car en vertu de (29), (14ª)

(31) $$\frac{1}{2^i}\varrho_i \leqq \frac{1}{2^i}\delta < \eta.$$

12. D'après **2** $U(B)$ est un G_δ, d'après (18) et **11** c'est un G_δ à noyau (Kern)[1] non nul. Donc d'après un théorème de Young[2]) $U(B)$ contient un sous-ensemble parfait Z. Deux points différents de Z étant situés sur deux composants différents de C (en vertu de la définition de $U(B)$ on voit que l'ensemble de composants de C est de la puissance du continu, c. q. f. d.

[1]) Hausdorff, l. c. p. 226.
[2]) l. c. p. 319.

Varsovie 6. I. 1927.

Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de *démontrer pour tout entier positif n l'existence d'un ensemble G_δ de dimension n, separé entre tout couple de ses points.* Ce résultat donne la solution (d'ailleurs la plus avantageuse au point de vue de la notion de classe) des problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn[1]). Pour $n=1$, une solution a été donné par M. Sierpiński[2]).

2. Je vais désigner par R_m l'espace euclidien à m dimensions; nous supposons fixé dans R_m $(m=1,2\ldots)$ un système de coordonnées cartesiennes x étant un point de R_m, ξ un nombre réel, nous désignerons par $[x,\xi]$ le point du R_{m+1} dont les m premières coordonnées coïncident avec celles de x, et la $m+1^{\text{ème}}$ est égale à ξ.

3. Soit E un ensemble linéaire, fermé et borné. La fonction $x(\tau)$ definie pour $\tau \subset E$ sera appellée m-dimensionnelle si $x(\tau) \subset R_m$. L'ensemble:

(1) $$\sum_{\tau \subset E} [x(\tau), \tau]$$

sera apellé l'image $m+1$-dimensionnelle de $x(\tau)$.

4. Lemme. L'image $m+1$-dimensionnelle d'une fonction m-dimensionnelle $x(\tau)$ de classe 1 est un G_δ.

Ce résultat à été démontré pour $m=1$ par M. Sierpiński[3]). La démonstration pour m quelconque se trouve implicite dans un

[1]) Fund. Math. VIII, p. 324.
[2]) Fund. Math. II, p. 81—88.
[3]) C. R. t. 170, p. 919 et Fund. Math. II, p. 74—80.

mémoire de M. Lusin [1]). Désignons par E_1 l'ensemble $\sum\limits_{\substack{x \subset R_m \\ \tau \subset E}} [x, \tau]$, c'est un sous-ensèmble fermé de R_{m+1}. $x(\tau)$ étant de classe 1, il en est de même pour la fonction $\varrho(x, x(\tau))$ définie sur l'ensemble E_1 Soit U l'ensemble de points de E_1 où:

$$(2) \qquad \varrho(x, x(\tau)) = 0$$

d'après un théorème fondamental de Lebesgue U est un G_δ. Mais (2) entraîne $x = x(\tau)$. U est donc identique à (1) et (1) est un G_δ c. q. f. d.

5. Lemme: $\mathfrak{E}$ etant un espace métrique, compact, on peut faire correspondre à tout ensemble ferme $M \subset \mathfrak{E}$ un point $g(M) \subset M$ tel que les relations: $M_{k+1} \subset M_k$, $\varkappa = 1, 2 \ldots$ entraînent $\lim\limits_{k=\infty} g(M_k) = g(\prod\limits_{k=1}^{\infty} M_k)$.

$\mathfrak{E}$ est l'image univoque et continue d'un ensemble linéaire fermé et borné T. c. à d. il existe une fonction $y(\tau)$ univoque et continue pour $\tau \subset T$ et telle que $\mathfrak{E} = \sum\limits_{\tau \subset T} y(\tau)$ [2]). $M \subset \mathfrak{E}$ étant fermé soit τ_M la plus petite valeur de τ telle que $y(\tau) \subset M$ (cette valeur existe en vertu de la continuité de $y(\tau)$. Nous posons $g(M) = y(\tau_M)$. On a évidemment $g(M) \subset M$. La relation $M_{k+1} \subset M_k$ entraîne $\tau_{M_{k+1}} \geqq \tau_{M_k}$. la suite $\{\tau_{M_k}\}$ est bornée, non décroissante, donc convergente Soit $\tau' = \lim\limits_{k=\infty} \tau_{M_k}$; on aura, d'après la continuité de $y(\tau)$: $y(\tau') = \lim\limits_{k=\infty} y(\tau_{M_k}) = \lim\limits_{k=\infty} g(M_k)$. Comme $g(M_{k+l}) \subset M_{k+l} \subset M_k$, $l = 0, 1 \ldots$ on aura pour tout entier positif k: $y(\tau') \subset M_k$, donc $y(\tau') \subset \prod\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. Dautre part soit $y(\tau'') \subset \prod\limits_{k=1}^{\infty} M_k$, alors $y(\tau'') \subset M_k$, donc $\tau'' \geqq \tau_M$ pour $k = 1, 2 \ldots$ Par suite on aura $\tau'' \geqq \tau'$. On voit ainse que $\tau' = \tau_{\prod\limits_{k=1}^{\infty} M_k}$ et $g(\prod\limits_{k=1}^{\infty} M_k) = \lim\limits_{k=\infty} g(M_k)$ c. q. f. d.

6. Lemme. Soit $A \subset R_m$ un ensemble fermé et borné; considérons une décomposition semi-continue supérieurement de A (oberhalb stetige Zerlegung), telle que l'espace Γ formé par les éléments de cette décomposition (Zerlegungsraum) est de dimension 0 [1]); il existe un ensemble G_δ contenu dans A et contenant un et un seul point de chaque élément de la décomposition considerée.

[1]) Fund. Math. X, p. 45—46.

[2]) Hausdorff: Mengenlehre 1927 p. 197.

Γ est homéomorphe avec un ensemble linéaire fermé, borné, punctiforme P. η étant un point de P, désignons par $A(\eta)$ l'élément corréspondant de Γ. D'après **5** ou peut faire correspondre à tout ensemble fermé $M \subset A$ un point $g(M)$ tel que:

(α_1) $g(M) \subset M$.

(α_2) les relations: $M_{k+1} \subset M_k$ entraînent $\lim\limits_{k=\infty} g(M_k) = g(\prod\limits_{k=1}^{\infty} M_k)$.

Posons pour $\eta \subset P$:

$$(3) \qquad h(\eta) = g(A(\eta)).$$

C'est une fonction m-dimensionnelle. Je dis qu'elle est de classe 1.

L'ensemble P étant de dimension 0 on peut trouver un système d'ensembles: $P_i^{(r)}$, $r = 1, 2 \ldots$, $i = 1, 2 \ldots s_r$ remplissant les conditions suivantes:

(β_1) $P_i^{(r)}$ est fermé

(β_2) $\sum\limits_{i=1}^{s_r} P_i^{(r)} = P \quad r = 1, 2 \ldots$

(β_3) $P_i^{(r)} . P_k^{(r)} = 0$ pour $i \neq k$

(β_4) $P_i^{(r+1)}$ est contenu dans un des ensembles $P_k^{(r)}$, $k = 1, 2 \ldots s_r$.

(β_5) $\delta(P_i^{(r)}) \leqq \frac{1}{r}$; ($\delta(M)$ désigne le diametre de M).

D'après ces conditions, a tout $\eta \subset P$ et tout r entier positif correspond un et un seul indice $j_r(\eta)$ tel que:

$$(4) \qquad P_{j_r(\eta)}^{(r)} \supset \eta.$$

On a de plus:

$$(5) \qquad P_{j_r(\eta)}^{(r)} \supset P_{j_{r+1}(\eta)}^{(r+1)}; \quad \prod_{r=1}^{\infty} P_{j_r(\eta)}^{(r)} = \eta.$$

Considérons l'ensemble $\sum\limits_{\xi \subset P_k^{(r)}} A(\xi)$; en vertu de la semi-continuité

[1]) Comp. R. L. Moore: Amer. Trans. 27, p. 416—428 et Vietoris: Proc. Akad. Amsterdam vol. XXIX.

supérieure de la décomposition considérée de A, cet ensemble est un sous-ensemble fermé de A.

Posons

$$h_k(\eta) = g\left(\sum_{\xi \subset P^{(k)}_{j_k(\eta)}} A(\xi)\right) \tag{6}$$

Cette fonction est definie d'une manière univoque pour $\eta \subset P$ et continue (en effet, elle est constante dans tout ensemble $P^{(k)}_i$ et ces ensembles sont d'après (β_2), (β_3) des domaines (rel. P). Les relations (5) entraîment:

$$\sum_{\xi \subset P^{(k+1)}_{j_{k+1}(\eta)}} A(\xi) \subset \sum_{\xi \subset P^{(k)}_{j_k(\eta)}} A(\xi); \quad \prod_{k=1} \left(\sum_{\xi \subset P^{(k)}_{j_k(\eta)}} A(\xi)\right) = A(\xi) \tag{6}$$

donc, on aura en vertu de la propriété (α_2) de $g(M)$:

$$\lim_{k=\infty} h_k(\eta) = g(A(\eta)) = h(\eta) \tag{7}$$

$h(\eta)$ est limite des fonction continues, donc une fonction de classe 1. D'après le lemme 4 l'image $m+1$-dimensionnelle de $h(\eta)$ c. à d. l'ensemble:

$$B_1 = \sum_{\eta \subset P} [h(\eta), \eta] \tag{8}$$

est un ensemble G_δ.

Soit x un point de A; il existe une et une seule valeur $\eta \subset P$, telle que $x \subset A(\eta)$. Désignons la par $\eta(x)$. C'est une fonction continue de x, ce qui résulte de la semi-continuité supérieure de notre décomposition. Soit:

$$A_1 = \sum_{x \subset A} [x, \eta(x)] \tag{9}$$

La correspondance entre A et A_1, qui fait correspondre x à $[x, \eta(x)]$ est biunivoque et bicontinue en vertu de la continuite de $\eta(x)$. Donc c'est une homéomorphie.

D'après (α_1) et (3) on a en particulier:

$$\eta(h(\eta)) = \eta \tag{10}$$

c. à d. le point correspondant de $h(\eta)$ est $[h(\eta), \eta]$. Si nous posons:

$$B = \sum_{\eta \subset P} h(\eta) \tag{11}$$

alors B est homéomorphe avec B_1. Donc B est un G_δ. Comme on a d'autre part:

$$B\,A(\eta) = h(\eta) \tag{12}$$

on voit bien que (11) est l'ensemble cherché.

7. Supposons l'entier n fixé. Soit p un point fixe de R_{n+1}. $G(\lambda)$ désignera la sphère de contre p et de rayon λ, $H(\lambda)$ la frontière de $G(\lambda)$ c. à d.

$$H(\lambda) = \bar{G}(\lambda) - G(\lambda) = \sum_{\varrho(x,p)=\lambda} x. \tag{13}$$

Soit Δ la classe de tous les sous-ensembles fermés de $\bar{G}(1)$, Δ_1 la classe de toutes les suites infinies non décroissantes tirées de Δ. Soit U un élément de Δ_1. U est alors une suite d'ensembles fermés, dont le $k^{\text{ème}}$ élément sera designé par $U^{(k)}$ Si on défini d'une manière convenable la distance $\sigma(M, N)$ des deux éléments de Δ, alors Δ devient un espace métrique et compact [1]). Définissons la distance $\sigma_1(U, V)$ entre deux éléments de Δ_1 par l'égalité:

$$\sigma_1(U, V) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, \sigma(U^{(k)}, V^{(k)}) \tag{14}$$

Δ_1 devient alors un espace métrique et compact.

Remarquons, que L étant un ensemble F_σ contenu dans $G(1)$, il existe une infinité d'éléments U de Δ_1 tels que:

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \tag{15}$$

8. Soit Q un ensemble linéaire parfait, punctiforme contenu dans l'intervalle $\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq \frac{3}{4}$; Δ_1 étant métrique et compact est une image univoque et continue de Q, c. à d., il existe une fonction $U(\tau)$ définie, univoque et continue pour $\tau \subset Q$, telle que:

$$\Delta_1 = \sum_{\tau \subset Q} U(\tau). \tag{16}$$

Posons:

$$C^{(k)}(\tau) = U^{(k)}(\tau) \times H(\tau). \tag{17}$$

[1]) T. **Ważewski**, Fund. Math. IV, p. 218—235.

La continuité de $U(\tau)$ entraîne celle de $U^{(k)}(\tau)$; on aura par suite pour $\lim\limits_{r=\infty} \tau_r = \tau_0$:

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{r=\infty}\, U^{(k)}(\tau_r) = U^{(k)}(\tau_0); \quad \overline{\mathrm{Lim}}_{r=\infty}\, H(\tau_r) = H(\tau_0)\,^{1)} \tag{18}$$

il en resulte

$$\mathrm{Lim\,sup}\; C^{(k)}(\tau_r) \subset C^{(k)}(\tau_0) \quad \text{pour} \quad \lim_{r=\infty} \tau_r = \tau_0. \tag{19}$$

La relation (19) entraîne les conséquences suivantes:

(γ_1) L'ensemble $Q^{(k)}$ de tous les points τ pour lesquels $C^{(k)}(\tau) \neq 0$ est fermé;

(γ_2) Il en est de même pour les ensembles:

$$D_k = \sum_{\tau \subset Q^{(k)}} C^{(k)}(\tau); \quad H_k = \sum_{\tau \subset Q^{(k)}} H(\tau). \tag{20}$$

(γ_3) La décomposition (20) de D_k c. à d. la décomposition dont les éléments sont les $C^{(k)}(\tau)$ est semicontinue supérieurement; le „Zerlegungsraum" de cette décomposition est homéomorphe avec $Q^{(k)}$, donc — de dimension 0 (Q étant de dimension 0).

D'après (γ_3) et le lemme **6**, on peut déterminer un ensemble E_k contenu dans D_k, qui est un G_δ et qui a un et un seul point en commun avec tout $C^{(k)}(\tau) \neq 0$.

Posons

$$E = E_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (E_{k+1} - H_k). \tag{21}$$

9. La suite $\{U^{(k)}(\tau)\}$ est non-décroissante, d'après la définition de Δ_1, c. à d.

$$U^{(k)}(\tau) \subset U^{(k+1)}(\tau) \tag{22}$$

donc

$$C^{(k)}(\tau) \subset C^{(k+1)}(\tau) \tag{23}$$

$$Q^{(k)} \subset Q^{(k+1)}; \quad H_k \subset H_{k+1}. \tag{24}$$

D'autre part $E_k \subset H_k$.

Considérons un nombre positif τ', deux cas sont possibles:

[1]) Hausdorff. Grundzüge d. Mengenlehre, p. 236.

(δ_1) τ' n'est pas contenu dans $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q^{(k)}$, alors:

$$\begin{cases} E \times H(\tau') \subset \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k \times H(\tau') \subset \sum\limits_{k=1}^{\infty} H_k \times H(\tau') = \\ \quad = \sum\limits_{\tau \subset \Sigma Q^{(k)}} H(\tau) \times H(\tau') = 0. \end{cases} \tag{25}$$

(δ_2) $\tau' \subset \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q^{(k)}$. Dans ce cas soit k_1 la première valeur de k, telle que: $\tau' \subset Q^{(k)}$. On aura (en désignant par H_0 l'ensemble vide):

$$\begin{cases} E \times H(\tau') = (E_{k_1} - H_{k_1-1}) \times H(\tau') + \sum\limits_{k<k_1} (E_k - H_{k-1}) \times H(\tau') + \\ \quad + \sum\limits_{k=k_1+1}^{\infty} (E_k - H_{k-1}) \times H(\tau'). \end{cases} \tag{26}$$

En tenant compte de (24) et de ce que $H(\tau') \subset H_{k_1}$, on aura:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=k_1+1}^{\infty} (E_k - H_{k-1}) \times H(\tau') \subset \sum\limits_{k=k_1+1}^{\infty} (E_k - H_{k_1}) \times H(\tau') = \\ \quad = H(\tau') \times \left[\left(\sum\limits_{k=k_1+1}^{\infty} E_k\right) - H_{k_1}\right] \subset H_{k_1} \times (E - H_{k_1}) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

de même:

$$H_{k_1-1} \times H(\tau') = 0 \tag{28}$$

car τ' n'est pas contenu dans $Q^{(k)}$ pour $k < k_1$. Donc:

$$\sum_{k<k_1} (E_k - H_{k-1}) \times H(\tau') \subset H_{k_1-1} \times H(\tau') = 0, \tag{29}$$

$$E \times H(\tau') = E_{k_1} \times H(\tau') = C^{(k_1)}(\tau') \times E_{k_1} \tag{30}$$

or ce dernier ensemble se réduit à un point.

On voit donc, que pour tout point $x \subset E$, on a $\varrho(p, x) \subset \sum\limits_{k=1}^{\infty} Q^{(k)}$ et pour deux points x_1 et x_2 de E différents, on a $\varrho(p, x_1) \neq \varrho(p, x_2)$. Il en résulte, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q^{(k)}$ étant linéaire punctiforme, que E est séparé entre tout couple de ses points x_1, x_2.

10. Soit L un ensemble G_δ contenant E. L'ensemble $\overline{G(1)} - L$ est un F_σ contenu dans $\overline{G(1)}$, donc il existe un élément V de Δ_1, tel que

$$\overline{G(1)} - L = \sum_{k=1}^{\infty} V^{(k)}. \tag{31}$$

En vertu de (16), il existe un point $\tau_1 \subset Q$ tel que $V = U(\tau_1)$, donc:

$$\overline{G(1)} - L = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}(\tau_1). \tag{32}$$

Supposons, que:

$$(\overline{G(1)} - L) \times H(\tau_1) = \sum_{k=1}^{\infty} [U^{(k)}(\tau_1) \times H(\tau_1)] = \sum_{k=1}^{\infty} C^{(k)}(\tau_1) \neq 0. \tag{33}$$

Soit l le premier entier tel que $C_{(l)}(\tau_1) \neq 0$, alors $\tau_1 \subset Q^{(l)}$, mais τ_1 n'est pas contenu dans $Q^{(l-1)}$ (par $Q^{(0)}$ nous comprenons l'ensemble vide). Il en résulte:

$$\left\{\begin{aligned}(E_l - H_{l-1}) \times C^{(l)}(\tau_1) = [E_l \times C^{(l)}(\tau_1)] - [H_{l-1} \times C^{(l)}(\tau_1)] = \\ = E_l \times C^{(l)}(\tau_1) \neq 0.\end{aligned}\right. \tag{44}$$

$$\left\{\begin{aligned}L \times \overline{(G(1)} - L) \supset E \times \overline{(G(1)} - L) \supset (E_l - H_{l-1}) \times \\ \times \overline{(G(1)} - L) \supset (E_l - H_{l-1}) \times C^{(l)}(\tau_1) \neq 0\end{aligned}\right. \tag{45}$$

ce qui est absurde. Donc:

$$\overline{(G(1)} - L) \times H(\tau_1) = 0 \tag{46}$$

$$L \supset H(\tau_1) \tag{47}$$

c. à d. tout G_δ contenant E contient un certain $H(\tau)$, avec $\tau \subset Q$, donc $\tau > 0$.

Un $H(\tau)$ est de dimension n, pour $\tau > 0$. Donc: tout G_δ contenant E est de dimension n au moins.

11. D'après un théorème de M. Tumarkin tout ensemble de dimension q peut être enfermé dans un G_δ de dimension q également [1]).

[1]) L. Tumarkin: Zur allgemeinen Dimensionstheorie. Proc. Akad. Amsterdam Vol. XXVIII, p 996, Théorème VI.

Il s'ensuit donc que la dimension de E est $\geqq n$. Comme E est non-dense dans R_{n+1} non aura:

$$\dim E = n. \tag{48}$$

12. Posons:

$$K_r = \sum_{k=1}^{r} (E_k - H_{k-1}). \tag{49}$$

On a:

$$E = \sum_{r=1}^{\infty} K_r, \tag{50}$$

$$E \times \overline{K}_r \subset K_r + \sum_{k=r+1}^{\infty} \overline{K}_r \times (E_k - H_{k-1}), \tag{51}$$

$$\overline{K}_r \subset \sum_{k=1}^{r} \overline{E}_k \subset \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_k = \sum_{k=1}^{r} H_k = H_r \tag{52}$$

car H_k est fermé et on a (24). Donc:

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \overline{K}_r \times (E_k - H_{k-1}) \subset \sum_{k=r+1}^{\infty} H_r \times (E_k - H_r) = 0, \tag{53}$$

$$E \times \overline{K}_r = K_r \tag{54}$$

c. à d. K_r est fermé (rel. E). Donc d'après un théorème de Tumarkin [1])

$$n = \dim E = \text{maximum} \dim K_r \qquad r = 1, 2 \ldots \tag{55}$$

Soit r_1 le premier indice tel que:

$$\dim K_{r_1} = n. \tag{56}$$

K_{r_1} est l'ensemble cherché; en effet c'est un G_δ (comme ensemble somme d'un nombre fini d'ensembles G_δ); il est separé entre tout couple de ses points, en vertu de $K_{r_1} \subset E$ et de 9; enfin il est de dimension n.

[1]) l. c. p. 995, Théorème IV.

Warszawa; 14/1 1927.