une puissance, α, telle que, ajoutée à la puissance β des points de E appartenant à l'ensemble complémentaire W, elle fournisse une puissance $\alpha + \beta$ supérieure à β. Comme α et $\alpha + \beta$ sont infinis, l'inégalité

$$\alpha + \beta > \beta$$

entraîne $\alpha = \alpha + \beta$[1]). C'est-à-dire que tout voisinage de a contient un ensemble de points de e, de puissance α égale à la puissance $\alpha + \beta$ de e. Ainsi a est bien un point d'accumulation maximée de E. Finalement tout ensemble infini de points de G a un point d'accumulation maximée dans G: G est parfaitement compact.

En résumé, dans le cas où on impose aux espaces g et G d'être accesibles, le nouveau problème *est encore possible*. On obtient la solution la plus générale en considérant une famille K d'ensembles parfaitement compacts dans g et satisfaisant aux trois conditions de la page 323, puis en définissant les voisinages du point a dans G comme les ensembles complémentaires dans G des ensembles de K. En particulier, on obtient *la solution la plus stricte possible* en pre-

[1]) Voir au sujet de cette propriété des nombres cardinaux: W. Sierpiński, L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des ensembles et de l'Analyse, Bull. Acad. Sc. Cracovie, 1919, p. 115 et 116.

nant pour K la famille K_0 de tous les ensembles qui sont dans g parfaitement compacts et fermés.

Prolongement d'un espace de Hausdorff. Ici le nouveau problème *n'est possible* que si l'espace considéré est *parfaitement compact localement.* C'est-à-dire, si tout point est intérieur à un ensemble parfaitement compact et fermé. Mais, en outre, *quand la solution est possible, elle est unique.* En effet comparons une solution correspondant à une des familles K et la solution la plus stricte possible correspondant à la famille K_0. Tout ensemble W_0 de K_0 possède la propriété de Borel-Lebesgue et est couvert par la famille K. Il est donc couvert par un nombre fini d'ensembles de la famille K et ceux-ci appartiennent à un même ensemble de K. Ainsi tout ensemble de K_0 appartient à un ensemble de K. Et nous savons que l'inverse a lieu. Donc les familles de voisinages corespondant à K et K_0 sont équivalentes. *Nous retrouvons le résultat énoncé par M. Alexandroff*

Prolongement d'un espace (S). Soit à prolonger un espace *(S)* non parfaitement compact, g, par l'adjonction d'un seul point a, en un espace *(S)* parfaitement compact $G = g + a$.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord qu'on puisse, par l'adjonction de a, prolonger g en un espace (S) compact. Il faut donc d'abord que dans g tout ensemble dérivé d'un ensemble compact soit compact.

Si cette condition est remplie, il y a un seul espace $G = a + g$ qui soit un espace (S) compact prolongeant g. Si donc le problème que nous cherchons à résoudre est possible, il n'a qu'une solution que nous savons déterminer. Pour qu'il soit possible, il faut que G soit non seulement compact mais encore parfaitement compact.

Un ensemble e de g ne peut avoir a pour point d'accumulation dans G que s'il contient une suite σ convergeant vers a dans G. Alors σ ne peut avoir de point d'accumulation dans g. Donc e ne peut avoir a pour élément d'accumulation dans G que s'il n'est pas compact dans g.

Si donc un ensemble e est compact dans g, il ne peut avoir a pour point d'accumulation dans G. Or e doit être comme l'espace G entier, parfaitement compact dans G: il doit y avoir un point x de G qui est point d'accumulation maximée de e dans G. Comme e n'a pas a pour point d'accumulation, x appartient à g. Donc e doit être parfaitement compact dans g. En résumé, si le problème est possible, tout ensemble compact dans g doit être aussi parfaitement compact dans g.

Réciproquement, si cette seconde condition est aussi remplie, G est parfaitement compact. En effet; soit E un ensemble infini de points de G. Ou bien $e = E - a$ a un point d'accumulation maximée dans g et alors E a le même point d'accumulation maximée dans G. Ou bien e n'a dans g aucun point d'accumulation maximée et alors e n'étant pas parfaitement compact n'est pas non plus compact d'après la seconde condition. Donc e contient une suite infinie ne contenant aucune suite convergeant dans g. Par conséquent e contient une suite convergeant dans G vers a et a est point d'accumulation de E dans G.

Il reste à montrer que tout voisinage de a contient un ensemble de points de E de puissance égale à celle de E. Or dans le cas contraire, l'un au moins V_a des voisinages de a contiendrait un ensemble $E.V_a$ de points de a de puissance inférieure à celle de E. Par suite l'ensemble W complémentaire de V_a dans G, contiendrait un ensemble $e.W$ de points de e de puissance égale à celle de e. Comme W est parfaitement compact dans g (nous l'avons vu pour les espaces accessibles), il y aurait un point x de g dont tout voisinage contiendrait un ensemble de points de $e.W$ de puissance égale à celle de $e.W$ et par suite un ensemble de points de e de puissance égale à celle de e. Ainsi e aurait encore un point d'accumulation maximée dans g contrairement à l'hypothèse.

En résumé; *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse prolonger par l'adjonction d'un seul point un espace (S) par un espace (S) parfaitement compact est que dans l'espace g primitif tout ensemble dérivé d'un ensemble compact soit compact et que tout ensemble compact y soit parfaitement compact.* Alors, *il y a un seul prolongement possible. Et les suites qui y convergent vers a sont celles telles qu'en y supprimant éventuellement a, la suite restante soit vide ou finie ou ne contienne aucune suite convergeant dans g.*