# Sur une classification des ensembles mesurables ($B$).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Les ensembles mesurables ($B$) ont été introduits par M. Emile Borel pour fonder la théorie de la mesure des ensembles de points. Ce sont les deux opérations fondamentales qui conduisent d'une façon naturelle aux ensembles mesurables ($B$) à partir des intervalles (ou, si l'on veut, à partir des ensembles fermés): 1°: prendre une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles *disjoints;* 2°: prendre le complémentaire d'un ensemble (par rapport à un intervalle fondamental). Ces deux opérations correspondent à deux propriétés imposées à la mesure des ensembles: 1) la mesure d'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints est la somme de leurs mesures; 2) la mesure du complémentaire d'un ensemble est le complémentaire de la mesure de cet ensemble (par rapport à la mesure de l'intervalle fondamental).

Designons par $Q_1^*$ la classe des ensembles fermés, par $P_1^*$ — celle de leurs complémentaires, et définissons par l'induction transfinie les classes d'ensembles $P_\alpha^*$ et $Q_\alpha^*$, où $\alpha$ est un nombre ordinal $< \Omega$, comme il suit.

$\alpha$ étant un nombre ordinal $> 1$ et $< \Omega$, supposons que nous avons déjà défini les classes $P_\xi^*$ et $Q_\xi^*$ pour tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$. Nous définirons $P_\alpha^*$ comme la classe de toutes les sommes *disjointes* d'infinités dénombrables d'ensembles appartenant aux classes antérieurement définies; $Q_\alpha^*$ sera la classe de tous les ensembles complémentaires aux ensembles de la classe $P_\alpha^*$.

Or, les classifications des ensembles mesurables ($B$) considérées habituellement, utilisent, au lieu de l'opération 1°, l'opération qui consiste à prendre une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles quelconques (disjoints *ou non*). P. e. les classes $P_\alpha$ et $Q_\alpha$ de M. F. Hausdorff peuvent être définies comme il suit[1]):



$Q_1$ est la classe des ensembles fermés, $P_1$ — celle de leurs complémentaires. $\alpha$ étant un nombre ordinal $> 1$ et $< \Omega$, et les classes $P_\xi$ et $Q_\xi$ étant définies pour tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$, on définit $P_\alpha$ comme la classe de toutes les sommes (disjointes ou non) d'infinités dénombrables d'ensembles appartenant aux classes antérieurement définies; $Q_\alpha$ est la classe des ensembles complémentaires aux ensembles de la classe $P_\alpha$.

Le but de cette Note est d'étudier les relations entre les classes $P_\alpha^*$, $Q_\alpha^*$ et les classes $P_\alpha$, $Q_\alpha$. Nous ne traiterons ici que le cas de l'espace linéaire; le théorème que nous démontrerons ne sera pas d'ailleurs vrai pour un espace à plusieurs dimensions.

**Théorème:** *Dans l'espace linéaire on a pour tout nombre ordinal* $\alpha < \Omega$:

$$P_\alpha^* = P_\alpha, \quad Q_\alpha^* = Q_\alpha,$$

c'est-à-dire notre classification des ensembles mesurables ($B$) coïncide, pour l'espace linéaire, avec celle de M. Hausdorff.

Démonstration. Il est évident que $P_1^* = P_1$ et $Q_1^* = Q_1$. Nous prouverons d'abord que $P_2^* = P_2$ et même que *toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires fermés (disjoints ou non) est une somme disjointe d'un ensemble ouvert (ou vide) et d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés (disjoints).* A ce but nous prouverons le suivant

**Lemme 1.** *Tout ensemble $F_\sigma$ linéaire ponctiforme est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux.*

Dém. Soit $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ un ensemble linéaire ponctiforme, où $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés que nous pouvons évidemment supposer bornés. Posons $S_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_n (n = 1, 2, \ldots)$: ce seront des ensembles ponctiformes fermés et bornés, et nous aurons

$$E = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots. \tag{1}$$

[1]) *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 307. Notre définition des ensembles $P_\alpha$ et $Q_\alpha$ n'est pas identique avec celle de M. Hausdorff, mais elle lui est équivalente (M. Hausdorff désigne les classes $P_\alpha$ et $Q_\alpha$ resp. par $P^\alpha$ et $Q^\alpha$).

La somme (1) étant disjointe, il suffira évidemment, pour démontrer notre lemme, de prouver que, $M$ et $N$ étant deux ensembles fermés et bornés non denses, et $N \subset M$, leur différence $M-N$ est une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.

Soient donc $M$ et $N \subset M$ deux ensembles fermés et bornés non denses. Soit $\varepsilon$ un nombre positif donné. L'ensemble $M$ étant non dense, il existe pour tout point $p$ de $N$ un intervalle $d(p)$ de longueur $<\varepsilon$, entourant $p$, dont les extrémités n'appartiennent pas à $M$. D'après le théorème de Borel, il existe une suite finie de points de $N$, soit $p_1, p_2, \dots, p_m$, telle que les intervalles $d(p_1), d(p_2), \dots, d(p_m)$ recouvrent l'ensemble (fermé et borné) $N$. Soit $Q$ la partie de l'ensemble $M$ recouverte par ces intervalles: leurs extrémités n'appartenant pas à $M$, on voit sans peine que les ensembles $Q$ et $P=M-Q$ sont fermés. Or, nous avons évidemment

(2) $$M-N=P+(Q-N), \text{ et } N \subset Q,$$

et tout point de l'ensemble $Q$ a une distance $<\varepsilon$ de l'ensemble $N$.

Nous avons ainsi établi que, $M$ et $N \subset M$ étant deux ensembles fermés et bornés, non denses, et $\varepsilon$ étant un nombre positif, il existe deux ensembles fermés et bornés, non denses, $P$ et $Q$, disjoints et tels qu'on a les formules (2) et que tout point de $Q$ a une distance $<\varepsilon$ de l'ensemble $N$.

Posons $\varepsilon=1$ et désignons resp. par $P_1$ et $M_1$ les ensembles $P$ et $Q$ correspondants. Posons ensuite $\varepsilon=\frac{1}{2}$ et appliquons notre proposition aux ensembles $M_1$ et $N \subset M_1$, en désignant par $P_2$ et $M_2$ les ensembles $P$ et $Q$ correspondants. Posons ensuite $\varepsilon=\frac{1}{3}$ et appliquons notre proposition aux ensembles $M_2$ et $N \subset M_2$, et ainsi de suite. Les ensembles $P_1, P_2, P_3, \dots$ seront évidemment fermés et sans éléments communs deux à deux, et on voit sans peine que

(3) $$M-N=P_1+P_2+P_3+\dots$$

En effet, nous avons évidemment la formule

(4) $$M-N=P_1+P_2+\dots+P_n+(M_n-N),$$

d'où résulte que $P_n \subset M-N$ pour $n=1, 2, \dots$. Or, soit $p$ un point de $M-N$ et admettons que $p$ non $\varepsilon P_n$ pour $n=1, 2, 3, \dots$. D'après (4) on aurait donc $p \,\varepsilon\, M_n$ pour $n=1, 2, 3, \dots$, et il résulterait de la définition de l'ensemble $M_n$ que $p$ a une distance $<\frac{1}{n}$ de l'ensemble $N$. Cela étant vrai pour $n=1, 2, 3, \dots$ et l'ensemble $N$ étant fermé, il en résulterait que $p \,\varepsilon\, N$, contrairement à l'hypothèse que $p$ est un point de $M-N$. Nous avons donc $M-N \subset P_1+P_2+P_3+\dots$ et la formule (3) est établie.

Notre lemme est ainsi démontré.



Soit maintenant $E$ un ensemble de la classe $P_2$, donc un ensemble $F_\sigma$ linéaire quelconque. Désignons par $U$ l'ensemble de tous les points intérieurs de l'ensemble $E$; $U$ sera un ensemble ouvert (ou vide) et $E-U$ sera un ensemble $F_\sigma$ ponctiforme. D'après le lemme 1 nous concluons donc que $E$ est une somme disjointe d'un ensemble ouvert (ou vide) et d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux. Donc $E$ est un ensemble de la classe $P_2^*$. Nous avons ainsi démontré que $P_2 \subset P_2^*$. Or, il est évident que $P_2^* \subset P_2$. Nous avons donc $P_2^*=P_2$, et il en résulte tout de suite que $Q_2^*=Q_2$.

**Lemme 2.** Tout ensemble $E$ de la classe $P_\alpha$ (où $1<\alpha<\Omega$) est une somme $E=E_1+E_2+E_3+\dots$, où $E_n$ est un ensemble de la classe $Q_{\alpha_n}$ et $\alpha_n<\alpha$ pour $n=1, 2, 3, \dots$

Dém. Notre lemme est vrai pour $\alpha=2$, les ensembles de la classe $Q_1$ étant fermés, et ceux de la classe $P_2$ étant des $F_\sigma$.

Soit $\alpha$ un nombre ordinal donné, $3 \leq \alpha<\Omega$, et supposons notre lemme vrai pour tous les nombres ordinaux $\xi<\alpha$. Soit $E$ un ensemble de la classe $P_\alpha$: d'après la définition de cette classe, nous pouvons poser $E=H_1+H_2+H_3+\dots$, où $H_n$ est un ensemble de la classe $P_{\alpha_n}$ ou bien $Q_{\alpha_n}$, et où $\alpha_n<\alpha$ pour $n=1, 2, 3, \dots$ Si $H_n$ est un ensemble de la classe $P_{\alpha_n}$, où $1<\alpha_n<\alpha$, notre lemme étant, par hypothèse, vrai pour les nombres ordinaux $<\alpha$, nous pouvons poser $H_n=H_{n,1}+H_{n,2}+H_{n,3}+\dots$, où $H_{n,k}$ est un ensemble de la classe $Q_{\alpha_{n,k}}$ et $\alpha_{n,k}<\alpha_n<\alpha$; si $\alpha_n=1$, $H_n$ est un $F_\sigma$ et $H_{n,k}$ $(k=1, 2, 3, \dots)$ sont des ensembles de la classe $Q_1$. En décomposant ainsi les termes $H_n$ qui sont de la classe $P_{\alpha_n}$, et n'altérant pas les termes $H_n$ qui sont de la classe $Q_{\alpha_n}$, on obtient facilement la décomposition désirée de l'ensemble $E$. Notre lemme est ainsi démontré.

Il resulte immédiatement de la définition de la classe $P_\alpha$ que nous avons

$$P_\alpha \subset P_\beta \text{ pour } \alpha<\beta,$$

et il s'en suit (par un passage aux ensembles complémentaires) que

(5) $$Q_\alpha \subset Q_\beta \text{ pour } \alpha < \beta.$$

Or, il résulte immédiatement de la définition des ensembles de la classe $P_\alpha$ qu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la classe $P_\alpha$ est un ensemble de la classe $P_\alpha$. Le complémentaire d'un produit étant une somme de complémentaires, il en résulte qu'un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de la classe $Q_\alpha$ est un ensemble de la classe $Q_\alpha$. Donc, à plus forte raison, un produit de deux ensembles de la classe $Q_\alpha$ est un ensemble de la classe $Q_\alpha$, et, d'après (5), le produit de deux ensembles, dont l'un appartient à la classe $Q_\alpha$ et l'autre à la classe $Q_\beta$, où $\beta \geqslant \alpha$, est un ensemble de la classe $Q_\beta$. Il en résulte tout de suite, d'après le lemme 2, qu'un produit de deux ensembles de la classe $P_\alpha$ est un ensemble de la classe $P_\alpha$, et cette propriété s'étend, par l'induction facile, à un nombre fini quelconque de facteurs. Il en résulte (par un passage aux complémentaires) le suivant

**Lemme 3:** Une somme d'un nombre fini d'ensembles de la classe $Q_\alpha$ est un ensemble de la classe $Q$ .

**Lemme 4**[1]**:** *Tout ensemble $E$ de la classe $P_\alpha$, où $3 \leqslant \alpha < \Omega$, est une somme disjointe $E = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$, où $H_n$ est un ensemble de la classe $Q_{\xi_n}$, et où $\xi_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$*

Nous démontrerons le lemme 4 par l'induction transfinie. Soit d'abord $E$ un ensemble de la classe $P_3$. D'après le lemme 2 et d'après (5), nous pouvons donc poser $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$, où $E_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ sont des ensembles de la classe $Q_2$, donc des $G_\delta$. Posons $S_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$; les ensembles $S_n$ seront des $G_\delta$ et nous aurons $E = E_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots$, les termes de cette somme étant sans points communs deux à deux. Il suffira donc de prouver qu'une différence de deux ensembles $G_\delta$ est une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles $G_\delta$. Soient donc $M$ et $N$ deux ensembles $G_\delta$: l'ensemble $CN$ est donc un $F_\sigma$ et nous pouvons poser $CN = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, où $F_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ sont des ensembles fermés. En posant $\Phi_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, nous avons

(6) $$CN = \Phi_1 + (\Phi_2 - \Phi_1) + (\Phi_3 - \Phi_2) + \dots,$$

[1]) Ce lemme est dû à M. N. **Lusin.**



où $\Phi_n$ sont des ensembles fermés. Donc $\Phi_{n+1} - \Phi_n = \Phi_{n+1} \cdot C\Phi_n$ est un $G_\delta$, et parsuite $CN$ est, d'après (6), une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles $G_\delta$. Il en est donc de même de l'ensemble $M - N = M \cdot CN$ (puisque $M$ est un $G_\delta$). Le lemme 4 est donc vrai pour $\alpha = 3$.

Soit maintenant $\alpha$ un nombre ordinal donné quelconque $> 3$ et $< \Omega$, et soit $E$ un ensemble de la classe $P_\alpha$. D'après le lemme 2, nous pouvons poser $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$, où $E_n$ est un ensemble de la classe $Q^\alpha_n$ et $\alpha_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, \dots$ Désignons par $\mu_n$ le plus grand des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et 3: nous aurons donc $\mu_n < \alpha$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ D'après le lemme 3 et d'après (5) nous concluons que l'ensemble $S_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ est de la classe $Q_{\mu_n}$. Or, nous avons

(7) $$E = E_1 + S_2 \cdot CS_1 + S_3 \cdot CS_2 + S_4 \cdot CS_3 + \dots.$$

L'ensemble $S_n$ étant de la classe $Q_{\mu_n}$, l'ensemble $CS_n$ est de la classe $P_{\mu_n}$: or, $3 \leqslant \mu_n < \alpha$ et notre lemme est vrai, par hypothèse, pour les nombres ordinaux $\geqslant 3$ et $< \alpha$; nous concluons donc que l'ensemble $CS_n$ est une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenants aux classes $Q$, dont les indices sont inférieurs à $\mu_n \leqslant \mu_{n+1}$. Le produit de deux ensembles de la classe $Q_\beta$ étant un ensemble de la classe $Q_\beta$, nous concluons donc, d'après (5), que l'ensemble $S_{n+1} \cdot CS_n$ est une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles de la classe $Q_{\mu_{n+1}}$, et la formule 7 prouve (d'après $\mu_{n+1} < \alpha$, pour $n = 1, 2, \dots$) que le lemme 4 est vrai pour le nombre $\alpha$.

Le lemme 4 est ainsi démontré. Pour en déduire maintenant qu'on a $P_\alpha = P^*_\alpha$, et parsuite aussi $Q_\alpha = Q^*_\alpha$, pour $\alpha \geqslant 3$, il faut seulement appliquer l'induction transfinie, ce qui ne présente ici aucune difficulté. Nous pouvons donc regarder notre théorème comme démontré.

Il importe de remarquer que notre théorème n'est pas vrai pour l'espace à $m$ dimensions, où $m > 1$. Pour le prouver, il suffira de donner un exemple d'un ensemble plan appartenant à la classe $P_2$, mais pas à la classe $P^*_2$. Je dis qu'un tel ensemble est l'ensemble $E$ de tous les points $(x, y)$ du plan, tels que $y = 0$ et $0 < x \leqslant 1$.

L'ensemble $E$ est évidemment un $F_\sigma$, donc un ensemble de la classe $P_2$: il nous reste donc à démontrer que $E$ n'appartient pas à la classe $P^*_2$. Admettons, par contre, que $E$ appartient à la classe

$P_2^*$: donc $E$ est une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés ou ouverts. Or, $E$ ne contient évidemment aucun ensemble plan ouvert non vide: nous avons donc $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, où $E_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles fermés sans points communs deux à deux. L'ensemble $E_1$ est situé dans l'intervalle $(0, 1)$ (de l'axe d'abscisses) et ne contient pas le point 0 (puisque $E_1 \subset E$); désignons par $x_1$ la borne inférieure de $E_1$: l'ensemble $E_1$ étant fermé, nous avons $x_1 \varepsilon E_1$, et parsuite $0 < x_1 \leqslant 1$. Soit $n_2$ le plus petit indice $< 1$, tel que l'ensemble $E_{n_2}$ a des points communs avec l'intervalle $(0, x_1)$, et désignons par $x_2$ la borne supérieure de la partie de $E_{n_2}$ contenue dans $(0, x_1)$: les points 0 et $x_1$ n'appartenant pas à $E_{n_2}$ (puisque $E_{n_2} \subset E$, $x_1 \varepsilon E_1$, $n_2 > 1$ et $E_1 \cdot E_{n_2} = 0$) et $E_{n_2}$ étant fermé, nous avons $0 < x_2 < x_1$ Soit $n_3$ le plus petit indice $> n_2$, tel que $E_{n_3}$ a des points commus avec l'intervalle $(x_2, x_1)$, et soit $x_3$ la borne inférieure de la partie de $E_{n_3}$ contenue dans $(x_2, x_1)$: nous aurons $x_2 < x_3 < x_1$. En procédant ainsi de suite, nous obtiendrons une suite infinie des intervalles

$$(x_2, x_1),\ (x_2, x_3),\ (x_4, x_3),\ (x_4, x_5),\ (x_6, x_5), \ldots,$$

contenus chacun dans le précédent, et l'intervalle $(x_{2n+2}, x_{2n+1})$ étant contenu à l'intérieur de l'intervalle $(x_{2n}, x_{2n-1})$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). Il existe donc un point $\xi$ intérieur à tous ces intervalles, et on voit sans peine (d'après la définition des nombres $x_n$) que ce point ne pourrait appartenir à aucun des ensembles $E_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, donc non plus à l'ensemble $E$, ce qui implique une contradiction, puisque $0 < \xi < 1$. Notre assertion est ainsi démontrée.

Observons qu'on peut démontrer sans peine que, dans l'espace à $m$ dimensions, on a $P_n \subset P_{n+1}^*$ et $Q_n \subset Q_{n+1}^*$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $P_\alpha = P_\alpha^*$, $Q_\alpha = Q_\alpha^*$ pour $\omega \leqslant \alpha < \Omega$.

Remplaçons maintenant l'opération 2° par l'opération 2: *prendre la différence de deux ensembles $E_1 - E_2$, où $E_2 \subset E_1$*. On obtient ainsi une classification d'ensembles qui se prête encore bien à la théorie de la mesure. Les classes $P_\alpha^-$ et $Q_\alpha^-$ sont ici définies comme il suit: $Q_1^-$ est la classe de tous les ensembles fermés, $P_1^-$ — celle de tous les ensembles ouverts. Soit maintenant $\alpha$ un nombre ordinal $> 1$ et supposons déjà définies toutes les classes $P_\xi^-$ et $Q_\xi^-$, où $\xi < \alpha$. La classe $P_\alpha^-$ est formée de toutes les sommes disjointes d'une infinité dénombrable d'ensembles, appartenant aux classes antérieurement définies, et la classe $Q_\alpha^-$ est formée de toutes les différences $E_1 - E_2$, où $E_1$ et $E_2 \subset E_1$ sont des ensembles de la classe $P_\alpha^-$.



On pourrait démontrer que les classes $P_\alpha^-$ et $Q_\alpha^-$ ainsi définies vérifient les relations:

$$P_\alpha^- = P_\alpha \text{ et } Q_\alpha^- \supset Q_\alpha \neq Q_\alpha^-, \text{ pour } 1 < \alpha < \Omega$$

dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.