les supprimant, que dans les intervalles restants $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{2^n-1}^{(n)}$ la fonction $\varphi(x)$ prend toutes ses valeurs, de 0 jusqu'à $|E| > 0$. Or, la fonction nouvelle $f(x)$ admet ces mêmes valeurs, lorsque x varie dans les intervalles $d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, \ldots, d_{2^n-1}^{(n)}$ du système $D^{(n)}$. Donc $|D_y^{(n)}| = |E|$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, tandis que $|D^{(n)}|$ tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{n}$, c. q. f. d.

Leningrad, 3. X. 1926.

Sur les continus indécomposables

par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. On sait que l'ensemble de composants d'un continu indécomposable est non dénombrable[1]. Le but de cette Note est de démontrer un résultat plus précis:

Théorème: *L'ensemble de composants d'un continu indécomposable situé dans un espace $\mathfrak{E}$ métrique et compact a la puissance du continu.* C'est le cas en particulier, pour les continus bornés de l'espace Euclidien. Soit C le continu donné; x etant un point de C, $\mathfrak{P}(x)$ désignéra le composant de C contenant x. Je vais prouver l'existence d'un ensemble parfait Z dont tous deux points appartiennent à deux composants différents de C.

2. Lemme: Soit A un sous-ensemble fermé de C, $U(A)$ l'ensemble de tous les points y de A tels que:

$$A\mathfrak{P}(y) = y \tag{1}$$

alors $U(A)$ est un ensemble G_δ (ou ce qui revient au même, $A - U(A)$ est un F_σ).

Démonstration. $\mathfrak{E}$ contient un ensemble dénombrable D dense par rapport à $\mathfrak{E}$ Rangeons en une suite infinie toutes les sphères[2] dont le rayon est rationnel, dont le centre est un point de D et qui contiennent de points de C. Soit:

$$\{Q_n\} \tag{2}$$

cette suite. Désignons par A_{ik} l'ensemble de tous les points z de A,

[1]) Janiszewski-Kuratowski, Fund. Math. I, p. 218—219.

[2]) Sphère = ensemble de points dont la distance du centre est inférieure au rayon.

assujettis à la condition suivante: il existe dans A un point z_1 tel que:

$$(\alpha_1)\quad \varrho(z, z_1) \geqq \frac{1}{k}$$

(α_2) $C - Q_i$ contient un continu contenant z et z_1.

Je dis que l'on a:

$$A - U(A) = \sum_{i,k=1}^{\infty} A_{ik}.$$

D'abord il est évident, que pour tout couple d'entiers positifs i, k $A_{ik} \subset A - U(A)$. Il suffit donc de démontrer que

(4) $$A - U(A) \subset \sum_{i,k=1}^{\infty} A_{ik}.$$

Soit v un point de $A - U(A)$. D'après la définition de $U(A)$ il existe un point $v_1 \neq v$ tel que

(5) $$v_1 \subset A\mathfrak{P}(v).$$

D'après (5) et la signification de $\mathfrak{P}(v)$ il existe un C_1, vrai sous-continu de C contenant $v + v_1$. Soit v_2 un point de $C - C_1$, on a $\varrho(v_2, C_1) > 0$. Soit v_3 un point de D tel que $\varrho(v_2, v_3) < \frac{1}{4}\varrho(v_2, C_1)$, ϱ_1 un nombre rationnel tel que $\varrho(v_2 v_3) < \varrho_1 < \frac{1}{2}\varrho(v_2, C_1)$. La sphère de centre v_3 et de rayon ϱ_1 contient le point v_2, elle fait donc partie de la suite (2). Soit i_1 son indice. D'autre part, soit k_1 un entier supérieur à $\frac{1}{\varrho(v, v_1)}$. On aura:

(α_1) $$\varrho(v, v_1) \geqq \frac{1}{k_1}$$

(α_2) $C - Q_{i_1}$ contient le continu C_1 contenant v et v_1. Donc v et contenu dans $A_{i_1 k_1}$. La relation (4) est ainsi démontrée.

Je dis que A_{ik} est fermé (ce qui démontre le lemme).

Soit $z_l \subset A_{ik}$, $\lim\limits_{l=\infty} z_l = z_0$. Pour tout entier positif l il existe un point z_l' de A tel que: (α_1) $\varrho(z_l, z_l') \geqq \frac{1}{k}$; (α_2) $C - Q_i$ contient un continu T_l contenant $z_l + z_l'$. Soit K l'ensemble d'accumulation de la suite $\{T_l\}$, z_0' — un point d'accumulation de la suite $\{z_l'\}$. L'ensemble limite de la suite $\{T_l\}$ n'est pas vide (il contient z_0) donc K est un continu [1]), contenant z_0 et z_0' et contenu dans $C - Q_i$, car ce dernier ensemble est fermé et contient tous les T_l. A étant fermé, z_0' est un point de A. enfin (α_1) entraîne $\varrho(z_0, z_0') \geqq \frac{1}{k}$. Donc $z_0 \subset A_{ik}$ c. q. f. d.

[1]) Janiszewski: Thèse p. 19—20, Hausdorff: Grundzuge der Mengenlehre p. 302.

3. C content une infinité de composants dont chacun est dense par rapport à C [1]). On peut dont déterminer une suite de points de C:

(6) $$\{x_n\}$$

dense par rapport à C et telle que pour $n \neq m$: $\mathfrak{P}(x_n) \neq \mathfrak{P}(x_m)$, ce qui entraîne

(7) $$\mathfrak{P}(x_n)\,\mathfrak{P}(x_m) = 0.$$

4. $\mathfrak{P}(x)$ est un F_σ, il en est donc de même pour $\mathfrak{P}(x) - x$. Donc pour chaque entier positif n on peut fixer une décomposition:

(8) $$\mathfrak{P}(x_n) - x_n = \sum_{r=1}^{\infty} P_{nr}$$

les P_{nr} désignant des ensembles fermés et tels que

(9) $$P_{n,r} \subset P_{n,r+1}.$$

5. D'après (7) et (8) on a, quel que soient les entiers positifs l, n, r:

(10) $$\varrho(x_l, P_{n,r}) > 0.$$

6. T étant un ensemble arbitraire, ε un nomere positif, $S(T, \varepsilon)$ désignera l'ensemble de tous les points y pour lesquels $\varrho(y, T) < \varepsilon$.

7. Nous allons extraire de (6) une suite partielle:

(11) $$\{x_{n_k}\}$$

et former en même temps une suite de domaines: $\{G_l\}$ de manière suivante:

I. Posons:

(12) $$x_{n_1} = x_1;\quad G_1 = S(P_{11}, \tfrac{1}{2}\varrho(x_1, P_{11}))$$

le nombre $\varrho(x_1, P_{11})$ étant positif d'après **5**. On aura:

(13) $$\varrho(x_{n_1}, G_1) > 0.$$

II. Supposons determinés les points x_{n_k} pour $k = 1, 2 \dots 2^{l-1}$ et les domaines G_i pour $i = 1, 2 \dots l$. Supposons de plus que l'on a:

[1]) Janiszewski-Kuratowski l. c. p. 221.

$$(14)\qquad \left(\sum_{k=1}^{2^{l-1}} x_{n_k}\right) \times \left(\overline{\sum_{i=1}^{l} G_i}\right) = 0$$

ce qui entraîne:

$$\varrho_l = \varrho\left(\sum_{k=1}^{2^{l-1}} x_{n_k}, \overline{\sum_{i=1}^{l} G_i}\right) > 0.$$

Pour $s = 2^{l-1} + 1, \ldots 2^l$, — x_{n_s} sera le premier point de la suite (6) différent de x_{n_k} $(k = 1, 2 \ldots s-1)$ et contenu dans la sphère $S\left(x_{n_{s-2^{l-1}}}, \frac{1}{2^l}\varrho_l\right)$. Un tel point existe toujours, la suite (6) étant dense par rapport à C. On voit que:

$$(15)\qquad \left(\sum_{s=2^{l-1}+1}^{2^l} x_{n_s}\right) \times \left(\overline{\sum_{i=1}^{l} G_i}\right) = 0$$

donc, en tenant compte de (14):

$$(16)\qquad \left(\sum_{k=1}^{2^l} x_{n_k}\right) \times \left(\overline{\sum_{i=1}^{l} G_i}\right) = 0$$

d'après **5** on aura:

$$(17)\qquad \varrho'_l = \varrho\left(\sum_{k=1}^{2^l} x_{n_k}, \sum_{r=1}^{l+1} P_{r,l+1}\right) > 0.$$

Nous poserons:

$$(18)\qquad G_{l+1} = S\left(\sum_{r=1}^{l+1} P_{r,l+1}, \tfrac{1}{2}\varrho'_l\right).$$

En vertu de cette définition:

$$(19)\qquad \overline{G_{l+1}} \times \sum_{k=1}^{2^l} x_{n_k} = 0$$

donc, en tenant compte de (16):

$$(20)\qquad \left(\sum_{k=1}^{2^l} x_{n_k}\right) \times \left(\overline{\sum_{i=1}^{l+1} G_i}\right) = 0$$

c.-à.-d. on voit que la condition (14) est remplie si on remplace l par $l+1$.

8. Posons:

$$(21)\qquad B = C - \sum_{i=1}^{\infty} G_i$$

les G_i étant des domaines. — B est un ensemble fermé.

9. Désignons par M l'ensemble de points de la suite (11). Comme la relation (14) a lieu pour tout entier positif l, on aura:

$$(22)\qquad M \times \sum_{i=1}^{\infty} G_i \doteq 0$$

donc:

$$(23)\qquad M \subset B.$$

10. D'après la définition de G_l et la relation (9) on aura, quel que soient les entiers positifs r, s:

$$(24)\qquad P_{r,s} \subset P_{r,r+s} \subset G_{r+s} \subset \sum_{i=1}^{\infty} G_i$$

donc:

$$(25)\qquad \mathfrak{P}(x_r) - x_r = \sum_{s=1}^{\infty} P_{r,s} \subset \sum_{i=1}^{\infty} G_i$$

$$(27)\qquad B \times (\mathfrak{P}(x_r) - x_r) = 0$$

c.-à-d. tout point (6) contenu dans B est un point de $U(B)$. Donc, d'après (23):

$$(28)\qquad U(B) \supset M.$$

11. Je dis que M est dense en soi.

Considérons un point x_{n_q} de M et un nombre $\eta > 0$ arbitraire; il suffit de demontrer que la spère $S(x_{n_q}, \eta)$ contient un point de M différent de x_{n_q}. Soit δ le diamétre de C; déterminons un entier positif l tel que

$$(29)\qquad 2^{l-1} > 0; \quad 2^l > \frac{\delta}{\eta}.$$

D'après **7**, II on a:

$$(30)\qquad x_{n_{q+2^{l-1}}} \subset S(x_{n_q}, \tfrac{1}{2^l}\varrho_l) \subset S(x_{n_q}, \eta)$$

car en vertu de (29), (14[a])

$$\frac{1}{2^l}\varrho_l \leqq \frac{1}{2^l}\delta < \eta. \tag{31}$$

12. D'après **2** $U(B)$ est un G_δ, d'après (18) et **11** c'est un G_δ à noyau (Kern)[1]) non nul. Donc d'après un théorème de Young[2]) $U(B)$ contient un sous-ensemble parfait Z. Deux points différents de Z étant situés sur deux composants différents de C (en vertu de la définition de $U(B)$ on voit que l'ensemble de composants de C est de la puissance du continu, c. q. f. d.

[1]) Hausdorff, l. c. p. 226.
[2]) l. c. p. 319.

Varsovie 6. I. 1927.

Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de *démontrer pour tout entier positif n l'existence d'un ensemble G_δ de dimension n, separé entre tout couple de ses points.* Ce résultat donne la solution (d'ailleurs la plus avantageuse au point de vue de la notion de classe) des problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn[1]). Pour $n=1$, une solution a été donné par M. Sierpiński[2]).

2. Je vais désigner par R_m l'espace euclidien à m dimensions; nous supposons fixé dans R_m $(m=1,2\ldots)$ un système de coordonnées cartesiennes x étant un point de R_m, ξ un nombre réel, nous désignerons par $[x,\xi]$ le point du R_{m+1} dont les m premières coordonnées coïncident avec celles de x, et la $m+1^{\text{ème}}$ est égale à ξ.

3. Soit E un ensemble linéaire, fermé et borné. La fonction $x(\tau)$ definie pour $\tau \subset E$ sera appellée m-dimensionnelle si $x(\tau)\subset R_m$. L'ensemble:

$$\sum_{\tau \subset E} [x(\tau), \tau] \tag{1}$$

sera apellé l'image $m+1$-dimensionnelle de $x(\tau)$.

4. Lemme. L'image $m+1$-dimensionnelle d'une fonction m-dimensionnelle $x(\tau)$ de classe 1 est un G_δ.

Ce résultat à été démontré pour $m=1$ par M. Sierpiński[3]). La démonstration pour m quelconque se trouve implicite dans un

[1]) Fund. Math. VIII, p. 324.
[2]) Fund. Math. II, p. 81—88.
[3]) C. R. t. 170, p. 919 et Fund. Math. II, p. 74—80.