Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points.

Par

B r o n i s ł a w K n a s t e r (Varsovie).

Je me propose de démontrer dans cette Note le théorème suivant qui constitue une solution complète du problème traité par M. L. V i e t o r i s dans son ouvrage *Stetige Mengen* (Thèse, Monatshefte für Math. und Phys. XXXI, Wien 1921), p. 198—202:

(τ) *Pour qu'un continu C borné et irréductible entre deux points contienne un ensemble connexe L irréductible entre ces points, il faut et il suffit que tout sous-continu de C qui n'est pas son continu de condensation soit décomposable* [1]).

La démonstration sera rédigée en termes: (1°) de la Théorie des continus irréductibles entre deux points donnée par M. K u r a t o w s k i [2]) et (2°) de celle des ensembles connexes donnée par nous deux [3]).

J'en rappellerai d'abord certaines définitions et théorèmes fondamentaux, pour en déduire ensuite quelques lemmes déstinés à intervenir dans la démonstration du théorème.

La marche de la démonstration est la suivante: je démontre d'abord que la condition proposée est n é c e s s a i r e. Lorsqu'un ensemble connexe et irréductible entre deux points est *dense* dans un continu, ce dernier est décomposable. Or, si un sous-continu K d'un continu C irréductible entre a et b n'en est pas un continu de con-

[1]) Cet énoncé ne s'applique qu'aux continus bornés, car la condition considérée, t o u t e n r e s t a n t n é c e s s a i r e l o r s q u e C e s t n o n-b o r n é, cesse d'être suffisante dans ce dernier cas (v. p. 888 de cette Note).

[2]) Fund. Math. III, p. 200 et X p. 225.

[3]) Fund. Math. II, p. 206.

densation, la partie commune de K et du sous-ensemble L de C connexe est irréductible entre ces points est, dans certaines circonstances (dont l'absence seule suffit pour rendre K décomposable), *dense* dans K et constitue elle-même un ensemble connexe irréductible entre deux points. Le sous-continu K de C est par conséquent décomposable dans tous les cas, ce qui prouve que la condition proposée est nécessaire.

Je prouve ensuite qu'elle est en même temps s u f f i s a n t e pour que le continu C renferme un ensemble L connexe irréductible entre a et b. A ce but, j'envisage de plus près la structure du continu C. Elle présente dans le cas où C satisfait à la condition du théorème, une *stratification* particulière permettant de diviser ce continu en continus de condensation [1]) saturés [2]), dites „tranches", disjoints et ordonnés linéairement. En les désignant par T_x, la décomposition considérée de C satisfait donc aux conditions suivantes:

(α) $$0 \leq x \leq 1,$$

(β) *l'égalité* $\underset{n=\infty}{\mathit{lim}}\, x_n = x$ *entraîne l'inclusion* $\mathit{Lim}.\underset{n=\infty}{\mathit{sup}}.\, T_{x_n} \subset T_x$ [3]),

(γ) T_x *est non-dense dans* C (en symboles $C = \overline{C - T_x}$),

(δ) T_x *est un continu* (qui peut d'ailleurs se réduire à un point),

où $a \,\varepsilon\, T_0$ et $b \,\varepsilon\, T_1$.

Or, toute décomposition d'un ensemble fermé en sous-ensembles fermés disjoints T_x qui satisfait à la condition (α) est dite *linéaire*; d'autre part, toute décomposition qui remplit la condition (β) est connue sous le nom de décomposition *semi-continue* [4]).

Ainsi la démonstration de la seconde partie du théorème (τ) se ramène comme cas particulier au théorème général suivant, relatif à la décomposition linéaire semi-continue des continus quelconques:

(η) *Étant donnée une décomposition linéaire et semi-continue d'un continu borné arbitraire Q* (irréductible ou non) *en continus de con-*

[1]) Un continu K est dit *continu de condensation* d'un ensemble E, lorsqu'il est *ensemble-frontière* dans E (c'est-à-dire, lorsqu'on a $E = \overline{E - K}$). Ensemble frontière et fermé est dit *non-dense*.

[2]) Un ensemble à propriété P est dit *saturé* (relativement à cette propriété), s'il coïncide avec tout ensemble à propriété P qui le contient.

[3]) $\mathit{Lim}.\underset{n=\infty}{\mathit{sup}}.\, E_n$ désigne l'ensemble de tous les points $p = \underset{n=\infty}{\mathit{lim}}\, p_n$ où $p_n \,\varepsilon\, E_n$.

[4]) Cf. R. L. M o o r e, *Concerning upper semi-continuous collections of continua*, Transactions of the American Mathem. Soc. Vol. 27, p. 416.

densation disjoints T_x, il existe dans Q un ensemble connexe L ne contenant qu'un seul point de tout T_x.

Les points $a \varepsilon T_0$ et $b \varepsilon T_1$ étant donnés d'avance, il est à fortiori irréductible entre ces points.

Le raisonnement que j'emploie pour établir ce dernier théorème peut être resumé comme suit. Soient pour tout $0 < x < 1$: $R_x = \overline{\sum_{u<x} T_u}$ et $S_x = \overline{\sum_{v>x} T_v}$. On a alors: $R_x + S_x = Q$, $R_x S_x \subset T_x$ et tout $R_x S_x$ divise Q en deux ensembles séparés [1]) dont l'un contient T_0 et l'autre T_1.

Je montre que tout ensemble fermé F qui coupe Q en deux ensembles séparés, sans contenir aucun produit $R_x S_x$, en traverse nécessairement une infinité de puissance du continu. A chacun de tels ensembles fermés F je fais ensuite correspondre d'une façon biunivoque [2]) un des produits $R_x S_x$ qu'il traverse. Il peut arriver d'ailleurs qu'un certain lot de ces produits ne soient pas interessés par cette correspondance.

Ceci établi, je procède à la construction de l'ensemble L, en y faisant entrer un point arbitraire pris sur l'intersection de tout ensemble F avec le produit $R_x S_x$ qui lui correspond, un point arbitrairement choisi sur chacun des produits qui ne correspondent à aucun F et enfin un point quelconque de T_0 et de T_1, que je désigne respectivement par a et b.

L'ensemble L ainsi formé contient donc en tous cas un point de tout ensemble fermé qui coupe Q en deux ensembles séparés, soit parce que cet ensemble fermé renferme un $R_x S_x$ tout entier, soit parce qu'il traverse une infinité indénombrable de ces produits. Il en résulte que L est un ensemble connexe unissant a et b. Or, L ne contenant, d'autre part, qu'un seul point par $R_x S_x$ et tout $R_x S_x$ faisant dans Q une coupure entre a et b, il est impossible d'enlever de L aucun point (distinct de a et b), sans en compromettre la connexité. L est donc un ensemble connexe irréductible entre a et b.

La fin de la Note sera consacrée au cas du continu C non-borné et à quelques remarques concernant la puissance de diverses familles d'ensembles connexes irréductibles L situés dans un même continu C.

[1]) Deux ensembles M et N sont dits *séparés*, lorsque $M\bar{N} + \bar{M}N = 0$.

[2]) moyennant le théorème de M. Zermelo; le problème de donner une démonstration sans cette application du *„Wohlordnungssatz"* reste donc ouvert.

1. Définitions et théorèmes généraux.

(1) Un ensemble C est dit continu *irréductible entre les points a et b*, lorsque l'inclusion $(a) + (b) \subset K \subset C$ équivaut à l'égalité $K = C$ pour tout *continu* K.

D'une façon analogue

(2) Un ensemble L est dit *connexe irréductible entre a et b* [1]), lorsque l'inclusion $(a) + (b) \subset K \subset L$ équivaut à l'égalité $K = L$ pour tout *ensemble connexe* K.

(3) $I(a, C)$ désignant d'une façon générale l'ensemble des points tels que le continu C est irréductible entre a et chacun d'eux, on a par définition:

$$(a) \subset I(b, C) \quad \text{et} \quad (b) \subset I(a, C).$$

Or, en cas d'ensembles $I(a, L)$ et $I(b, L)$, définis d'une manière analogue pour les ensembles L connexes et irréductibles entre a et b, ces inclusions deviennent égalités:

$$(a) = I(b, L) \quad \text{et} \quad (b) = I(a, L)\ ^{2}).$$

(4) Un continu K est dit *sous-continu régulier* d'un continu Q, lorsque $K \subset \overline{Q - \overline{Q - K}}$ (on a dans ce cas $K = \overline{Q - \overline{Q - K}}$).

Etant donné un sous-continu arbitraire (régulier ou non) K d'un continu irréductible C, l'ensemble $\overline{C - K}$ est toujours somme de deux sous-continus réguliers de C (dont l'un ou même les deux peuvent d'ailleurs se réduire à l'ensemble vide).

En général, K étant un sous-continu régulier de C, on a la *décomposition de C en trois sous-continus réguliers*:

(5) $$C = A + K + B$$

(à moins que l'on n'ait l'une ou les deux des égalités: $A = 0$ et $B = 0$, qui équivalent respectivement aux inclusions: $(a) \subset K$ et $(b) \subset K$), où [3]):

[1]) *„Linienstück"* suivant la dénomination de M. Vietoris (l. c.). La notion même est due à M. N. J. Lennes, American Journal of Math. 33 (1911), p. 308.

[2]) loc. cit. (2°), p. 218, th. XVIII.

[3]) loc. cit. (1°), p. 202—206, th. I—VI.

(6) *A et B sont séparés* (c'est-à-dire $A\bar{B}+\bar{A}B=0$).

(7) *K est un continu irréductible entre tout point de AK et tout point de BK*

et en même temps

(8) *A est un continu irréductible entre tout point de $I(b,C)$ et tout point de AK et B l'est entre tout point de BK et tout point de $I(a,C)$.*

En signes, on a donc d'après les inclusions (3):

$$AK=I(a,A) \quad \text{et} \quad BK=I(b,B).$$

Lorsque tout sous-continu régulier K de C est irréductible entre *un seul* couple de points, C est un *arc simple* [1]) et il l'est seulement dans ce cas.

(9) Tout continu *indécomposable* [2]) situé dans un continu irréductible C est n'en étant pas un *continu de condensation* est un sous-continu régulier de C [3]).

(10) La classe $\mathfrak{R}(a,C)$ de tous les sous-continus réguliers de C qui contiennent le point a est *croissante.* En y faisant entrer l'ensemble vide 0 et le continu C lui-même, son *type d'ordre n'admet pas de lacunes, mais peut admettre tout au plus une infinité dénombrable de sauts, chaque saut correspondant d'une façon biunivoque à un sous-continu régulier indécomposable* [4]).

On en conclut en vertu de (9) que

(11) *la propriété de la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ d'être de type d'ordre λ* (c'est-à-dire, de celui du continu linéaire) et *la condition du théorème* (τ), d'après laquelle C ne contient aucun continu indécomposable qui n'en soit pas un continu de condensation, *sont équivalentes.*

Dans le cas où C remplit cette condition, désignons les éléments de la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ par R_x et ceux de la classe symétrique $\mathfrak{R}(b,C)$ par S_x, où $0 \leqslant x \leqslant 1$. On a donc par définition les formules suivantes:

[1]) c'est-à-dire image homéomorphe d'un segment rectiligne.

[2]) c'est-à-dire qui n'est pas somme de deux continus différents de lui. K étant un continu indécomposable, on a pour tout point p de K l'égalité $K=\overline{I(p,K)}$ et réciproquement (Z. Janiszewski et C. Kuratowski, *Sur les continus indécomposables.* Fund. Math. I, p. 215, t. IV (II)).

[3]) loc. cit. (1°), Fund. Math. III, p. 210, th. XII.

[4]) loc. cit. (1°), ibid., p. 207—217.

(12) $$C=R_x+S_x,$$

(13) $$\overline{C-R_x}=S_x \quad \text{et} \quad \overline{C-S_x}=R_x,$$

et selon (7) et (8), en posant $A=R_x$, $K=S_x$, $B=0$,

(14) $$R_xS_x=I(a,R_x)\,I(b,S_x),$$

où

$$R_0=S_1=0 \ \text{et} \ R_1=S_0=C \ \text{et lorsque} \ 0<x<1, \ R_xS_x \neq 0.$$

Posons:

(15) $$T_x=I(a,R_x)+I(b,S_x).$$

On montre que les ensembles T_x ainsi définis sont *disjoints, fermés* et donnent l'égalité

(16) $$C=\sum_{0\leq x\leq 1} T_x.$$

De plus

(17) Tout T_x est *non-dense* dans C et, *lorsque C est borné, tout T_x est un continu* (donc un continu de condensation).

Ainsi la structure stratifiée que présentent les continus irréductibles bornés C de type d'ordre λ, lorsqu'on en considère comme „couches" ou *tranches* les ensembles T_x définis par la formule (15) [1]), constitue une *décomposition linéaire et semi-continue de C en continus de condensation*: elle satisfait donc aux conditions (α)—(δ), formulées page 277.

On montre aussi que

(18) $$R_x=\sum_{u\lhd x} T_u+I(a,R_x)=\overline{\sum_{u\lhd x} T_u}$$

$$\text{et} \quad S_x=\sum_{v\rhd x} T_v+I(b,S_x)=\overline{\sum_{v\rhd x} T_v} \ ^{2)}.$$

[1]) Lorsque le continu irréductible C est borné et son type d'ordre est λ, sa *„stratification"* ou *„décomposition en tranches"* au sens de M. Kuratowski coïncide avec la notion de *„Schichtung"* de M. Vietoris. Les termes „Schichte" et „tranche" désignent dans ce cas la même chose. M. W. A. Wilson emploie dans son Mémoire récent *„On the structure of a continuum limited and irreducible between two points"* (Amer. Journ. of Math. XLVIII, 1926) dans le même cas le terme *„complete oscillatory set"*.

[2]) loc. cit. (1°), Fund. Math. X, p. 252, lemme 1.

Il est à remarquer que dans un continu irréductible borné du type d'ordre λ toute tranche est un continu de condensation *saturé* et réciproquement, de sorte que l'on peut définir dans ce cas les tranches comme continus de condensation saturés. Dans un arc simple, et seulement dans lui, chaque tranche se réduit à un point.

Parmi les autres propriétés des continus irréductibles bornés de type λ, sont à signaler en premier lieu celles qui résultent des conditions (α)—(δ).

Considérons donc, d'une façon générale, un continu quelconque Q (irréductible ou non) décomposé en tranches T_x de manière que ces conditions soient réalisées. Posons par définition:

(19) $$R_x = \overline{\sum_{u \lhd x} T_u} \quad \textit{et} \quad S_x = \overline{\sum_{v \rhd x} T_v}$$

pour avoir des ensembles R_x et S_x analogues à ceux de la formule (18). Les égalités (12) et (13) sont alors également satisfaites pour le continu Q et, toutes deux tranches étant par définition disjointes, on a d'après (α), (β) et (19):

(20) $$R_x S_x \subset T_x,$$

quel que soit $0 \leqslant x \leqslant 1$, en outre

(21) $$Q - T_x = (R_x - T_x) + (S_x - T_x) = \sum_{u \lhd x} T_u + \sum_{v \rhd x} T_v$$

(22) $$Q - R_x S_x = (R_x - S_x) + (S_x - R_x),$$

où.

(23) les sommandes du membre droit de la décomposition (21) sont des *semicontinus séparés* [1]), et ceux de la décomposition (22) sont des *ensembles connexes séparés* [2]).

D'ailleurs dans les deux formules (21) et (22) l'un ou l'autre de ces sommandes peut disparaître suivant que $x = 0$ ou $x = 1$ et uniquement dans ces cas.

La condition (γ) donne l'égalité

(24) $$\overline{Q - T_x} = Q,$$

[1]) loc. cit. (1^{0}), ibid., p. 253, lemme 3.

[2]) en vertu du théorème de M. **Hausdorff**, suivant lequel la connexité d'un ensemble arbitraire E entraîne celle de tout ensemble X où $E \subset X \subset \overline{E}$. Or, on a selon (20) et (19): $R_x - T_x \subset R_x - S_x \subset \overline{R_x - T_x}$.

d'où [1])

(25) $$\overline{Q - \sum_{x \in D} T_x} = Q,$$

pour tout ensemble D fini ou dénombrable d'indices.

Désignons une fois pour toutes par H le segment 01 de l'axe des x (le champ des valeurs de l'indice variable x). On montre que

(26) lorsqu'un sous-ensemble U de H est *fermé*, il en est de-même de la somme $\sum_{x \in U} T_x$; de plus, lorsque Q est *borné*, la propositon inverse est aussi vraie.

(27) *Si U est un continu, $\sum_{x \in U} T_x$ l'est aussi* [2]).

Réciproquement: étant donné un ensemble quelconque E, désignons par $i(E)$ l'ensemble d'indices x qui satisfont à l'inégalité $T_x E \neq 0$. On a alors les relations suivantes:

(28) si EQ est fermé et borné, $i(E)$ est fermé.

(29) $$\overline{\sum_{x \in i(E)} T_x} \subset \sum_{x \in \overline{i(E)}} T_x \text{ [3])}$$

et

(30) *si Q est borné, l'égalité* $\overline{\sum_{x \in i(E_1)} T_x} \cdot \sum_{x \in i(E_2)} T_x = 0$ *entraîne l'égalité* $\overline{i(E_1)}\, i(E_2) = 0$.

Pour montrer cette dernière relation, supposons que l'on ait par contre

(*i*) $$\overline{i(E_1)}\, i(E_2) \neq 0 \quad \textit{et} \quad i(E_1)\, i(E_1) = 0,$$

(car si la deuxième égalité était en défaut, on aurait par définition de $i(E)$: $\sum_{x \in i(E_1)} T_x \sum_{x \in i(E_2)} T_x \neq 0$, d'où à plus forte raison $\overline{\sum_{x \in i(E_1)} T_x} \sum_{x \in i(E_2)} T_x \neq 0$, contrairement à l'hypothèse).

[1]) en vertu du théorème de M. **Baire**, d'après lequel la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles non-denses dans un ensemble fermé est un ensemble-frontière dans lui.

[2]) loc. cit. (1^{0}), Fund. Math. X, p. 257, proposition (25).

[3]) loc. cit. (1^{0}), ibid., p. 255, N 12. Cette formule exprime d'une autre manière la *semi-continuité* de la décomposition de Q en ensembles T_x. En y posant $U = i(E)$, on en tire immédiatement la relation (26).

Il existe donc d'après (i) un point p de $\overline{i(E_1)}\, i(E_2)$ et une suite infinie de points p_n de $i(E_1)$ tels que $p = \lim p_n$. Posons $U = \sum_{n=1}^{\infty}(p_n)$ et $V = (p)$. On a par conséquent:

(ii) $$U \subset i(E_1), \quad V \subset i(E_2)$$

et en même temps $\overline{U} = U + V \neq U$, d'où

(iii) $$\sum_{x \varepsilon \overline{U}} T_x = \sum_{x \varepsilon U} T_x + \sum_{x \varepsilon V} T_x$$

et en vertu de la proposition inverse à (26), Q étant borné,

$(iiii)$ $$\overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x} \neq \sum_{x \varepsilon U} T_x.$$

Or, l'identité $\overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x} = \sum_{x \varepsilon \overline{U}} T_x \overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x}$, qui équivaut à l'inclusion (29) pour $U = i(E)$, donne en vertu de (iii):

$$\overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x} = \Big(\sum_{x \varepsilon U} T_x + \sum_{x \varepsilon V} T_x\Big) \overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x} = \sum_{x \varepsilon U} T_x + \overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x} \sum_{x \varepsilon V} T_x$$

d'où en vertu de $(iiii)$: $\overline{\sum_{x \varepsilon U} T_x} \sum_{x \varepsilon V} T_x \neq 0$, ce qui entraîne selon (ii) l'inégalité $\overline{\sum_{x \varepsilon i(E_1)} T_x} \sum_{x \varepsilon i(E_2)} T_x \neq 0$, contrairement à l'hypothèse.

Une tranche T_x de Q est dite *tranche de cohésion*, lorsqu'on a

(31) $$T_x = R_x S_x$$

ou bien lorsque $x = 0$ ou $x = 1$; elle sera dite *tranche d'adhésion* dans le cas contraire.

On montre que

(32) *l'ensemble des tranches d'adhésion dans tout continu est fini ou dénombrable* [1].

Il en résulte en vertu de (25) que l'on a

(33) $$Q = \overline{\sum_{x \varepsilon H - D} R_x S_x}$$

pour tout ensemble dénombrable D contenu dans H.

[1]) ibid., p. 261, th. XIV et note. La somme des tranches d'adhésion peut d'ailleurs être *dense* dans Q (cf. B. Knaster, *Sur quelques problème de Topologie*, exemple $\mathfrak{N}_v$, à paraître).

Voici quelques expressions, équivalentes à (31), pour que T_x soit une tranche de cohésion:

$$R_x = \prod_{v > x} R_v \quad \textit{et en même temps} \quad S_x = \prod_{u < x} S_u$$

ou bien

$$R_x = \sum_{u \leq x} T_u \quad \textit{et en même temps} \quad S_x = \sum_{v \geq x} T_v$$

ou encore, selon (14) et (15) pour un continu irréductible C:

$$I(a, R_x) = I(b, S_x).$$

La structure des ensembles connexes irréductibles entre deux points est beaucoup plus simple. *Les points de ces ensembles se laissent*, en effet, *ordonner linéairement d'une façon continue* (sans sauts ni lacunes) comme ceux d'un arc simple, qui n'est d'ailleurs qu'un ensemble connexe irréductible *fermé*, et réciproquement [1]). En conséquence

(34) *un ensemble L connexe et irréductible entre a et b n'est jamais irréductible entre aucun autre couple de points* [2]).

Tout point p de L détermine d'une façon univoque une décomposition de cet ensemble:

(35) $$L = A(p) + B(p)$$

où

(36) $$A(p)\, B(p) = (p) = \overline{A(p)}\, B(p) + A(p)\, \overline{B(p)}$$

et si $a \neq p \neq b$,

(37) *$A(p)$ est un ensemble connexe irréductible entre a et p et $B(p)$ l'est entre p et b* [3]).

D'une façon générale

(38) *pour que la somme L de deux ensembles A et B dont l'un est connexe irréductible entre a et p et l'autre l'est entre p et b soit un ensemble connexe et irréductible entre a et b, il faut et il suffit que l'on ait $A\overline{B} + \overline{A}B = (p)$* [4]).

[1]) loc. cit. (2°) p. 224, th. XXVII; cf. Lennes, *Curves in Non-metrical Analysis Situs...*, American Journal of Mathem. XXXIII, 1911, p. 308.

[2]) loc. cit. (2°), p. 218, th. XVIII.

[3]) ibid., p. 219, th. XIX.

[4]) ibid., p. 231, cor. XXXIV.

Il n'y a donc pas lieu de considérer des „tranches" dans un ensemble connexe irréductible, chacune d'elle se réduisant à un point, comme sur un arc simple.

Le corollaire suivant du théorème (38) est encore à noter:

(39) *Tout sous-ensemble connexe de L qui est relativement fermé dans L est connexe irréductible entre deux de ses points* [1]).

2. Lemmes.

Je vais établir à présent quelques relations entre un continu C irréductible entre a et b et un ensemble connexe L situé dans C et irréductible entre les mêmes points.

Par suite de l'inclusion $(a+b)\subset L\subset C$ et de la connexité de L, on a d'après (1), en y posant $K=\overline{L}$,

(40) $$\overline{L}=C.$$

Il en résulte que pour toute décomposition (5) de C on a:

(41) $$\overline{LA}=A,\quad \overline{LK}=K \quad \textit{et} \quad \overline{LB}=B.$$

Je vais montrer que

(42) *les ensembles LAK et LBK se réduisent chacun à un point* et que

(43) *les ensembles LA, LK et LB sont connexes et irréductibles respectivement entre a et LAK, entre LAK et LBK et entre LBK et b.*

Envisageons d'abord l'ensemble LA et posons:

(i) $$LA=M+N,$$

où

(ii) $(a)\subset M$ et (iii) $M\overline{N}+\overline{M}N=0$,

Pour établir la connéxité de LA, il suffit donc de montrer que $N=0$.

Or, par suite de l'inclusion $L\subset C$, qui donne selon (5): $LA+(K+B)=L+(K+B)$, l'ensemble $LA+(K+B)$ est connexe comme somme de l'ensemble connexe L et du continu $K+A$, où $b\subset L(K+B)$. Il en résulte d'après (i) et (iii) [2]) que l'ensemble $M+(K+B)$ est connexe, donc, que $\overline{M}+(K+B)$ est un continu. On en conclut en vertu des inclusions (ii) et $b\subset K+B$ et en vertu de la définition (1) que $\overline{M}+(K+B)=C$, d'où $C-(K+B)\subset\overline{M}$ et $\overline{C-(K+B)}\subset\overline{M}$. Comme A est un sous-continu régulier de C, on a d'aqrès (4): $A=\overline{C-(K+B)}$, d'où $A\subset\overline{M}$. Inversement: $\overline{M}\subset A$, car $M\subset A$ en vertu de (i). On a par conséquent $A=\overline{M}$, d'où selon (41): $\overline{LA}=\overline{M}$. Il en résulte d'après (i) que $N\subset\overline{M}$, ce qui n'est possible en raison de (iii) que si $N=0$. La connexité de LA est donc établie.

A étant fermé, LA est relativement fermé dans L. En vertu de (39), LA est par conséquent un ensemble connexe irréductible entre deux points. Déterminons ces points.

Comme $a\subset LA$, on en déduit à l'aide de (34)—(37) l'existence d'un point $p\neq a$ tel que

(iiii) $$LA=A(p).$$

De plus: l'identité $L=LA+LK+LB$, tirée de l'inclusion $L\subset C$ et de (5), donne d'après (iiii): $L=A(p)+(LK+LB)$, d'où $L-A(p)\subset LK+LB$. Selon (35) on a donc $LK+LB\subset B(p)$; en multipliant cette inclusion membre à membre par (iiii), on obtient en vertu de (36): $LAK\subset(p)$. Comme d'autre part les ensembles $A-(K+B)$ et $(K+B)-A$ sont séparés et l'ensemble connexe L en réunit les éléments respectifs a et b, on a $LA(K+B)=LAK\neq 0$, d'où en vertu de l'inclusion précédente $LAK=(p)$.

Cette égalité prouve en vertu de (37) et (iiii) que pour l'ensemble LA les propositions (42) et (43) se trouvent en effet réalisées.

La démonstration que $L(K+B)$ est un ensemble connexe et irréductible entre LAK et b étant symétrique à la précédente, on est amené à en conclure, en posant $C=K+B$, $L=L(K+B)$, $A=K$ et $a=p$, que ces propositions sont également vérifiées pour les ensembles LK et LB, c. q. f. d.

Ceci établi, admettons en particulier que le continu C soit de type d'ordre λ. Les propositions (42) et (43) donnent lieu dans ce cas aux énoncés suivants:

(44) *Pour tout $0\leq x\leq 1$ le produit LT_x (et pour tout $0<x<1$ le produit $LR_x S_x=LT_x$) comprend exactement un point.*

(45) *Pour tout $0<x<1$ l'ensemble LR_x est connexe irréductible entre a et LR_xS_x et l'ensemble LS_x l'est entre LR_xS_x et b.*

1) ibid., p. 221. cor. XXIV.

2) en posant $S=LA+(K+B)$, $T=(K+B)-LA$ et $P=M$ dans le théorème suivant (loc. cit. (2°), p. 210, th. VI):

T étant un sous-ensemble connexe d'un ensemble connexe S, si $S-T$ est somme d'ensembles separés P et Q, les ensembles $T+P$ et $T+Q$ sont connexes.

Les lemmes qui précèdent suffisent pour démontrer la première partie du théorème (τ), à savoir, que la condition proposée est **nécessaire**. *Ils sont valables aussi bien pour les continus C bornés que pour non-bornés.* Je vais établir à présent un lemme qui jouera un rôle fondamental dans la démonstration que la même condition est **suffisante**, ou plus généralement, dans la démonstration du théorème (η). L'hypothèse de compacticité sera ici essentielle.

Soit Q un continu quelconque, décomposé linéairement et d'une façon semi-continue en continus de condensation T_x (conditions (α)—(δ)). On a le lemme suivant:

(46) *Q étant borné, D un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x et E un sous-ensemble de Q satisfaisant à la condition*

(a) $$ER_x S_x \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \varepsilon D,$$

l'ensemble

(b) $$P = E + \sum_{x \varepsilon H-D} T_x$$

est connexe.

Supposons, en effet, que P ne soit pas connexe et envisageons la décomposition de P en deux ensembles séparés:

(c) $$P = M + N,$$

(d) $$M\overline{N} + \overline{M}N = 0$$

(e) $$M \neq 0 \neq N.$$

D'après (c) et (d), tout T_x où $x \varepsilon H-D$ est situé soit entièrement dans M soit entièrement dans N, puisque, en vertu de la condition (δ), T_x est un continu. Désignons par W la somme de premières et par V la somme de secondes de ces tranches. On a donc par définition:

(f) $$W \subset M \quad \text{et} \quad V \subset N$$

(g) $$W + V = \sum_{x \varepsilon H-D} T_x,$$

d'ou

(h) $$i(W) + i(V) = H - D.$$

En vertu de (d) et (f) on a en outre

(i) $$W\overline{V} + \overline{W}V = 0,$$

d'où selon (30), *le continu Q étant borné par hypothèse,*

(j) $$i(W)\overline{i(V)} + \overline{i(W)}\,i(V) = 0.$$

On a enfin:

(k) $$W \neq 0 \neq V$$

et par conséquent

(l) $$i(W) \neq 0 \neq i(V),$$

car, en supposant, par exemple, que $W = 0$, on aurait d'après (f) et (g): $\sum_{x\varepsilon H-D} T_x \subset N$, d'où, en appliquant l'inclusion $P \subset Q$ et la formule (25), on aurait d'après (c): $M \subset P \subset Q = \overline{Q - \sum_{x\varepsilon D} T_x} = \overline{\sum_{x\varepsilon H-D} T_x} \subset \overline{N}$ contrairement à (d) et (e).

Or, l'égalité (j) implique que $\overline{i(W)}\,\overline{i(V)}\,[i(W) + i(V)] = 0$; mais comme $\overline{i(W)}\,\overline{i(V)} \subset H$, il en résulte selon (h) que

(m) $$\overline{i(W)}\,\overline{i(V)} \subset D.$$

Comme ensemble fermé et au plus dénombrable l'ensemble $\overline{i(W)}\,\overline{i(V)}$ est donc *clairsemé*. D'autre part, il n'est pas vide, car en vertu de (l) on a $\overline{i(W)} \neq 0 \neq \overline{i(V)}$ et en vertu de (h)

(n) $$\overline{i(W)} + \overline{i(V)} = \overline{H-D} = H,$$

ce dernier ensemble étant un continu.

Soit donc p un point *isolé* arbitraire de $\overline{i(W)}\,\overline{i(V)}$. On peut admettre que $0 \neq p \neq 1$, car étant donnés deux points

$$p_1 \varepsilon \overline{i(W)} - \overline{i(V)} \quad \text{et} \quad p_2 \varepsilon \overline{i(V)} - \overline{i(W)}$$

distincts de 0 et 1, qui existent en vertu de (j), (l) et (n), le segment G à extrémités p_1 et p_2 contient des points de $\overline{i(W)}\,\overline{i(V)}$: l'inclusion $G \subset H$ donne, en effet, d'après (n): $G = G\overline{i(W)} + G\overline{i(V)}$, d'où $G\overline{i(W)}\,\overline{i(V)} \neq 0$.

Or, p étant distinct des extrémités de H et isolé, il existe sur ce dernier deux segments H_1 et H_2 tels que

(o) $$H_1 H_2 = (p) = (H_1 + H_2)\overline{i(W)}\,\overline{i(V)}.$$

Il en résulte que $H_1 - (p)$, de même que $H_2 - (p)$, ne peut contenir à la fois de points de $i(W)$ et de $i(V)$, car étant donné un ségment arbitraire

$$S \subset H_1 - (p), \tag{p}$$

les inégalités $S\,i(W) \neq 0 \neq S\,i(V)$ et l'identité $S = S\overline{i(W)} + S\overline{i(V)}$, tirée de l'inclusion $S \subset H$ et de (n), entraînent, S étant un continu, l'inégalité $S\,\overline{i(W)}\,\overline{i(V)} \neq 0$, contrairement à (o) et (p).

Admettons donc que $H_1\,i(V) = 0$ et $H_2\,i(W) = 0$.

En vertu de (h) on a par conséquent $H_1 - D \subset i(W)$, d'où $\sum_{x \varepsilon H_1 - D} T_x \subset \sum_{x \varepsilon i(W)} T_x = W$ et

$$\overline{\sum_{x \varepsilon H_1 - D} T_x} \subset \overline{W}. \tag{r}$$

La démonstration de l'inclusion

$$\overline{\sum_{x \varepsilon H_2 - D} T_x} \subset \overline{V} \tag{s}$$

est symétrique.

Or, convenons que H_1 précède H_2 sur H (car on n'aurait en cas contraire que d'échanger les indices) et désignons respectivement par x_1 et x_2 l'extrémité gauche de H_1 et l'extrémité droite de H_2.

On a alors selon (19), (25) et (r):

$$\text{(t)}\quad \left\{ \begin{aligned} R_p &= \overline{\sum_{u \lhd p} T_u} = \overline{\sum_{u \lhd x_1} T_u + \sum_{x \varepsilon H_1 - (p)} T_x - \sum_{x \varepsilon D} T_x} = \\ &= \overline{\sum_{u \lhd x_1} T_u} + \overline{\sum_{x \varepsilon H_1 - D - (p)} T_x} \subset \overline{\sum_{u \lhd x_1} T_u} + \overline{\sum_{x \varepsilon H_1 - D} T_x} \subset \overline{\sum_{u \lhd x_1} T_u} + \overline{W} \end{aligned} \right.$$

et par raison de symétrie:

$$S_p \subset \overline{\sum_{v \rhd x_2} T_v} + \overline{V}. \tag{u}$$

Les ensembles $\overline{\sum_{u \lhd x_1} T_u}$ et $\overline{\sum_{v \rhd x_2} T_v}$ étant en vertu de (21) et (23) séparés comme situés respectivement dans $R_p - T_p$ et $S_p - T_p$, on obtient, en multipliant membre à membre les inclusions (t) et (u): $R_p S_p \subset \overline{W}\,\overline{V}$, d'où selon (a) et (b)

$$P\,\overline{W}\,\overline{V} \neq 0, \tag{v}$$

car $p \varepsilon D$ en vertu de la définition du point p et de l'inclusion (m).

L'inégalité (v) donne d'après (f): $P\,\overline{M}\,\overline{N} \neq 0$, donc selon (c): $(M+N)\,\overline{M}\,\overline{N} \neq 0$, contrairement à (d).

Le lemme (46) est ainsi établi.

Il équivaut à l'énoncé suivant:

(47) *Q étant borné et F un ensemble fermé tel que $R_x S_x - F \neq 0$, quel que soit $x \varepsilon H$, si $i(F)$ est fini ou dénombrable, $Q - F$ est connexe.*

3. Démonstration du théorème (η) [1].

Le raisonnement que je vais employer repose sur une application du théorème de M. Zermelo (Wohlordnungssatz) notamment sur le lemme général suivant:

Etant donnée une famille d'ensembles E_x $(0 \leq x \leq 1)$ telle que

$$E_x \textit{ a la puissance du continu,} \tag{48}$$

$$\sum_{x \varepsilon H} E_x \subset H\,^{2)}, \tag{49}$$

il existe une fonction $f(x)$, définie également pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et telle que

$$\textit{si}\quad x_1 \neq x_2, \quad \textit{on a}\quad f(x_1) \neq f(x_2), \tag{50}$$

$$f(x)\, \varepsilon\, E_x. \tag{51}$$

Soit, en effet

$$x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_c \tag{S_1}$$

une suite transfinie formée de tous les $x \varepsilon H$, où Ω_c désigne le premier nombre transfini de puissance du continu. Soit

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\mu}, \ldots \qquad \mu < \Omega_c \tag{S_2}$$

la suite extraite de (S_1), où x_{α_μ} désigne son premier terme satisfaisant aux conditions:

I. $\alpha_\mu \neq \alpha_\xi$ *pour tout* $0 < \xi < \mu$

II. $x_{\alpha_\mu} \subset E_{x_\mu}$.

[1]) Je dois à M. Kuratowski plusieurs simplifications importantes de cette démonstration.

[2]) $H =$ l'ensemble $0 \leqslant x \leqslant 1$, comme auparavant.

Un tel x_{α_μ} existe, quel que soit $0 < \mu < \Omega_{\mathfrak{c}}$, car la puissance de l'ensemble $\underset{\xi \prec \mu}{\Sigma}(x_{\alpha_\xi})$ étant inférieure à celle du continu en raison de l'inégalité $\mu < \Omega_{\mathfrak{c}}$, l'ensemble $E_{x_\mu} - \underset{\xi \prec \mu}{\Sigma}(x_{\alpha_\xi})$ n'est pas vide en vertu de (48); or, comme il est selon (49) contenu dans H, ses éléments figurent dans la suite (S_1).

Posons:

$$f(x_\mu) = x_{\alpha_\mu}.$$

Ainsi définie, la fonction $f(x)$ existe pour tout x_μ de la suite (S_1), donc pour tout $x \varepsilon H$, et en vertu de I et II elle satisfait aux conditions (50) et (51).

Ceci établi, admettons conformément à l'hypothèse, que Q est un continu borné, décomposé suivant les conditions (α)—(δ).

Considérons l'ensemble formé de 0, de 1 et d'indices de toutes les tranches d'adhésion T_x. En vertu de (32) cet ensemble est au plus dénombrable; désignons le par D.

Posons pour tout $x \varepsilon H$:

(52) $$E_x = i(F_x) - D$$

où

(53) *F_x est un ensemble fermé ayant des points communs avec une infinité indénombrable* (donc de puissance du continu) *de tranches de Q*,

la classe de tels ensembles fermés étant supposée mise au préalable en correspondance biunivoque avec H.

Ainsi définis, les ensembles E_x remplissent les conditions (48) et (49). En vertu du lemme qui vient d'être démontré, il existe par conséquent une fonction $f(x)$ assujettie aux conditions (50) et (51). Cette dernière condition entraîne selon (52): $f(x) \varepsilon i(F_x) - D \subset i(F_x)$, ce qui donne d'une part

(54) $$\sum_{x \varepsilon H} (f(x)) \subset H - D$$

et d'autre part

(55) $$T_{f(x)} F_x \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \varepsilon H.$$

Or, l'ensemble D contenant par définition les indices de toutes les tranches d'adhésion, on conclut de (54) que tout $T_{f(x)}$ est une tranche de cohésion, d'où en vertu de (31) et (55):

(56) $$F_x R_{f(x)} S_{f(x)} \neq 0, \quad \textit{quel que soit} \quad x \varepsilon H.$$

Je vais prouver que *le sous-ensemble L de Q composé*

(i) *de deux points donnés $a \varepsilon T_0$ et $b \varepsilon T_1$,*

(ii) *d'un point* (unique et d'ailleurs arbitraire) *de tout $F_x R_{f(x)} S_{f(x)}$ où $x \varepsilon H$,*

(iii) *d'un point* (unique et arbitraire) *de tout $R_x S_x$ où $x \varepsilon H - \underset{x \varepsilon H}{\Sigma}(f(x))$*

est connexe et irréductible entre a et b.

Supposons, en effet, que l'ensemble L ainsi défini ne soit pas connexe. Il existe par conséquent [1]) un ensemble fermé F disjoint de L et qui coupe l'espace considéré entre deux points de L. On aurait par suite:

(57) $$L \subset Q - F$$

et

(58) $$Q - F \textit{ n'est pas connexe.}$$

Or, on a selon (56), *(ii)* et *(iii)*: $R_x S_x L \neq 0$, quel que soit $x \varepsilon H$, d'où selon (57): $R_x S_x (Q - F) \neq 0$, donc $R_x S_x - F \neq 0$ pour tout $x \varepsilon H$. Il en résulte en vertu de (47) et (58) que l'ensemble $i(F)$ est indénombrable; il existe par conséquent, en vertu de (53) un $x \varepsilon H$ tel que $F = F_x$. On aurait donc d'après *(ii)*: $FL \neq 0$, contrairement à (57).

La connexité de L étant ainsi établie, il reste à prouver que L est irréductible entre a et b. Or, on a selon *(i)*: $(a+b) \subset L$ et l'ensemble $LR_x S_x$ se réduit selon *(ii)* et *(iii)* à un seul point pour tout $x \varepsilon H$. Les tranches T_x sont en effet disjointes deux à deux par hypothèse; il en est donc de-même selon (20) de leurs sous-ensembles $R_x S_x$.

Ainsi, étant donné un point quelconque $(p) \subset L - (a+b)$ et x désignant l'indice tel que $(p) = LR_x S_x$, on a: $L - (p) \subset Q - R_x S_x$, d'où selon (22): $L - (p) \subset (R_x - S_x) + (S_x - R_x)$, ces deux sommandes contenant respectivement les points a et b et étant séparés d'après (23). Tout ensemble connexe K tel que $(a+b) \subset K \subset L$ passe donc par p. Ce dernier point étant arbitraire, on a par conséquent $K = L$, ce qui prouve selon (2) que L est un ensemble connexe irréductible entre a et b.

Le théorème (η) est ainsi démontré.

[1]) en vertu du théorème suivant (loc. cit. (2°), p. 233, th. **XXXVII**):
Etant donnés deux points x et y appartenant respectivement à deux ensembles séparés M et N, il existe un continu F qui n'a aucun point commun avec $M + N$ et qui coupe l'espace considéré entre x et y.

Il est à remarquer que l'ensemble connexe irréductible L a été construit d'une telle manière, qu'il remplisse *à fortiori* les conditions (44) et (45), *même lorsque Q n'est pas un continu irréductible*, et même dans le cas où *aucun sous-continu C de Q*, irréductible entre les points a et b de Q, *ne remplit ces conditions*.

Qu'un tel cas peut se présenter, on le voit sur l'exemple suivant: soit Q le continu composé de segment rectiligne à extrémités $a=(0,0)$ et $(1/3,0)$, de segment rectiligne à extrémités $(1/3,1)$ et $b=(1,1)$ et de tous les segments verticaux qui unissent les points de l'ensemble parfait non-dense de Cantor, situés sur le segment $(0,0)$, $(1,0)$, aux points correspondants de la droite $y=1$. Considérons comme T_x l'ensemble de points de Q situés sur la droite verticale à l'abscisse x.

Ceci posé, on ne peut même demander que Q contienne un continu C irréductible entre a et b où les ensembles CT_x soient non-denses dans C: le seul continu irréductible entre ces points contenu dans Q est formé, en effet, par la ligne brisée à sommets a, $(1/3,0)$, $(1/3,1)$, b.

4. Démonstration du théorème (τ).

La condition est *nécessaire*. Supposons, en effet, que C contienne un continu indécomposable K qui n'en est pas un continu de condensation. En vertu de (9) K est donc un sous-continu régulier de C. Supposons que C contienne en même temps un ensemble L. En vertu de (43) LK est donc un ensemble connexe irréductible entre deux points et on a d'après (41): $\overline{LK}=K$. Il en résulte cependant [1]) que K est un continu décomposable, contrairement à l'hypothèse.

Il est à noter que *cette partie du théorème (τ) subsiste aussi bien pour les continus bornés que pour non-bornés*, puisque aucune hypothèse sur la compacticité de C n'intervient dans le raisonnement qui précède.

La condition est *suffisante*. En effet, la décomposition de C en ensembles T_x définis à l'aide de l'égalité (15) satisfaisant — comme il a été montré, page 281 — aux conditions (α)—(δ), on n'a qu'à appliquer le théorème (η), en posant $C=Q$.

5. Cas du continu non-borné.

L'hypothèse que C soit borné n'intervenant que dans la seconde partie de la démonstration du théorème (τ), la question s'impose si elle y est essentielle.

[1]) en posant $L=LK$ dans le théorème suivant (ma Thèse: Fund. Math. III, p. 286):

L étant un ensemble connexe irréductible entre deux points, le continu $\overline{L}$ est décomposable.

La démonstration résulte de (35)—(37).

Or, elle l'est en effet, car cette dernière partie du théorème en question ne subsiste pas pour certains continus non-bornés, comme le montre un exemple [1]) où *un continu non-borné irréductible entre deux points a et b, tout en étant de type d'ordre λ* (ce qui équivaut d'après (11) à la condition de l'énoncé (τ)), *ne contient aucun ensemble connexe irréductible entre ces points.*

Le lemme (43) est, en particulier, aussi en défaut dans cet exemple. L'idée de construction repose sur une propriété des continus irréductibles bornés qui présente peut-être par elle-même un certain intérêt; c'est pourquoi je la signale ici.

Un continu irréductible borné C de type d'ordre λ peut renfermer des sous-ensembles connexes qui, tout en contenant les points a et b, ne contiennent aucun ensemble L irréductible entre ces points.

Il suffit donc de construire un continu irréductible *non-borné* qui soit *homéomorphe* à un des pareils sous-ensembles de C, ce qui est, en effet, réalisable.

6. Remarques.

Il arrive en général que le continu C irréductible entre a et b contient plusieurs ensembles distincts L connexes irréductibles entre ces points. $\mathfrak{L}$ désignant la famille de ces ensembles, la question s'impose *quelle est sa puissance* $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}$ et d'étudier les conditions dont elle dépend.

Ainsi, par exemple, pour que l'on ait $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}=1$, il faut et il suffit que l'ensemble $R_x S_x$ se réduise à un point, quel que soit $0<x<1$.

D'une façon générale, les résultats acquis permettent d'établir sans difficulté des conditions pour que $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}=2, 3, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \mathfrak{c}$, et $\mathfrak{f}$. Chacun de ces cas est d'ailleurs réalisable.

Posons, par exemple, $\mathfrak{C}=A+B$ où A est composé de la courbe $sin \frac{\pi}{x}$ $(0<x\leq 1)$ et du segment rectiligne $(0,-1)$, $(0,+1)$ qui en est le continu de condensation, tandis que B est le continu symétrique à A par rapport à la droite $y=1-x$. On a dans ce cas $\overline{\overline{\mathfrak{L}}}=1$ (de-même que dans tout arc simple).

L'exemple suivant, donné par Mme S. Nikodym [2]), réalise le

[1]) B. Knaster, *Sur quelques problèmes de Topologie*, (à paraître), exemple $\mathfrak{N}_n$.

[2]) Fund. Math. VII, p. 22 et 23, fig. 3.

cas où $\overline{\overline{\mathcal{L}}}=2$: $\mathcal{C}$ se compose de deux courbes $\varphi = sin\dfrac{1}{\varrho - 1}$ (coordonnées polaires) et de circonférence $\varrho = 1$, dont les moitiés droite et gauche sont respectivement les continus de condensation de ces courbes.

En faisant asymptotiquement approcher par des lignes sinusoïdales analogues les continus formés de $2, 3, \ldots, n, \ldots$ et $\aleph_0$ circonférences tangentes et juxtaposées verticalement, on obtient successivement des continus irréductibles où la puissance de la famille $\mathcal{L}$ est égale à $3, 4, \ldots, n, \ldots$, et $\aleph_0$.

Pour qu'elle soit égale à $\mathfrak{c}$, on n'a qu'à prendre soit la somme du continu A défini ci-dessus et de son image symétrique par rapport à l'axe des y, soit une suite de continus où $\overline{\overline{\mathcal{L}}} = \aleph_0$ unis bout à bout et de plus en plus serrés, de façon que la fermeture de leur somme soit un continu borné irréductible. Le premier ou le second mode de construction est à adopter, suivant que l'on voudra faire différer les ensembles L par un ou par plusieurs de leurs points.

Pour avoir enfin $\overline{\overline{\mathcal{L}}} = \mathfrak{f}$, on peut se servir d'exemple donné par A. Schoenflies[1]) où il y a $\mathfrak{c}$ ensembles $R_x S_x$ de puissance $\mathfrak{c}$. Afin de montrer que l'exemple en question renferme en effet $\mathfrak{f}$ ensembles L différents, on aura soin de modifier légèrement la construction de L employée au cours de la démonstration du théorème (η): au lieu de fonction $f(x)$, on procédera à l'aide d'une fonction $\varphi(x)$ dont les valeurs soient des ensembles disjoints de puissance $\mathfrak{c}$; on fera entrer ensuite dans l'ensemble L un point de chaque produit $R_t S_t F_x$ où $t \varepsilon \varphi(x)$.

Le problème est différent, lorsqu'on demande que la famille $\mathcal{L}$ soit composée d'ensembles L disjoints deux à deux (abstraction faite des points a et b). Il est aisé de montrer que $\mathcal{L}$ peut prendre dans ce cas toutes les valeurs cardinales $\leq \mathfrak{c}$, mais, évidemment, ne peut dépasser cette dernière. Tous ces cas peuvent être réalisés à l'aide d'un continu où l'ensemble $R_x S_x$ a la puissance du continu pour tout $0 < x < 1$[2]) (pour avoir $\overline{\overline{\mathcal{L}}} = \mathfrak{u}$, il suffit d'accoupler deux continus analogues, en les déformant de façon que seules

[1]) *Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 1908, p. 121.

[2]) Pour l'exemple d'un tel continu voir B. Knaster, *Sur quelques problèmes de Topologie* (à paraître), exemple $\mathfrak{N}_1$.

leurs tranches terminales se trouvent en contact et qu'elles aient un ensemble de puissance $\mathfrak{u}$ de points communs).

Ainsi, tous les cas en question présentent ce trait commun que toutes, ou presque toutes les tranches de C ont la puissance du continu. L'existence dans C d'ensembles $L - (a + b)$ disjoints entraîne en effet, d'après (44), l'existence de plus d'un point dans chaque $R_x S_x$, donc selon (20) dans toute tranche de C; en vertu de (δ), la puissance de chacune d'elles est par conséquent égale à $\mathfrak{c}$.

Or, ce trait commun dans la structure de C en implique un autre, non moins caractéristique pour la structure des ensembles L: à savoir, qu'ils sont *ponctiformes.* On a notamment le théorème suivant:

Pour que tout ensemble L connexe et irréductible entre a et b, situé dans un continu C irréductible entre ces points et ayant le type d'ordre λ, soit ponctiforme, il faut et il suffit que l'ensemble E d'indices x pour lesquels T_x ne se réduit pas à un point soit dense dans H.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, si E n'est pas non-dense dans H, l'ensemble $H - \overline{E}$ contient un segment U. Par suite de la continuité de U l'ensemble $\sum\limits_{x \varepsilon U} T_x$ est en vertu de (27) un continu. Toute tranche T_x de ce continu se réduit par hypothèse à un point, puisque $x \varepsilon U \subset H - \overline{E}$. C'est donc un arc simple et d'après (44) il est contenu dans L, contrairement à la ponctiformité de cet ensemble.

La condition est suffisante. En effet, si $H - \overline{E} = 0$, le continu C ne contient aucun arc simple qui n'en soit pas un continu de condensation, donc le sous-continu d'une tranche T_x. Or, en supposant que L contient un continu K ne se réduisant pas à un point, ce continu serait un arc simple[1]) et, en vertu de (44), il ne saurait être contenu dans aucun T_x. L est donc ponctiforme, c. q. f. d.

Ainsi, en particulier, lorsqu'un continu C contient deux ensembles $L - (a + b)$ disjoints ou bien un ensemble L qui est ponctiforme, il en est de même de tous les ensembles L situés dans ce continu.

[1]) loc. cit. (2°), Fund. Math. II, p. 225, corollaire XXVIII.

Varsovie, 1925—26.