Sur un problème de M. Banach.

Par

Gr. Fichtenholz (Leningrad).

(Extrait d'une lettre adressée à M. W. Sierpiński).

Les considérations suivantes concernent une question se rattachant aux recherches de M. Banach „*Sur une classe de fonctions continues*"[1]. En conservant les notations de cet article ($|E|$ désigne la mesure extérieure de l'ensemble E; E_y désigne l'ensemble de valeurs que la fonction y de x, admet lorsque x varie dans l'ensemble E), voici les énoncés de deux propriétés importantes qu'on imposait là aux fonctions continues:

Condition *(N)*: si $|E|=0$, on a toujours $|E_y|=0$;

Condition *(S)*: à chaque nombre $\varepsilon>0$ correspond un nombre $\eta>0$ de manière que $|E|<\eta$ entraîne $|E|<\varepsilon$.

„On voit de suite — dit M. Banach (loc. cit., p. 167) — que la propriété (S) implique la propriété (N). La question réciproque ne paraît pas être résolue". Je vais construire un exemple très simple qui résout cette question par négative.

Soit E un ensemble parfait, non dense et de mesure $|E|$ *non-nulle*. On peut supposer de plus que toute portion $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{E}}$ de E, c'est-à-dire la partie de E contenue entre les points α et β, est aussi de mesure non-nulle, pourvu qu'elle ne soit pas vide. Partageons, comme d'habitude, tous les intervalles contigus à E en systèmes $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(n)}, \ldots$ d'intervalles de la manière suivante. Le premier système $D^{(1)}$ se compose d'un seul intervalle $d_1^{(1)}$ (le plus grand

[1]) *Fundamenta Mathematicae*, t. VIII (1926).

possible). Après l'avoir supprimé de l'intervalle $(a,b)=\delta_1^{(1)}$, a et b désignant respectivement la borne inférieure et supérieure de l'ensemble E, dans chacun des deux intervalles restants, $\delta_1^{(2)}$, $\delta_2^{(2)}$, nous choisissons de nouveau un intervalle contigu, resp., $d_1^{(2)}$ et $d_2^{(2)}$; ces intervalles forment le second système $D^{(2)}$, et ainsi de suite. En général, après avoir supprimé les $2^{n-1}-1$ intervalles de $n-1$ systèmes $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(n-1)}$ déjà construits, dans chacun des 2^{n-1} intervalles restants $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{2^{n-1}}^{(n)}$ nous choisissons un intervalle contigu (le plus grand possible) que nous désignons resp. par $d_1^{(n)}$, $d_2^{(n)}, \ldots, d_{2^{n-1}}^{(n)}$; ces intervalles constituent le n-ième système $D^{(n)}$.

Définissons la fonction auxiliaire $\varphi(x)$, en posant $\varphi(x)=\left|\overset{x}{\underset{0}{E}}\right|$. Cette fonction ne décroît jamais, les intervalles contigus à E étant ses intervalles de stationnement. De plus elle est absolument continue et par conséquent jouit à fortiori de la propriété (N). C'est en modifiant convenablement les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ dans les intervalles contigus à E que je parviens à la fonction cherchée $f(x)$.

Posons maintenant $f(x)=\varphi(x)$ aux points de E. Dans un intervalle $d_i^{(n)}$ contigu à E nous définissons $f(x)$ de manière qu'elle y prenne toutes les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ admet dans l'intervalle $\delta_i^{(n)}$. Notamment, si h et g sont, resp. la plus petite et la plus grande de ces valeurs-ci et k est la valeur constante de $\varphi(x)$ dans l'intervalle $d_i^{(n)}$ $(h<k<g)$, nous supposons que la fonction $f(x)$ dans $d_i^{(n)}$, se compose de trois fonctions linéaires: l'une-croissante de la valeur k (qu'elle admet à l'extrémité inférieure de l'intervalle $d_i^{(n)}$) jusqu'à g, la seconde — décroissante de g jusqu'à h, et la troisième — croissante de h jusqu'à k.

Il est facile de voir que la fonction $f(x)$ ainsi construite ne cesse pas d'être continue. Elle possède bien la propriété (N) aussi. En effet, cette condition est évidemment vérifiée dans E, où $f(x)=$ $=\varphi(x)$, ainsi que dans chacun des intervalles contigus à E; or, la propriété (N) est telle qu'étant réalisée dans quelques ensembles (en nombre fini ou en infinité dénombrable) séparément, elle a lieu dans l'ensemble-somme aussi.

En même temps la condition (S) n'est point remplie pour cette fonction $f(x)$. Car, les intervalles des systèmes $D^{(1)}, \ldots, D^{(n-1)}$ étant des intervalles de stationnement de la fonction $\varphi(x)$, on voit, en les supprimant, que dans les intervalles restants $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \dots, \delta_{2^n-1}^{(n)}$ la fonction $\varphi(x)$ prend toutes ses valeurs, de 0 jusqu'à $|E|>0$. Or, la fonction nouvelle $f(x)$ admet ces mêmes valeurs, lorsque x varie dans les intervalles $d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, \dots, d_{2^n-1}^{(n)}$ du système $D^{(n)}$. Donc $|D_y^{(n)}| = |E|$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, tandis que $|D^{(n)}|$ tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{n}$, c. q. f. d.

Leningrad, 3. X. 1926.

Sur les continus indécomposables

par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. On sait que l'ensemble de composants d'un continu indécomposable est non dénombrable [1]). Le but de cette Note est de démontrer un résultat plus précis:

Théorème: *L'ensemble de composants d'un continu indécomposable situé dans un espace $\mathfrak{E}$ métrique et compact a la puissance du continu.* C'est le cas en particulier, pour les continus bornés de l'espace Euclidien. Soit C le continu donné; x etant un point de C, $\mathfrak{P}(x)$ désignéra le composant de C contenant x. Je vais prouver l'existence d'un ensemble parfait Z dont tous deux points appartiennent à deux composants différents de C.

2. Lemme: Soit A un sous-ensemble fermé de C, $U(A)$ l'ensemble de tous les points y de A tels que:

$$A\,\mathfrak{P}(y) = y \tag{1}$$

alors $U(A)$ est un ensemble G_δ (ou ce qui revient au même, $A - U(A)$ est un F_σ).

Démonstration. $\mathfrak{E}$ contient un ensemble dénombrable D dense par rapport à $\mathfrak{E}$ Rangeons en une suite infinie toutes les sphères [2]) dont le rayon est rationnel, dont le centre est un point de D et qui contiennent de points de C. Soit:

$$\{Q_n\} \tag{2}$$

cette suite. Désignons par A_{ik} l'ensemble de tous les points z de A,

[1]) Janiszewski-Kuratowski, Fund. Math. I, p. 218—219.

[2]) Sphère = ensemble de points dont la distance du centre est inférieure au rayon.