On conclut immédiatemant de là et du théorème 2 (§ 2; Chap. I):
B. $h(x)$ étant absolument continue d'ordre α, on a:

$$\int_0^x h^{\alpha} . dx^{1-\alpha} = \int_0^x [h'(x)]^{\alpha} dx.$$

Le résultat suivant du à M. Hahn est contenu dans la proposition A: *$h(x)$ admettant l'intégrale de M. Hellinger d'ordre $\alpha > 1$, elle est absolument continue et sa dérivée est sommable de puissance α* [1]).

Pour obtenir cette proposition, il suffit de poser dans A: $\beta = 1$.

La transformation de l'intégrale de M. Hellinger effectuée par M. Hahn, est fournie par B, car, pour $\alpha > 1$, toute fonction intégrable au sens de M. Hellinger d'ordre α est encore absolument continue de même d'ordre.

[1]) *Voir*: Hahn. *Monatshefte f. Math. und Physik.* t. 23. 1912. p. 161—183; aussi: Hobson. *The theory of functions.* 1921. vol. I. p. 609—615.

Théorie des continus irréductibles entre deux points II [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

En cherchant à caractériser l'arc simple de façon topologique M. Zoretti introduisit en 1909 la notion de continu irréductible, qui se présenta comme une généralisation naturelle de l'arc simple. Il parut probable d'abord [2]) que la propriété de l'arc simple d'être ordonné linéairement appartient aux continus irréductibles en général. L'ingénieux exemple d'un continu irréductible indécomposable, inventé par M. L. E. J. Brouwer, montra qu'il n'en était rien: sur un continu indécomposable il n'existe aucun ordre linéaire „naturel" (au point de vue topologique), pas plus qu'il n'en existe sur un cercle ou une circonférence [3]).

Le problème d'établir un „ordre" sur un continu irréductible surgît alors sous une autre forme [4]). Il ne s'agissait plus d'ordonner les points d'un continu irréductible, mais de diviser ce continu en parties (en „tranches") qui puissent être ordonnées d'une facon conforme à sa structure.

[1]) La première partie de cet ouvrage parut dans Fund. Math. III. pp. 200—231. Je la citerai: *Irr. I.*

[2]) Voir: Zoretti Ann. Ec. Norm. XXVI (1909) et Comptes Rendus t. 151 (1910).

[3]) Proc. Akad. Wett. Amsterdam XIV (1911) p. 144, § 4. „The impossibility of a linear arrangement of the points of an irreducible continuum".

[4]) Voir: Vietoris *Stetige Mengen* Mon. f. Math. u. Phys. XXXI (1921), H. Hahn *Ueber die irreduzible Kontinua*, Wiener Ber. 130 (1921). W. A. Wilson *On the structure of a continuum, limited and irreducible between two points*, Amer. Journ. Math. XLVIII (1926).

Avant de donner à ce problème un énoncé plus précis, considérons comme exemple la courbe formée par les points $y = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, et ceux du segment vertical $-1 \leq y \leq 1$, $x = 0$. En définissant la „tranche" T_0 comme ce segment vertical et la tranche T_x $(0 < x \leq 1)$ comme formée du point $\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$, on a une décomposition linéaire de la courbe envisagée, où les tranches jouent le rôle des points.

Plusieurs auteurs cherchèrent à généraliser ce procédé de façon à pouvoir décomposer des continus irréductibles les plus généraux. M. Vietoris définit une décomposition en parties (qu'il appelle „Schichtung") pour le cas particulier où le continu borné C, irréductible entre a et b, contient un ensemble connexe irréductible entre ces points. M. Wilson décrit une décomposition en parties (qu'il appelle „complete oscillatory sets") pour le cas de continu irréductible borné ne contenant aucun continu indécomposable qui n'en soit pas continu de condensation [1]). Une autre solution du même problème, proposée par M. Hahn, consiste à diviser le continu en ce qu'il appelle „Primteile": un „Primteil" déterminé par un point p se compose de p et de tous les points x qui peuvent être unis à p par une chaîne de points $p, p_1, \ldots, p_n, x$, à chaînons $< \varepsilon$, tous les points $p_1, \ldots, p_n$ étant situés sur des continus de condensation (contenant plus d'un point).

Pour la courbe $\sin\frac{1}{x}$ les „Primteile" coïncident donc avec les tranches T_x, définies plus haut. Considérons cependant la courbe formée de points $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin\frac{1}{x - r_n}$, $0 \leq x \leq 1$, et de leurs points limites ($r_1, r_2, \ldots$, désignant la suite des nombres rationnels) [2]). Conformément à la définition de M. Hahn, cette courbe se compose d'un seul „Primteil". Mais, en même temps, elle peut être décomposée en une infinité de tranches, en définissant la tranche T_x comme la partie de la courbe située sur la droite verticale x.

[1]) D'ailleurs, comme l'a prouvé M. Knaster, ces deux cas (l'un considéré par M. Vietoris et l'autre par M. Wilson) coïncident. V: B. Knaster *Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points*, ce volume.

[2]) Cf. Fund. Math. III, p. 306.

Cet exemple montre donc que la décomposition en „Primteile" n'est pas définitive: on peut, parfois, la pousser plus loin.

La remarque, que nous venons de faire, nous conduit à préciser de la façon suivante le problème „d'ordonner" un continu irréductible:

Nous dirons qu'une décomposition de C est *semi-continue* [1]) et *linéaire*, lorsque C est décomposé en un seul ensemble (cas trivial) ou bien lorsque C est décomposé en ensembles disjoints (dits „tranches") T_x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, de façon que la condition $\lim_{n=\infty} x_n = x_0$ entraîne $\limsup T_{x_n} \subset T_{x_0}$.

Le problème consiste à définir pour tout continu irréductible borné [2]) une décomposition $\mathfrak{D}$ telle que

1° $\mathfrak{D}$ soit une décomposition semi-continue linéaire ayant des continus pour tranches;

2° $\mathfrak{D}^*$ désignant une décomposition arbitraire satisfaisant à 1°, toute tranche de $\mathfrak{D}^*$ est, soit une tranche de $\mathfrak{D}$, soit une somme de tout un ensemble de tranches de $\mathfrak{D}$.

Le but principal de cet ouvrage est de resoudre le problème ainsi posé. En me basant sur les résultats de *Irr. I*, je définis, dans le § 3 du présent ouvrage, une décomposition en tranches T_x et je prouve qu'elle satisfait aux conditions 1° et 2°

Cette décomposition peut, d'ailleurs, se réduire à un seul élément: tel est, par. ex., le cas du continu indécomposable ou d'un continu formé d'une suite finie ou infinie de continus indécomposables. Les continus de ce genre n'admettent donc aucune vraie décomposition semi-continue linéaire en continus (sauf la décomposition triviale comprenant une seule tranche: le continu même) [3]).

D'autre part, si la décomposition ne se réduit pas à un seul élément, ses tranches forment un intervalle: tel est le cas des exemples cités auparavant, tel est encore le cas d'un continu formé d'un

[1]) Cf. R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. 27, 1925.

[2]) Dans le cas de continus *non-bornés* la condition 1° doit être modifiée, car on ne peut plus demander que les tranches soient des continus. Il paraît probable que, dans ce cas, le rôle des continus appartient aux ensembles fermés, sommes de continus non-bornés.

[3]) Il est remarquable que M. Brouwer écrivit dans son ouvrage cité (p. 145): „it is a priori certain that all attempts to arrange the points of such a (indecomposable) continuum linearly by repeated crumblings must fail".

continu indécomposable et d'un segment ayant avec lui un seul point commun.

En particulier, lorsque le continu irréductible ne contient aucun continu indécomposable (abstraction faite des continus de condensation), la tranche peut être définie comme *continu de condensation saturé* (continu de condensation que l'on ne peut pas augmenter). C'est alors que les tranches coïncident avec les „Schichten" de M. Vietoris et les „complete oscillatory sets" de M. Wilson.

Quant à la décomposition due à M. Hahn, elle satisfait toujours à la condition 1^0, mais pas nécessairement à la condition 2^0: tel est le cas, par ex., de la courbe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{1}{x - r_n}$, envisagée plus haut.

Les §§ 1 et 2 sont consacrés à l'étude de quelques notions préliminaires, qui ne sont d'ailleurs par elles-mêmes sans intêret dans une théorie des continus irréductibles: ce sont l'ensemble $I(a, C)$ de tous les points x tels que C est irréductible entre a et x, l'ensemble $K(p, C)$ de tous les points qui se laissent unir à p par des sous-continus de condensation de C et enfin la notion de continu de condensation saturé, qui est intimement liée à la précédente [1]). On verra combien la notion de continu indécomposable est essentielle pour ces recherches.

Les principaux résultats concernant l'ensemble $I(a, C)$ sont réunis dans le N 4 du § 1; la structure de l'ensemble $K(p, C)$ est caractérisée par le théor. IX du § 2.

Les propriétés des continus irréductibles envisagées dans les §§ 1—3 sont intrinsèques. Dans le § 4, je m'occupe, par contre, des propriétés extrinsèques de ces continus: je caractérise, en particulier, d'une façon extrinsèque les tranches d'un continu irréductible. Les problèmes que je considère dans ce § se rattachent à l'étude que Janiszewski avait suggérée il y a plusieurs années.

[1]) Il serait intéressant, peut-être, de rapprocher la notion d'ensemble $K(p, C)$ de celle de „oscillatory set" introduite par M. Wilson (Trans. Am. Math. Soc. 27, 1925, p. 433) et d'étudier les rapports du diamêtre de l'ensemble $K(p, C)$ avec l'oscillation du continu C au point p au sens de M. Mazurkiewicz (Fund. Math. I, p. 170).

Pour en donner un exemple, remarquons qu'une circonférence définie par l'équation $\varrho = 1$ est une tranche du continu irréductible formée par la spirale $\varrho = 1 - \frac{1}{\theta}$, $\theta \geqslant 1$, et cette circonférence. Il en est encore de-même, si l'on considère au lieu d'une circonférence, une courbe formée d'une circonférence et d'un diamètre: en inscrivant a l'intérieur de chaque demi-cercle une spirale qui s'approche asymptotiquement de son contour, on obtient un continu irréductible ayant la courbe considérée pour tranche.

Mais le cas est tout différent si l'on considère une courbe formée d'une circonférence et de deux diamêtres; il n'existe aucun continu irréductible plan dont cette courbe soit une tranche.

Je donne une condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu puisse être une tranche d'un continu irréductible (plan). Je donne aussi une condition pour que cette tranche puisse être une tranche finale, c'est-à dire un ensemble $I(a, C)$; par exemple, une circonférence peut l'être, deux circonférences tangentes également, cependant une circonférence + un diamètre ne peut être qu'une tranche intermédiaire.

La plupart des théorèmes connus sur les continus irréductibles concernent les conditions nécessaires pour qu'un continu soit irréductible. Dans le § 5 je donne la condition suffisante suivante: si C est un continu borné et a un point de C tel que C ne se laisse pas décomposer en deux continus (différents de C) qui contiennent a tous les deux, il existe alors un point b tel que C est irréductible entre a et b. C'est une généralisation (dans le cas des continus bornés) du théorème de M. Mazurkiewicz [1]) d'après lequel tout continu indécomposable est irréductible entre deux points.

Finalement, je m'occupe du problème suivant concernant le choix effectif. Un continu irréductible peut, en général, être irréductible entre différents couples de points à la fois. Or, étant donné (dans l'espace Cartésien) un continu dont on suppose qu'il est irréductible, est-il possible de *définir* un couple individuel de points entre lequel le continu donné est irréductible?

J'en donne une solution affirmative.

[1]) Fund. Math. I, p. 35.

Termes et notations[1]. C désigne un continu *irréductible* entre deux points, supposés fixes, a et b ($a \neq b$). Nous rappelons qu'un continu (borné ou non) est dit irréductible entre deux points s'il les contient sans qu'aucun de ses vrais sous-continus les contienne simultanément. Un continu Q est dit continu de *condensation* de C, si $0 \neq Q \subset C$ et $\overline{C-Q} = C$ (d'ailleurs, Q peut se réduire à un seul point). Un continu R est dit *régulier* (dans C)[2], si $R = \overline{C - \overline{C-R}}$; autrement dit, si R est la fermeture d'un ensemble ouvert dans C. $\mathfrak{R}(a, C)$ désigne la classe qui contient comme éléments l'ensemble vide et tous les sous-continus réguliers de C contenant a; je désigne par R un élément variable de cette classe et je pose $S = \overline{C-R}$.

Un *semi-continu* est une somme de continus dont le produit n'est pas vide.

Un continu est dit *indécomposable*, s'il n'est pas somme de deux continus différents de lui. Un *composant* d'un continu indécomposable C est un semi-continu qui est vrai sous-ensemble de C et qui n'est situé dans aucun autre semi-continu qui soit vrai sous-ensemble de C.

Un *constituant* d'un ensemble E est un semi-continu qui est situé dans E et qui n'est situé dans aucun autre semi-continu situé dans E.

§ 1. L'ensemble $I(a, C)$.

1. Définition. *$I(a, C)$ est l'ensemble de tous les points x tels que le continu C est irréductible entre a et x*[3].

Pour abréger nous écrirons I au lieu de $I(a, C)$.

Exemples I. C se compose de la courbe $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$ et du segment vertical $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $x = 0$; a est le point $(1, \sin 1)$. Dans ce cas $I =$ le segment vertical.

Ex. II. C s'obtient de l'exemple précédent par l'inversion[4] faite du centre $0, 0$. I se compose à présent de deux rayons topologiques (l'image du segment vertical).

Ex. III. C est le continu indécomposable décrit dans *Irr.* I p. 209, a est le point $0, 0$. I est constitué par tous les „composants" distincts de celui du point a (qui est formé d'une suite de demi-circonférences issue du point a).

[1] Voir aussi NN 9 et 10 du § 3 et N 16 du § 4.

[2] *Irr.* I, p. 206.

[3] Dans la Note *Sur les continus indécomposables* (Fund. Math. I) l'ensemble $C - I(a, C)$ est désigné par $\mathfrak{P}(a, C)$.

[4] Voir *Sur la méthode d'inversion dans l'Analysis Situs*, Fund. Math. IV, cf. Irr. I, p. 218.

Ex. IV. C s'obtient de l'exemple précédent par l'inversion faite du centre $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. I contient tout le continu excepté le rayon topologique issu du point qui correspond à a[1].

Observons que dans l'ex. I, I est un *continu*; dans II, I est *fermé* mais non continu, dans III et IV, I n'est pas fermé. Dans I et II, I est *non-dense* dans C, tandisque dans III, I cesse d'être non-dense tout en restant un ensemble *frontière* dans C. Dans IV, I cesse même d'être ensemble frontière dans C.

Après quelques théorèmes préliminaires du N 2, je donne dans le N 3 une analyse des continus irréductibles au point de vue de ces 4 propriétés de l'ensemble I: d'être fermé, d'être un continu, d'être non-dense et d'être un ensemble frontière dans C.

2. Rappelons d'abord quelques propriétés des continus irréductibles, qui furent établies dans la I^re partie de cet ouvrage[2]:

si K est un continu tel que $a \varepsilon K \subset C$, on a

(i) $$\overline{C-K} \,\varepsilon\, \mathfrak{R}(b, C) \quad \text{et} \quad \overline{C - \overline{C-K}} \,\varepsilon\, \mathfrak{R}(a, C);$$

si $R \,\varepsilon\, \mathfrak{R}(a, C)$ *et* $S = \overline{C-R}$, *on a*

(ii) $$I(a, R) \neq 0 \quad \textit{à moins que l'on n'ait} \quad R = 0,$$

(iii) $$S \,\varepsilon\, \mathfrak{R}(b, C),$$

(iv) $$RS = I(a, R)\, I(b, S);$$

si, en outre, $R_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{R}(a, C)$ *et* $S_1 = \overline{C-R_1}$,

(v) *les conditions* $R \subset R_1$ *et* $R \neq R_1$ *entraînent* $S \supset S_1$ *et* $S \neq S_1$;

(vi) *si $p \,\varepsilon\, C$, il existe ou bien dans $\mathfrak{R}(a, C)$ un continu irréductible entre a et p ou bien dans $\mathfrak{R}(b, C)$ un continu irréductible entre b et p. Si le premier cas est réalisé, $R(p)$ désigne le continu en question; s'il ne l'est pas, $R(p) = \overline{C - S(p)}$ et $S(p)$ est irréductible entre b et p.*

Nous établirons à présent quelques propriétés de l'ensemble $C-I$.

Evidemment: $a \,\varepsilon\, C - I$. Donc $C - I \neq 0$. On peut démontrer même plus: $C - I$ ne se réduit pas à un seul point, car selon un théorème de Janiszewski[3], dans tout entourage de a il existe

[1] Voir la note de M. Knaster et de moi *Sur les continus non-bornés*. Fund. Math. V, p. 43.

[2] p. 203—207 et 221.

[3] Thèse, Journ. Ec. Polyt. 1912, (théor. IV).

des continus situés dans C, contenant a et ne se réduisant pas à un seul point.

Par définition de I, l'ensemble $C-I$ est somme de tous les continus X tels que

$$(1) \qquad a \varepsilon X \subset C \quad \text{et} \quad X \neq C.$$

$C-I$ est donc un semi-continu. C'est un semi-continu qui jouit de la propriété suivante:

Lemme 1. *$C-I$ est somme d'une série des continus contenant le point a:*

$$(2) \qquad C-I = \sum_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Démonstration[1]). Envisageons la suite infinie de tous les cercles (sphères) ayant le centre et le rayon rationnels et contenant à l'intérieur des points de C, sans contenir toutefois le point a. Soit $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ la suite des intérieurs de ces cercles; donc:

$$(3) \qquad a \varepsilon C - J_n \neq C.$$

Soit K_n le plus grand continu tel que

$$(4) \qquad a \varepsilon K_n \subset C - J_n.$$

D'après (4) et (3): $a \varepsilon K_n \subset C$ et $K_n \neq C$. Donc selon (1): $K_n \subset C - I$, d'où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n \subset C - I$.

Pour prouver l'inclusion inverse, il suffit de montrer que tout continu X assujetti à la condition (1) fait partie d'un K_n. Or, l'inégalité $X \neq C$ entraîne l'existence d'un J_n tel que $XJ_n = 0$. Donc: $a \varepsilon X \subset C - J_n$, ce qui donne, par définition de K_n: $X \subset K_n$.

Il est donc établi que $C - I \subset \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, d'où l'égalité (2).

Remarque. Nous ne nous sommes pas servi dans ce raisonnement de l'hypothèse que $I \neq 0$. Ainsi, la proposition suivante se trouve en même temps établie: si a est un point d'un continu réductible entre a et tout autre point, ce continu est somme d'une série des continus différents de lui et contenant le point a.

[1]) Nous reproduisons ici le raisonnement de M. **Mazurkiewicz** qui lui a servi pour prouver que tout continu indécomposable est irréductible (Fund. Math. I, p. 35).

Lemme 2. *Si K est un continu contenant b, la condition nécessaire et suffisante pour que $K \subset I$ est que K soit un continu de condensation.*

Démonstration. Il a été établi dans *Irr.* I, p. 219 que la condition est suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, supposons que

$$(5) \qquad b \varepsilon K \subset I.$$

Comme $a \varepsilon C - I$, il vient:

$$(6) \qquad a \varepsilon C - K.$$

D'après (i), $\overline{C-K}$ est un continu. De plus, la décomposition $C = \overline{C-K} + K$ prouve que $\overline{C-K} \,.\, K \neq 0$, donc selon (5) que $\overline{C-K} \,.\, I \neq 0$. Ainsi, $\overline{C-K}$ est un continu qui (selon 6) contient a et des points de I. Donc $\overline{C-K} = C$, ce qui veut dire que K est un continu de condensation.

Lemme 3. *Si R est le plus grand de tous les continus différents de C qui appartiennent à $\mathfrak{R}(a, C)$, alors*

$$(7) \qquad \overline{I} = \overline{C-R}$$

et $\overline{I}$ est un continu indécomposable.

Démonstration. D'après le lemme 1, $C - I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n étant un continu contenant a. Comme $R \neq C$, on a (selon 1):

$$(8) \qquad R \subset C - I.$$

Donc

$$C - I = R + \sum_{n=1}^{\infty} K_n = R + \sum_{n=1}^{\infty} (K_n - R).$$

Posons

$$(9) \qquad T = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n - R).$$

Donc

$$(10) \qquad C - I = R + T.$$

Nous allons prouver que T est un ensemble frontière dans C, en symboles: que

$$(11) \qquad \overline{C-T} = C.$$

Il suffira, à ce but, de prouver que $K_n - R$ *est non-dense dans* C, car on en conclura en s'appuyant sur (9) que T est de I^re catégorie (au sens de Baire), donc que T est un ensemble frontière dans C.

Or, K_n étant un continu contenant a, l'ensemble $\overline{C-\overline{C-K_n}}$ appartient (selon (i)) à $\mathfrak{R}(a,C)$. De plus:

(12) $$\overline{C-\overline{C-K_n}} \neq C,$$

car autrement on aurait [1]):

$$C = \overline{C-\overline{C-K_n}} \subset K_n$$

ce qui est impossible, puisque $K_n \subset C-I$.

L'hypothèse faite sur R donne en vertu de (12):

$$\overline{C-\overline{C-K_n}} \subset R, \quad \text{d'où} \quad C-\overline{C-K_n} \subset R, \quad \text{donc:}$$

$$C-R \subset \overline{C-K_n}.$$

En multipliant par K_n, il vient

(13) $$K_n - R \subset K_n \cdot \overline{C-K_n}.$$

Or, $K_n \cdot \overline{C-K_n}$ est la frontière de K_n (relative à C); c'est donc [2]) un ensemble non-dense dans C. Il en résulte, selon (13) que $K_n - R$ est non-dense, ce qui prouve — comme nous l'avons dit — l'égalité (11).

Or, l'identité $I = C-(C-I)$ donne, en raison de (10):

$$I = C-(R+T) = (C-T)-R$$

d'où

$$\bar{I} = \overline{(C-T)-R} \supset \overline{C-T} - \bar{R} = C-R \text{ [3]}),$$

selon (11). Ainsi $\bar{I} \supset \overline{C-R}$.

D'autre part: $\bar{I} \subset \overline{C-R}$, car d'après (8): $I \subset C-R$.

L'égalité (7) se trouve ainsi démontrée.

Pour prouver que $\bar{I}$ est un continu indécomposable, on tient compte du fait que dans la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ il y a, par hypothèse, un saut entre R et C, donc [1]) que $\overline{C-R}$ est indécomposable.

[1]) En vertu de l'inclusion $\overline{C-\overline{C-F}} \subset F$, quel que soit l'ensemble fermé F (v. Fund. Math. III, p. 186).

[2]) V. Fund. Math. III, p. 188, corollaire.

[3]) En vertu de l'inclusion $\overline{X-Y} \supset \bar{X}-\bar{Y}$ (v. Fund. Math. I, p. 222).

[4]) *Irr.* I, p. 211, théor. XIII.

3. Théorème I. *Pour que* $\bar{I} = C$ *il faut et il suffit que* C *soit indécomposable.*

Ce théorème fut établi par Janiszewski et moi, Fund. Math. I, p. 215.

Théorème II. *Si* I *n'est pas fermé,* $\bar{I}$ *est un continu indécomposable.*

Démonstration. Par hypothèse il existe un point p tel que $p\,\varepsilon\,(\bar{I}-I)$. Considérons le continu $R(p)$, défini par la formule (vi), p. 231. Posons $R \doteq R(p)$. Par conséquent: s'il existe un continu irréductible entre a et p dans la classe $\mathfrak{R}(a,C)$, R est ce continu; dans le cas contraire, $R = \overline{C-S}$ et S est irréductible entre b et p.

Je dis que R est le plus grand de tous les continus différents de C qui appartiennent à $\mathfrak{R}(a,C)$. D'abord $R \neq C$, car dans le cas où R est irréductible entre a et p, cette inégalité résulte du fait que p n'est pas élément de I, dans le cas contraire, $S \neq 0$, d'où $R \neq C$ (puisque S est régulier).

Supposons d'autre part, qu'il existe dans $\mathfrak{R}(a,C)$ un continu R, tel que

(14) $$R \subset R_1 \subset C \quad \text{et} \quad R \neq R_1 \neq C.$$

On en conclut que $R_1 \cdot I = 0$ d'où $I \subset C-R_1$ et $\bar{I} \subset \overline{C-R_1}$. Or, $R_1 \cdot \overline{C-R_1} \subset I(a,R_1)$ selon iv); et $R \cdot I(a,R_1) = 0$ en raison de (14); donc $R \cdot \overline{C-R_1} = 0$. Il en résulte: $R \cdot \bar{I} = 0$ et par conséquent: p *non-*ε R.

Ainsi R n'est pas irréductible entre a et p. Donc S est irréductible entre b et p. Mais, selon (14) et (v):

$$\overline{C-R_1} \subset \overline{C-R} = S \quad \text{et} \quad \overline{C-R_1} \neq \overline{C-R}$$

et, en même temps, le continu $\overline{C-R_1}$ contient les points b et p, puisque $\bar{I} \subset \overline{C-R_1}$. Le continu S ne peut donc être irréductible entre b et p.

Cette contradiction prouve notre assertion que R est le plus grand des continus différents de C qui appartiennent à $\mathfrak{R}(a,C)$. Selon le lemme 3, $\bar{I}$ est donc un continu indécomposable.

Remarques. Le cas envisagé où I est non-fermé peut effectivement se présenter, comme le prouve l'ex. III du N 1. D'ailleurs, sur cet exemple le continu C tout entier est indécomposable, mais ceci n'est nullement essentiel, car on peut ajouter à C un segment ayant avec C un seul point commun, de sorte que C devienne décomposable bien que $\bar{I}$ reste, conformément au théorème, indécomposable.

Si I n'est pas fermé, $\overline{I}$ est un continu *régulier* (dans C), car selon le th. XII de *Irr.* I, un continu indécomposable situé dans C est ou bien continu de condensation ou bien est régulier; mais $\overline{I}$ ne peut être continu de condensation, car on aurait, selon le lemme 2: $\overline{I}\subset I$ et I serait fermé, contrairement à l'hypothèse.

Il est enfin à remarquer que, lorsque I n'est pas fermé, les constituants de I sont des composants du continu indécomposable $\overline{I}$. C'est une conséquence du lemme 2.

Théorème III. *I est ou bien un ensemble frontière dans C ou bien un ensemble ouvert dans C.*

En symboles:

$$\overline{C-I}=C \quad \text{ou bien} \quad C-I=\overline{C-I}.$$

Démonstration. Supposons que $\overline{C-I}\neq C$. L'ensemble $C-I$ étant un semi-continu, $\overline{C-I}$ est un continu. Ainsi $\overline{C-I}$ est un continu tel que: $a\in\overline{C-I}\neq C$, ce qui entraîne, en vertu de (1) que $\overline{C-I}\subset C-I$. Donc $C-I=\overline{C-I}$.

Corollaire. *La condition nécessaire et suffisante pour que I soit ouvert dans C, est que $C-I$ soit un sous-continu saturé de C* [1]). *Ce cas ne peut se présenter que si C est non-borné et $\overline{I}$ est indécomposable.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que $C-I=\overline{C-I}$. Donc $C-I$ est un continu. C'est un sous-continu saturé de C, car X étant un continu tel que $C-I\subset X\subset C$ et $X\neq C$, on a selon (1): $X\subset C-I$, d'où $X=C-I$.

Comme les sous-continus saturés ne peuvent exister que dans les continus non-bornés, C est non-borné. De plus, I ne peut être fermé, car on aurait la décomposition du continu $C=I+(C-I)$ en deux ensembles fermés non-vides et disjoints. I n'étant pas fermé, $\overline{I}$ est indécomposable.

La condition est suffisante, car $C-I$ étant supposé continu, I est évidemment ouvert dans C, c. q. f. d.

Passons au cas où I est un ensemble frontière dans C et considérons le cas particulier où I est *non-dense* dans C.

[1]) Un vrai sous-continu K de C est dit un sous-continu *saturé*, s'il n'existe aucun continu X qui satisfasse aux conditions: $K\subset X\subset C$, $K\neq X\neq C$ (Voir *Fund. Math.* V, p. 39).

Théorème IV. *Pour que I soit non-dense dans C, il faut et il suffit que I soit fermé.*

En symboles, les égalités:

$$C=\overline{C-\overline{I}} \quad \text{et} \quad \overline{I}=I$$

sont équivalentes.

Démonstration. En effet, si I est fermé, I ne peut être ouvert (puisque $0\neq I\neq C$). Donc, selon le théor. III, I est un ensemble frontière dans C. Ainsi I est non-dense dans C, comme ensemble frontière et fermé.

D'autre part, si I n'est pas fermé, $\overline{I}$ est en vertu du théor. II, un continu. Or, si I était non-dense, $\overline{I}$ serait un continu de condensation et en vertu du lemme 2 on aurait $\overline{I}\subset I$, donc I serait fermé, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que, dans ce cas, I n'est pas non-dense.

Remarque. Le théor. IV permet de remplacer le lemme 1 — dans le cas où I est fermé — par la proposition plus avantageuse suivante:

Si I est fermé, $C-I$ est somme de tous les continus de la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ qui sont différents de C. Dans ce cas, $C-I$ est somme d'une série des continus réguliers croissants.

Soit, en effet, Σ la somme de tous les continus de la classe $\mathfrak{R}(a,C)$, différents de C. Evidemment $\Sigma\subset C-I$.

Il s'agit de prouver qu'inversement, si $p\in C-I$, on a $p\in\Sigma$. Remarquons, à ce but, qu'il n'existe pas dans la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ d'élément R qui soit le plus grand parmi les éléments différents de C. Car, si un tel R existait, on aurait en vertu du lemme 3: $\overline{I}=\overline{C-R}$ et, comme par hypothèse, $I=\overline{I}$, on aurait $I=\overline{C-R}$ d'où $C-I\subset R$. Comme, d'autre part, $R\subset C-I$, il vient $R=C-I$ et on parvient à la conclusion que I ainsi que $C-I$ est fermé, ce qui est impossible.

Ceci établi, nous distinguons deux cas, suivant qu'il existe un continu R_0 dans la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ irréductible entre a et p, ou un continu S_0 dans $\mathfrak{R}(b,C)$ irréductible entre b et p.

Dans le premier cas, $R_0\neq C$, puisque $p\in C-I$. Donc $p\in R_0\subset\Sigma$, d'où $p\in\Sigma$.

Dans le second cas, posons $R_1=\overline{C-S_0}$. Comme nous venons de prouver il existe dans $\mathfrak{R}(a,C)$ un continu R_2 tel que

$$R_1\subset R_2\subset C, \qquad R_1\neq R_2\neq C$$

d'où

$$\overline{C-R_2}\subset\overline{C-R_1}=S_0 \quad \text{et} \quad \overline{C-R_2}\neq\overline{C-R_1}$$

ce qui prouve que — S_0 étant irréductible entre b et p — le continu $\overline{C-R_2}$ ne contient pas p. Donc $p\in R_2$ et comme $R_2\subset\Sigma$, on a $p\in\Sigma$, c. q. f. d.

Pour prouver que $C-I$ est somme d'une série des continus réguliers croissants, on assigne les indices aux continus de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ conformément au second théorème fondamental de *Irr.* I et on en choisit une suite de continus à indices croissants et convergeants vers 1 (indice de C).

En vertu du théor. IV, le cas où I est non-dense se ramène au cas où I est fermé. Il y a encore deux alternatives à distinguer qui correspondent aux cas ou I est un continu ou ne l'est pas:

Corollaire (du th. IV). *Si I est un continu, c'est un continu de condensation.*

Théorème V. *Si I est fermé mais n'est pas continu, tout constituant de I est non-borné. En outre, si p et q appartiennent à deux constituants distincts de I, il n'existe dans C aucun continu irréductible entre ces points.*

Démonstration. Supposons que L soit un constituant borné de I. Soit $r \varepsilon I-L$. Il existe, par conséquent [1]), un continu M tel que:

(15) $$L \subset M \subset C, \quad L \neq M,$$

(16) $$r \varepsilon I-M.$$

Les formules (15) impliquent, par définition de constituant, que $M-I \neq 0$. Il existe donc un continu Q qui unit a à un point de $M-I$ et qui satisfait à l'inclusion

(17) $$Q \subset C-\dot{I}.$$

La somme $Q+M$ est ainsi un continu qui unit a à un point de I (car $L \subset M$ et $LI \neq 0$, donc $MI \neq 0$). Il en résulte que $Q+M=C$; d'où: $r \varepsilon Q$ ou bien $r \varepsilon M$, contrairement aux formules (17) et (16).

L'hypothèse que I admet un constituant borné implique donc une contradiction.

Passons à la deuxième partie du théorème.

Supposons que K soit un continu irréductible entre p et q, ces points appartenant à deux constituants différents de I.

Evidemment $K-I \neq 0$. Donc, selon le lemme 2, K ne peut être continu de condensation.

[1]) En vertu d'une propriété générale des continus. Voir Janiszewski, Thèse ch. IV, théor. IV; Knaster et Kuratowski Fund. Math. V, p. 39.

Ainsi $\overline{C-K} \neq C$. Posons $R=\overline{C-K}$. Selon (*i*), R est un continu de la classe $\mathfrak{R}(a, C)$ différent de C. En vertu du lemme 3, R n'est pas le plus grand de tous ces continus, car d'après l'hypothèse, $I=\bar{I}$, n'est pas un continu.

Il existe donc dans $\mathfrak{R}(a, C)$ un R_1 tel que:

$$R \subset R_1 \subset C \quad \text{et} \quad R \neq R_1 \neq C.$$

Or $R_1 \neq C$ entraîne $p, q \varepsilon (C-R_1)$ et $R \neq R_1$ entraîne $\overline{C-R} \neq \overline{C-R_1}$. Le continu $\overline{C-R_1}$ est donc un vrai sous-continu du continu $\overline{C-R}$ et celui-ci est sous-continu de K, car

$$\overline{C-R} = \overline{C-\overline{C-K}} \subset K.$$

Ainsi, le continu $\overline{C-R_1}$ unit p et q, tout en étant un vrai sous-continu de K, ce qui prouve que le continu K n'est pas irréductible entre ces deux points.

4. Conclusions. En résumé l'étude de l'ensemble I conduit à la classification suivante des continus irréductibles.

L'ensemble I est ou bien *ouvert* ou bien est un ensemble *frontière* dans C.

I. Si I est ouvert, alors C est non-borné, $\bar{I}$ est un continu indécomposable, $C-I$ est un continu saturé (exemple IV).

II. Si I est ensemble frontière il y a deux cas à distinguer:

II, 1. Si I n'est pas fermé, alors I n'est pas non-dense et $\bar{I}$ est un continu indécomposable (régulier dans C) (ex. III).

II, 2. Si I est *fermé* il y a encore deux cas possibles:

II, 2a. Si I est fermé, mais pas continu, I est non-borné et I est non-dense (ex. II).

II, 2b. Si I est un *continu*, c'est un continu de condensation (ex. I).

Comme on voit, les cas I et II 2a ne peuvent se présenter que parmi les continus non-bornés. Ainsi: *Si C est borné, I est ou bien un continu de condensation ou bien est un ensemble frontière non-fermé dont la fermeture $\bar{I}$ est un continu indécomposable régulier* (donc pas un continu de condensation).

§ 2. L'ensemble $K(p,C)$ et les continus de condensation saturés.

5. Définition. *$K(p,C)$ est l'ensemble de tous les points que l'on peut unir à p par des continus de condensation de C.*

Définition. *Q est dit continu de condensation saturé (par rapport à C), si Q est continu de condensation et n'est situé dans aucun autre continu de condensation de C.*

Exemples. Dans l'ex. I du N 1 l'ensemble $K(p,C)$ se réduit au point p si ce point a l'abscisse $\neq 0$.

Dans le cas où p est situé sur l'axe des y, l'ensemble $K(p,C)$ coïncide avec le segment vertical $(-1,1)$ de cet axe. Les ensembles $K(p,C)$ sont ici, en même temps, des continus de condensation saturés.

Si C est un continu indécomposable (comme dans l'ex. III) les ensembles $K(p,C)$ coïncident avec les composants de C. Si ces composants sont non-fermés (comme c'est toujours le cas pour C borné), il n'existe dans C aucun continu de condensation saturé. Cependant un composant fermé (v. ex. IV) est toujours un continu de condensation saturé, de-même qu'il est un „sous-continu saturé" de C.

Dans les exemples précédents deux cas se présentent: ou bien l'ensemble $K(p,C)$ est un continu de condensation ou bien sa fermeture est indécomposable. Mais ces cas ne sont pas les seuls possibles; on le verra sur les exemples suivants, qui — dans un certain sens — épuisent les singularités qui puissent se présenter.

Exemple V. C se compose du continu indécomposable III et d'un continu congruent qui n'a avec lui qu'un seul point commun p. Ici $\overline{K(p,C)}$, comme identique à C, n'est pas indécomposable, mais est somme de deux continus indécomposables.

Ex. VI. C se compose du continu indécomposable III et du continu, analogue à I, formé par la courbe $y=\sin\frac{1}{x}$, $-1\leq x<0$ et le segment vertical $x=0$, $-1\leq y\leq 1$, qui n'a avec le continu indécomposable que le point $p=(0,0)$ en commun. Ici l'ensemble $\overline{K(p,C)}$ se compose du continu indécomposable et du segment vertical. Cet ensemble n'est ni indécomposable ni somme de deux continus indécomposables. Cependant sa „partie régulière": $\overline{C-\overline{C-\overline{K(p,C)}}}$ est un continu indécomposable.

Dans le N 6 nous établissons les relations entre les notions de l'ensemble $K(p,C)$ et de continu de condensation saturé. Le N 7 concerne le cas spécial où $p=b$. La structure de l'ensemble $K(p,C)$ dans le cas général est étudiée dans le N 8.

6. Lemme. *Tous deux points d'un ensemble $K(p,C)$ se laissent unir par un continu de condensation; en d'autres termes: p_1 et p_2 étant deux points arbitraires de C, on a*

$$K(p_1,C)=K(p_2,C) \quad \textit{ou bien} \quad K(p_1,C)\cdot K(p_2,C)=0.$$

La démonstration résulte immédiatement du fait qu'un continu qui est somme de deux continus de condensation est lui-même un continu de condensation [1]).

Théorème VI. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point p soit situé sur un continu de condensation saturé est que l'ensemble $K(p,C)$ soit fermé (ou, ce qui revient au même, qu'il soit non-dense). Dans ce cas $K(p,C)$ est bien le continu de condensation saturé contenant p.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit Q le continu de condensation saturé contenant p. Je dis que

$$Q=K(p,C). \tag{1}$$

Evidemment $Q\subset K(p,C)$. Soit, d'autre part, $q\,\varepsilon\,K(p,C)$. Il s'agit de prouver que $q\,\varepsilon\,Q$. Comme $q\,\varepsilon\,K(p,C)$, il existe un continu de condensation Q_1 qui unit q à p. Le continu $Q+Q_1$, comme somme de deux continus de condensation est lui-même continu de condensation. Or, Q étant continu de condensation saturé, il vient $Q+Q_1\subset Q$, d'où $q\,\varepsilon\,Q$.

L'égalité (1) est donc démontrée. Elle prouve, en même temps, que $K(p,C)$ est un ensemble fermé et non-dense.

La condition est suffisante. Posons, pour abréger: $K=K(p,C)$. Supposons que K soit fermé. Comme K est, par définition, un semi-continu, on en conclut que K est un continu. Nous allons prouver que c'est un continu de condensation saturé.

Supposons d'abord que

$$\overline{C-K}\neq C. \tag{2}$$

[1]) Janiszewski *Sur les continus irréductibles*..., théor. VI; cf. ma note *Sur l'opération $\bar{A}$* Fund. Math. III, p. 191.

Il y a deux cas à distinguer:

1) $a \varepsilon K$. Comme $b \varepsilon C-K$, on a $b \varepsilon \overline{C-K}$ et, selon (i), $\overline{C-K}$ est un continu. La décomposition $C=\overline{C-K}+K$ prouve qu'il existe un point q du produit $K.\overline{C-K}$. Soit, conformément au lemme, Q un continu de condensation unissant a et q. La somme $Q+\overline{C-K}$ est donc un continu unissant a et b, d'où $Q+\overline{C-K}=C$, donc $C-Q \subset \overline{C-K}$ et $\overline{C-Q} \subset \overline{C-K}$. Or, Q étant un continu de condensation, on a $\overline{C-Q}=C$ et il vient $C \subset \overline{C-K}$, contrairement à (2).

2) Ni a ni b n'appartiennent à K. Selon le théor. II de *Irr.* I (p. 202), on a $\overline{C-K}=L+M$, L et M étant deux continus disjoints où $a \varepsilon L$ et $b \varepsilon M$. La décomposition $C=L+K+M$ prouve qu'il existe deux points: $q \varepsilon LK$ et $r \varepsilon KM$.

Soit Q un continu de condensation unissant q à r. Donc $L+Q+M=C$, d'où $C-Q \subset L+M$ et comme $L+M=\overline{C-K}$, il vient $C-Q \subset \overline{C-K}$ et $\overline{C-Q} \subset \overline{C-K}$, ce qui contredit l'inégalité (2), puisque $\overline{C-Q}=C$.

Il est ainsi établi que l'inégalité (2) entraîne une contradiction. Autrement dit: K est un continu de condensation. Il reste à prouver qu'il est saturé.

Mais cela résulte de la définition même de l'ensemble $K(p,C)$: l'ensemble K est somme de tous les continus de condensation qui contiennent p.

Remarquons enfin que si, au lieu de supposer l'ensemble $K(p,C)$ fermé, on le supposait non-dense, la conclusion serait la même. Car, l'hypothèse que $K(p,C)$ est non-dense entraîne que $\overline{K(p,C)}$ est encore non-dense, c'est-à-dire, que $\overline{K(p,C)}$ est un continu de condensation. Mais, par définition, de $K(p,C)$ on a alors $\overline{K(p,C)} \subset$ $\subset K(p,C)$. L'ensemble $K(p,C)$ est donc fermé.

7. **Théorème VII.** *L'ensemble $K(b,C)$ est un constituant de $I(a,C)$.*

Démonstration. Par définition, $K(b,C)$ est somme de tous les continus de condensation qui contiennent b. Chacun d'eux est — conformément au lemme 2 du N2 — contenu dans $I(a,C)$. Donc $K(b,C) \subset I(a,C)$.

$K(b,C)$ étant un semi-continu, il reste à prouver qu'il n'existe aucun semi-continu qui contienne $K(b,C)$, soit contenu dans $I(a,C)$

et soit différent de $K(b,C)$. Cela résulte immédiatement du fait que tout sous-continu de $I(a,C)$ est un continu de condensation de C (selon le même lemme 2).

Corollaires: 1. *Si $I(a,C)$ est fermé, $K(b,C)$ est un continu de condensation saturé;*

2. *Si $I(a,C)$ est continu, $K(b,C)=I(a,C)$;*

3. *Si $K(b,C)$ n'est pas fermé, on a $\overline{K(b,C)}=\overline{I(a,C)}$ et $\overline{K(b,C)}$ est un continu indécomposable dont $K(b,C)$ est un composant.*

Démonstration. 1. Si $I(a,C)$ est fermé, ses constituants sont des continus, donc selon le théor. VI, $K(b,C)$ est un continu de condensation saturé.

2. Si $I(a,C)$ est un continu, il est, lui-même, son constituant, donc selon le théor. VII: $K(b,C)=I(a,C)$.

3. Si $K(b,C)$ n'est pas fermé, $I(a,C)$ ne l'est non plus (selon le cor. 1. démontré tout-à-l'heure). Selon le théor. II, $\overline{I(a,C)}$ est un continu indécomposable et tout constituant de $I(a,C)$ forme un composant de $\overline{I(a,C)}$ (v. remarques au théor. II). Donc $K(b,C)$ est un composant de $I(a,C)$ et, comme tout composant non-fermé d'un continu indécomposable est dense dans ce continu [1]), il vient $\overline{K(b,C)}=\overline{I(a,C)}$.

8. **Théorème VIII.** $K(p,C) \subset I(a,R(p))+I(b,S(p))$.

Démonstration. Posons, pour abréger, $K(p,C)=K$, $R(p)=R$, $S(p)=S$. Il y a trois cas à distinguer.

1) $KS=0$. Comme $C=R+S$, on en tire $K \subset R$. Comme, d'autre part, $p \varepsilon K$, il vient p non εS, donc S ne peut être irréductible entre b et p et conformément à la définition de $R(p)$ et $S(p)$, on conclut que R est irréductible entre a et p. En symboles:

$$p \varepsilon I(a,R). \tag{3}$$

Or, R étant régulier, tout sous-continu de R qui est continu de condensation de C est, en même temps, continu de condensation de R [2]). Donc $K(p,R)=K(p,C)=K$.

En s'appuyant sur (3) on déduit du théor. VII l'inclusion: $K(p,R) \subset I(a,R)$, $\subset$ d'où $K\, I(a,R)$.

[1]) Voir: Fund. Math. V, p. 46.

[2]) Voir: Fund. Math. III, p. 194, cor. 4.

2) $KR=0$. On en conclut, comme auparavant, que $K\subset S$ et que S est un continu régulier irréductible entre b et p (puisque p *non* εR). Il vient $K\subset I(b,S)$.

3) $KR\neq 0\neq KS$. Il existe donc un continu Q tel que:

(4) $$\overline{C-Q}=C,$$

(5) $$RQ\neq 0\neq SQ.$$

Je vais prouver que

(6) $$RQ\subset I(a,R),$$

ce qui revient à dire que, si L est un continu assujetti aux conditions:

(7) $$a\,\varepsilon\, L\subset R \quad \text{et} \quad LQR\neq 0,$$

alors

(8) $$L=R.$$

Or, selon (5) et (7), $L+Q+S$ est un continu unissant a et b. Donc $L+Q+S=C$, d'où $C-Q\subset L+S$, donc $\overline{C-Q}\subset L+S$ et, en vertu de (4): $C\subset L+S$. On en tire $C-S\subset L$, donc $\overline{C-S}\subset L$ et, comme $\overline{C-S}=R$, il vient $R\subset L$. En raison de (7) on en déduit l'égalité (8).

L'inclusion (6) est donc établie. On prouve d'une façon analogue que

(9) $$SQ\subset I(b,S).$$

En ajoutant les inclusions (6) et (9) et en rappelant que $R+S=C$, on obtient $Q\subset I(a,R)+I(b,S)$.

Or, q étant un point donné de $K(p,C)$, on peut faire passer le continu Q par ce point, sans que les conditions (4) et (5) cessent d'être vérifiées. Il vient $q\,\varepsilon\,[I(a,R)+I(p,S)]$, donc $K\subset I(a,R)+I(b,S)$.

Corollaire. *Si* $I(a,R(p))$ *et* $I(b,S(p))$ *sont des continus, on a:*

$$K(p,C)=I(a,R(p))+I(b,S(p)).$$

D é m o n s t r a t i o n. Comme auparavant nous écrirons K, R, S au lieu de $K(p,C)$, $R(p)$ et $S(p)$. Vu le théor. VIII, il s'agit de prouver que $I(a,R)+I(b,S)\subset K$.

En s'appuyant sur le théor. VIII, on conclut que $KI(a,R)\neq 0$ ou bien $KI(b,S)\neq 0$.

Supposons que $KI(a,R)\neq 0$. L'ensemble $I(a,R)$, comme continu, est selon le corollaire du théor. IV, un continu de condensation. Par conséquent:

(10) $$I(a,R)\subset K.$$

Si $S=0$, on a $I(b,S)=0$ et notre corollaire est démontré. Soit donc $S\neq 0$. La décomposition $C=R+S$ donne par conséquent $RS\neq 0$ et comme (selon (*iv*)) $RS=I(a,R).I(b,S)$, il vient $I(a,R).I(b,S)\neq 0$, d'où en raison de (10): $K.I(b,S)\neq 0$. On en conclut, comme auparavant, que $I(b,S)\subset K$.

Ainsi, dans l'hypothèse que $K.I(a,R)\neq 0$ notre corollaire est démontré. Il en est de même, si l'on suppose $K.I(b,S)\neq 0$.

Le corollaire est donc démontré complètement.

Nous établirons à présent le principal théorème concernant la structure de l'ensemble $K(p,C)$.

Théorème IX. $K(p,C)$ *est d'une des trois formes suivantes:*

1°: $K(p,C)$ *est un continu de condensation;*

2°: $\overline{C-\overline{C-\overline{K(p,C)}}}$ *(partie régulière de* $\overline{K(p,C)}$*) est un continu indécomposable (régulier);*

3°: $\overline{K(p,C)}$ *est somme de deux continus indécomposables (réguliers).*

D é m o n s t r a t i o n. Posons $K=K(p,C)$, $R=R(p)$, $S=S(p)$. L'identité $C=R+S$ donne:

(11) $$K=KR+KS.$$

D'après le théor. VIII:

$$K\subset I(a,R)+I(b,S),$$

d'où

$$KR\subset R.I(a,R)+R\ I(b,S),$$

mais $R.I(b,S)\subset RS$, d'où, selon (*iv*), $R.I(b,S)\subset RS\subset I(a\ R)$.

Ainsi:

(12) $$KR\subset I(a,R)$$

et de même:

(13) $$KS\subset I(b,S).$$

Il y a trois cas à distinguer, qui correspondent aux propositions 1°—3°.

1. KR et KS sont non-denses (dans C).

Par conséquent, leur somme, K, est également non-dense[1]) et, en raison du théor. VI, K est un continu de condensation.

2. L'un des deux ensembles KR ou KS est non-dense tandisque l'autre ne l'est pas.

On peut supposer, p. ex., que KR est non-dense et KS ne l'est pas.

D'après (11): $\overline{K} = \overline{KR} + \overline{KS}$. Désignons par T la partie régulière de $\overline{K}$. Or, la somme des parties régulières de deux ensembles fermés étant égale à la partie régulière de la somme[2]), on en conclut que T est somme de la partie régulière de $\overline{KR}$ et de celle de $\overline{KS}$. Mais la première est vide, car[3]) $\overline{KR}$ est, par hypothèse, non-dense. Ainsi, T est la partie régulière de $\overline{KS}$, donc

(14) $$T \subset \overline{KS}.$$

De plus, KS n'étant pas non-dense, sa partie régulière n'est pas un continu de condensation. Ainsi, l'ensemble T, qui est un continu — comme partie régulière du continu $\overline{K}$[4]) — n'est pas un continu de condensation.

Les inclusions (14) et (13) montrent que T est un sous-continu de $\overline{I(b,S)}$. Or, KS n'étant pas non-dense, il en est de même, en vertu de (13), de $I(b,S)$ et on conclut du théor. IV que $I(b,S)$ n'est pas fermé. Donc, selon le théor. II, $\overline{I(b,S)}$ est un continu indécomposable.

Nous arrivons ainsi à la conclusion que T est un sous-continu du continu indécomposable $\overline{I(b,S)}$ et, en même temps, T n'est pas continu de condensation de C, donc — a fortiori — de $\overline{I(b,S)}$. Or, tout sous-continu d'un continu indécomposable en est continu de condensation excepté le cas où le sous-continu est identique au continu indécomposable tout entier[5]). C'est donc le cas de T.

Ainsi: $T = \overline{I(b,S)}$, ce qui prouve que T est un continu indécomposable.

[1]) V. Fund. Math. III, p. 188, théor. 8.

[2]) V. ma note des Fund. Math. V, p. 117, proposition (γ).

[3]) La partie régulière d'un ensemble X fermé non-dense est vide, puisque $\overline{C-X} = C$, d'où $\overline{C-\overline{C-X}} = \overline{C-C} = 0$.

[4]) D'après le théor. V de *Irr.* I, p. 205.

[5]) Fund. Math. I, p. 212, théor. II.

3. Ni KR ni KS ne sont non-denses dans C.

On conclut, comme auparavant, des inclusions (12) et (13) que ni $I(a,R)$ ni $I(b,S)$ ne sont non-denses, donc que $\overline{I(a,R)}$ et $\overline{I(b,S)}$ sont des continus indécomposables (réguliers).

Nous allons prouver que

(15) $$K = \overline{I(a,R)} + \overline{I(b,S)}.$$

En tenant compte du théor. VIII, il suffit de prouver que

(16) $$\overline{I(a,R)} \subset \overline{K} \quad \text{et} \quad \overline{I(b,S)} \subset \overline{K}.$$

Nous établirons la seconde de ces inclusions, la démonstration de la première étant tout-à-fait analogue.

Par hypothèse: $KR \neq 0$. L'ensemble $A = R + \overline{K}$ est donc un continu. D'autre part, $RS \neq 0$ et $RS \subset R\,I(b,S)$, donc l'ensemble $B = R + \overline{I(b,S)}$ est aussi un continu. Comme somme de deux continus réguliers, B est régulier et appartient à la classe $\mathfrak{R}(a,C)$. Par conséquent, B est irréductible entre a et un autre point (voir (*ii*)).

A est un sous-continu de B, car (selon le théor. VIII):

$$A = R + \overline{K} \subset R + \overline{I(a,R)} + \overline{I(b,S)} \subset R + \overline{I(b,S)} = B.$$

On en conclut, en vertu de (*i*), que $\overline{B-A}$ est un continu régulier dans B, donc dans C, puisque[1]) B est régulier dans C.

En outre, $\overline{B-A}$ est sous-continu de $\overline{I(b,S)}$, car

(17) $$B-A = [R+\overline{I(b,S)}] - [R+\overline{K}] = \overline{I(b,S)} - [R+\overline{K}] \subset \overline{I(b,S)}.$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que $\overline{B-A}$ est un sous-continu du continu indécomposable $\overline{I(b,S)}$. Le continu $\overline{B-A}$, comme régulier, est ou bien vide ou bien n'est pas continu de condensation de C (donc de $\overline{I(b,S)}$). Tout vrai sous-continu d'un continu indécomposable étant continu de condensation, il en résulte que

$$\text{ou bien} \quad \overline{B-A} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \overline{B-A} = \overline{I(b,S)}.$$

La seconde de ces égalités ne peut se présenter, car on en conclurait en vertu de (17) que $(R+\overline{K})\cdot\overline{I(b,S)}$ est non-dense dans

[1]) V. Fund. Math. III, p. 194.

$\overline{I(b,S)}$, mais alors en raison des inclusions: (13) et $KS \subset K$, KS serait non-dense, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi $\overline{B-A}=0$, d'où $B-A=0$ et selon (17): $\overline{I(b,S)} \subset R+\overline{K}$. Par suite: $\overline{I(b,S)}-R \subset \overline{K}$, d'où $\overline{\overline{I(b,S)}-R} \subset \overline{K}$. Or, RS est non-dense, puisque l'ensemble $RS = R\,\overline{C-R}$ est la frontière de R (dans C). Comme $R.\overline{I(b,S)} \subset RS$, l'ensemble $R.\overline{I(b,S)}$ est également non-dense dans C, donc dans $\overline{I(b,S)}$, puisque $\overline{I(b,S)}$ est régulier. Par conséquent $\overline{\overline{I(b,S)}-R} = \overline{I(b,S)}$ et on obtient facilement $\overline{I(b,S)} \subset \overline{K}$. C'est la deuxième des inclusions (16).

Comme nous l'avons dit, on en déduit l'égalité (15), qui prouve que $\overline{K}$ est somme de deux continus indécomposables réguliers.

R e m a r q u e. Chacun des trois cas énoncés dans le théorème précédent peut effectivement se présenter, comme le prouvent les exemples I, VI et V.

§ 3. La décomposition des continus irréductibles en tranches [1]).

9. Considérons la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ ordonée selon la grandeur croissante de ses éléments. Son type d'ordre est — d'après un théorème de *Irr.* I (p. 217) — celui d'un ensemble fermé situé dans l'intervalle 01 et contenant les extrémités de cet intervalle. Soit L cet ensemble fermé; convenons que ξ soit une variable qui parcourt L. Il est bien naturel de mettre les éléments de la classe $\mathfrak{R}(a,C)$ sous la forme R_ξ; de sorte que

(1) $$\text{si } \xi_1<\xi_2, \text{ on a: } R_{\xi_1}\subset R_{\xi_2},\quad R_{\xi_1}\neq R_{\xi_2},$$
$$S_{\xi_1}\supset S_{\xi_2},\quad S_{\xi_1}\neq S_{\xi_2},$$
$$S_\xi=\overline{C-R_\xi}.$$

Posons, pour abréger:

$$I_\xi=I(a,R_\xi),\quad J_\xi=I(b,S_\xi).$$

Notons les formules suivantes, qui nous seront utiles dans la suite:

La formule *(iv)* (p. 231) peut s'écrire, à présent, de cette façon:

(2) $$R_\xi S_\xi=I_\xi J_\xi.$$

[1]) Le § 3 a été écrit par M. Knaster et moi conjointement.

En s'appuyant sur (1), on en conclut que

(3) $$\text{si } \xi_1\subset\xi_2, \text{ on a } R_{\xi_1}.I_{\xi_2}=0=S_{\xi_2}.J_{\xi_1} \text{ et } R_{\xi_1}.S_{\xi_2}=0.$$

En effet, la double égalité résulte immédiatement de la définition de l'ensemble $I(a,R)$. D'autre part: $R_{\xi_1}.S_{\xi_2}\subset R_{\xi_2}.S_{\xi_2}\subset I_{\xi_2}$ selon (2) et, comme $R_{\xi_1}.I_{\xi_2}=0$, il vient $R_{\xi_1}.S_{\xi_2}=0$.

En vertu des inclusions

(4) $$I_\xi\subset R_\xi \quad\text{et}\quad J_\xi\subset S_\xi,$$

on déduit de (3) que

(5) $$\text{si } \xi_1<\xi_2, \text{ on a } I_{\xi_1}I_{\xi_2}=0=J_{\xi_1}J_{\xi_2}.$$

Nous établirons, en outre, les deux propositions:

(6) $$\text{si } \xi_1<\xi_2, \text{ on a } I_{\xi_1}J_{\xi_2}=0,$$

(7) $$\text{si } \xi_1<\xi_2<\xi_3, \text{ on a } I_{\xi_3}J_{\xi_1}=0.$$

En effet, d'après (4): $I_{\xi_1}J_{\xi_2}\subset R_{\xi_1}S_{\xi_2}$ et d'après (3): $R_{\xi_1}S_{\xi_2}=0$. Par conséquent: $I_{\xi_1}J_{\xi_2}=0$.

Pour prouver (7), remarquons que l'on a, en vertu de la formule (3): $S_{\xi_2}J_{\xi_1}=0$, d'où $J_{\xi_1}\subset C-S_{\xi_2}\subset R_{\xi_2}$. Or, d'après (3): $R_{\xi_2}I_{\xi_3}=0$. La formule (7) en résulte immédiatement.

D'après un théor. de *Irr.* I (p. 221), pour tout point p de C il existe soit dans $\mathfrak{R}(a,C)$ un continu irréductible entre a et p, soit dans $\mathfrak{R}(b,C)$ un continu irréductible entre b et p. On a donc, en symboles:

(8) $$C=\sum_{\xi\varepsilon L}\{I_\xi+J_\xi\}.$$

10. Considérons le cas où l'ensemble L est indénombrable; la partie parfaite P de L n'est donc pas vide.

Il existe alors une fonction $\varphi(\xi)$ continue, non-décroissante, qui transforme L dans l'intervalle $0\leq x\leq 1$; nous supposons, en outre, que cette fonction est c r o i s s a n t e dans l'ensemble de tous les points qui appartiennent à P et ne sont pas des extrémités d'intervalles contigus à P. Ainsi, si ξ_1 et ξ_2 sont les extrémités d'un intervalle contigu à P, on a $\varphi(\xi)=\varphi(\xi_1)$ pour $\xi_1\leq\xi\leq\xi_2$.

Désignons, en général, pour tout x de l'intervalle 01, par $\gamma(x)$ le premier et par $\Gamma(x)$ le dernier ξ tel que $\varphi(\xi)=x$.

Il importe de remarquer que:

(9) *si* $\xi < \gamma(x)$, *il existe un* ξ_1 *tel que* $\xi < \xi_1 < \gamma(x)$,

(10) *pour tout* x, *l'ensemble des* ξ *tels que* $\gamma(x) \leq \xi \leq \Gamma(x)$ *est fini ou dénombrable*; autrement dit, l'ensemble des arguments ξ auxquels correspond la même valeur $x = \varphi(\xi)$ est au plus dénombrable.

Lorsque $\gamma(x) \neq \Gamma(x)$, ces nombres sont les extrémités d'un même intervalle contigu à P. Lorsque $\gamma(x) = \Gamma(x)$, $\gamma(x)$ appartient à P et n'est pas extrémité d'aucun intervalle contigu.

La fonction φ n'a été définie, jusqu'à présent, que pour le cas où L est indénombrable. Afin d'étendre sa définition au cas de L au plus dénombrable, nous posons dans ce dernier cas: $\varphi(\xi) = 0$ identiquement et $\gamma(x) = 0$, $\Gamma(x) = 1$.

Définition. *J'appelle tranche du continu C l'ensemble*

$$T_x = \prod_{\xi > \Gamma(x)} R_\xi \cdot \prod_{\xi < \gamma(x)} S_\xi$$

l'indice x variant de 0 à 1 ou bien étant constamment nul suivant que L est indénombrable ou ne l'est pas.

Nous convenons que:

$$\prod_{\xi > 1} R_\xi = C = \prod_{\xi < 0} S_\xi .$$

Exemples. Dans la courbe $\sin \frac{1}{x}$ (v. ex. I, p. 230), la tranche T_0 est formée par le segment vertical; toutes les autres se réduisent à des points individuels. On a, dans ce cas, $\gamma(0) = \Gamma(0)$ et on peut supposer, qu'en général: $\gamma(x) = \Gamma(x) = x$, puisque $L =$ l'intervalle 01.

Le cas de la courbe $\sin \frac{1}{x}$ „condensée" (v. introduction p. 226) est tout à fait analogue. L'ensemble L est dans ce cas l'intervalle 01. Il y a une infinité dénombrable de tranches composées de segments; les autres se réduisent à des points.

En général, dans le cas où L coïncide avec l'intervalle 01, les tranches peuvent être définies d'une façon plus simple. Nous y reviendros dans le N 16.

Comme exemple du continu qui se réduise à une seule tranche, on peut considérer tout continu indécomposable. D'une façon analogue, un continu formé par la réunion de deux continus indécomposables ayant un seul point commun ne contient qu'une seule tranche.

Envisageons encore l'exemple suivant. Soit $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, ... une suite infinie de continus indécomposables irréductibles entre a_1 et a_2, a_2 et a_3 etc. et chacun ayant avec le suivant un seul point commun et n'ayant aucun point commun avec les autres. Supposons que ces continus convergent vers un point p. Soit, d'autre part, $(b_1 b_2)$, $(b_2 b_3)$, ... une suite tout à fait analogue de continus indécomposables qui convergent également vers p. Supposons enfin que les continus de la deuxième suite n'ont aucun point commun avec ceux de la première et que le point p n'est situé sur aucun continu des deux suites.

Le continu composé de ces continus indécomposables et du point p forme une seule tranche. (Son type ordinal est $\omega + 1 + \omega^*$).

Considérons enfin l'exemple suivant, où l'ensemble L est indénombrable, bien que les continus indécomposables forment un ensemble dense dans C.

Interposons dans chaque intervalle contigu à l'ensemble parfait non-dense de Cantor un continu indécomposable qui soit irréductible entre les extrémités de cet intervalle (nous supposons le diamètre de ce cont. indécomposable égal à l'intervalle [1]). Tous ces continus + l'ensemble de Cantor constituent le continu cherché. Sur cet exemple il y a une infinité dénombrable de tranches dont chacune est un continu indécomposable. Toutes les autres se réduisent à des points.

11. Théorème X. *Les tranches sont des ensembles fermés non-vides et disjoints dont la somme est égale à C. On a*

(11) $$T_x = \sum_{\gamma(x) \leq \xi \leq \Gamma(x)} \{I_\xi + J_\xi\}.$$

Démonstration. Nous allons prouver d'abord que les tranches sont disjointes. Soit donc $x_1 < x_2$. Par suite: $\Gamma(x_1) < \gamma(x_2)$ et il existe, selon (9), deux nombres ξ_1 et ξ_2 tels que

(12) $$\Gamma(x_1) < \xi_1 < \xi_2 < \gamma(x_2).$$

On en conclut que

$$\prod_{\xi > \Gamma(x_1)} R_\xi \subset R_{\xi_1} \quad \text{et} \quad \prod_{\xi < \gamma(x_2)} S_\xi \subset S_{\xi_2}.$$

Donc, par définition de tranche, $T_{x_1} \cdot T_{x_2} \subset R_{\xi_1} \cdot S_{\xi_2}$ et comme, selon (3), $R_{\xi_1} S_{\xi_2} = 0$, il vient $T_{x_1} \cdot T_{x_2} = 0$, ce qui prouve que les tranches sont disjointes.

Je dis que

(13) $$\sum_{\gamma(x) \leq \xi \leq \Gamma(x)} \{I_\xi + J_\xi\} \subset T_x.$$

[1]) C'est un cas particulier des constructions décrites dans *Irr.* I, p. 217.

Soit, en effet, $\Gamma(x) < \xi'$. On a donc, pour $\xi \leqslant \Gamma(x)$:

(14) $$I_\xi \subset R_\xi \subset R_{\xi'}.$$

D'autre part, soit $\xi'' < \gamma(x)$. On a donc pour $\gamma(x) \leqslant \xi$: $R_{\xi''} . I_\xi = 0$ (en vertu de (3)). D'où $I_\xi \subset C - R_{\xi''}$ et

(15) $$I_\xi \subset S_{\xi''}.$$

Les inclusions (14) et (15) entraînent:

$$\sum_{\gamma(x) \leq \xi \leq \Gamma(x)} I_\xi \subset \prod_{\Gamma(x) < \xi'} R_{\xi'} \cdot \prod_{\xi'' < \gamma(x)} S_{\xi''} = T_x.$$

Une formule identique subsiste lorsqu'on remplace I_ξ par J_ξ. L'inclusion (13) en résulte immédiatement.

En s'appuyant sur (13) et (8) on conclut que

$$C = \sum_{0 \leq x \leq 1} T_x.$$

D'autre part, l'égalité $I_\xi = 0$ n'a lieu que lorsque $R_\xi = 0$. Mais alors $S_\xi \neq 0$ et $J_\xi \neq 0$. Donc, en tout cas, $I_\xi + J_\xi \neq 0$ ce qui entraîne, en raison de (13): $T_x \neq 0$.

Il est ainsi établi que les tranches sont fermées (comme produits d'ensembles fermés) non-vides, disjointes et que leur somme est égale à C. Pour que notre théorème soit démontré complètement, il reste à prouver l'inclusion inverse à (13).

Mais on voit aussitôt que cette inclusion inverse résulte directement des inclusions (8) et (13) et du fait que les tranches sont disjointes.

Lemme 1.

$$\sum_{x \lhd x_0} T_x = R_{\gamma(x_0)} - I_{\gamma(x_0)}$$

$$\sum_{x \rhd x_0} T_x = S_{\Gamma(x_0)} - J_{\Gamma(x_0)}.$$

Démonstration. Posons, pour abréger, $\gamma(x_0) = \gamma$. En vertu de (11), on a $\sum_{x \lhd x_0} T_x = \sum_{\xi < \gamma} (I_\xi + J_\xi)$. Il s'agit de prouver que

(16) $$\sum_{\xi < \gamma} (I_\xi + J_\xi) = R_\gamma - I_\gamma.$$

Or, soit $\xi < \gamma$. Il existe, selon (9), un ξ_1 tel que $\xi < \xi_1 < \gamma$. On a donc, selon (3) et (4): $I_\xi \subset R_{\xi_1}$ et $S_{\xi_1} J_\xi = 0$, d'où $J_\xi \subset C - S_{\xi_1} \subset R_{\xi_1}$. Ainsi: $I_\xi + J_\xi \subset R_{\xi_1}$. En même temps (d'après (3)): $R_{\xi_1} I_\gamma = 0$. Par conséquent $I_\xi + J_\xi \subset R_{\xi_1} - I_\gamma \subset R_\gamma - I_\gamma$, quel que soit ξ. Autrement dit:

(17) $$\sum_{\xi < \gamma} (I_\xi + J_\xi) \subset R_\gamma - I_\gamma.$$

Pour prouver l'inclusion inverse, posons $p \,\varepsilon\, R_\gamma - I_\gamma$ et admettons en raison de (8), que $p \,\varepsilon\, I_\xi + J_\xi$. Il s'agit de prouver que $\xi < \gamma$.

Or, lorsque $p \,\varepsilon\, I_\xi$, on a $p \,\varepsilon\, R_\xi$ et, comme par hypothèse $p \,\varepsilon\, R_\gamma$, on en conclut que $R_\xi \subset R_\gamma$ et $R_\xi \neq R_\gamma$ (puisque p *non* $\varepsilon\, I_\gamma$). Donc $\xi < \gamma$.

Lorsque $p \varepsilon J_\xi$, on a $p \varepsilon S_\xi$. L'hypothèse $p \,\varepsilon\, R_\gamma - I_\gamma$ donne (selon (2)): $p \,\varepsilon\, C - S_\gamma$. Par conséquent $S_\gamma \subset S_\xi$ et $S_\gamma \neq S_\xi$. Donc $\xi < \gamma$.

L'inclusion inverse à (17) est donc démontrée. L'identité (16) en découle immédiatement, ce qui achève la démonstration de la première partie du lemme. La seconde s'en obtient par raison de symétrie.

Lemmme 2. *Les ensembles* $\sum_{x \lhd x_0} T_x$ *et* $\sum_{x \rhd x_0} T_x$ *sont deux semi-continus séparés* [1]) (dont l'un ou l'autre peut d'ailleurs s'annuler).

Démonstration. En vertu du lemme 1, on a

$$\sum_{x \lhd x_0} T_x \cdot \overline{\sum_{x \rhd x_0} T_x} = [R_{\gamma(x_0)} - I_{\gamma(x_0)}] \cdot \overline{S_{\Gamma(x_0)} - J_{\Gamma(x_0)}} \subset R_{\gamma(x_0)} \cdot S_{\Gamma(x_0)} - I_{\gamma(x_0)}.$$

Or,

$$S_{\Gamma(x_0)} \subset S_{\gamma(x_0)} \quad \text{et} \quad R_{\gamma(x_0)} \cdot S_{\gamma(x_0)} \subset I_{\gamma(x_0)}.$$

Il vient $\sum_{x \lhd x_0} T_x . \overline{\sum_{x \rhd x_0} T_x} = 0$ et de même $\overline{\sum_{x \lhd x_0} T_x} . \sum_{x \rhd x_0} T_x = 0$. Les ensembles $\sum_{x \lhd x_0} T_x$ et $\sum_{x \rhd x_0} T_x$ sont donc séparés. Comme identiques resp. aux ensembles $[R_{\gamma(x_0)} - I_{\gamma(x_0)}]$ et $[S_{\Gamma(x_0)} - J_{\Gamma(x_0)}]$, ils sont des semi-continus (v. p. 232).

Lemme 3. $T_x = I_{\gamma(x)} + R_{\Gamma(x)} . S_{\gamma(x)} + J_{\Gamma(x)}$.

Démonstration. Posons, pour abréger $\gamma(x) = \gamma$ et $\Gamma(x) = \Gamma$. En multipliant les identités $C = R_\gamma + S_\gamma$ et $C = R_\Gamma + S_\Gamma$ on a:

[1]) Les ensembles X et Y sont dits séparés, lorsque $X\overline{Y} = 0 = \overline{X}Y$.

$C = R_\gamma + R_\Gamma \cdot S_\gamma + S_\Gamma$, car, l'inégalité $\gamma \leqslant \Gamma$ donne selon (1), $R_\gamma R_\Gamma = R_\gamma$, $S_\gamma S_\Gamma = S_\Gamma$ et $R_\gamma \cdot S_\Gamma \subset R_\Gamma \cdot S_\gamma$.

On a donc évidemment la décomposition:

$$C = [R_\gamma - I_\gamma] + [I_\gamma + R_\Gamma \cdot S_\gamma + J_\Gamma] + [S_\Gamma - J_\Gamma].$$

Ces trois sommandes sont disjoints, car

$$R_\gamma J_\Gamma \subset R_\gamma S_\Gamma \subset R_\gamma S_\gamma \subset I_\gamma.$$

En outre, le premier est, selon le lemme 1, égal à $\sum_{y \lhd x} T_y$; le troisième est égale à $\sum_{y \rhd x} T_y$. On en conclut en vertu du th. X que le second est égal à T_x.

Théorème XI. *Si C est borné*[1]), *ses tranches sont des continus.*

D é m o n s t r a t i o n. Posons dans le lemme 3, $\gamma(x) = \gamma$ et $\Gamma(x) = \Gamma$. Nous avons donc la décomposition $T_x = I_\gamma + R_\Gamma \cdot S_\gamma + J_\Gamma$. La tranche étant un ensemble fermé (théor. X), on a donc:

$$T_x = \overline{I}_\gamma + R_\Gamma \cdot S_\gamma + \overline{J}_\Gamma. \tag{18}$$

Il y a deux cas à distinguer, 1°: $\gamma < \Gamma$ et 2°: $\gamma = \Gamma$.

1°: Je dis que chacun des trois sommandes de l'égalité (18) est un continu. Quant au premier est dernier, on n'a qu'à tenir compte de l'hypothèse que C est borné (voir N 4). Pour prouver que $R_\Gamma \cdot S_\gamma$ est un continu, on applique le calcul suivant:

$$R_\Gamma \cdot S_\gamma = R_\Gamma \cdot \overline{C - R_\gamma} = R_\Gamma \cdot \overline{(R_\Gamma + S_\Gamma) - R_\gamma};$$

mais, selon (3), $S_\Gamma \cdot R_\gamma = 0$. Donc $(R_\Gamma + S_\Gamma) - R_\gamma = (R_\Gamma - R_\gamma) + S_\Gamma$. D'autre part, $R_\Gamma \cdot \overline{R_\Gamma - R_\gamma} = \overline{R_\Gamma - R_\gamma}$ et $R_\Gamma \cdot S_\Gamma \subset R_\Gamma - R_\gamma$. Il vient finalement: $R_\Gamma S_\gamma = \overline{R_\Gamma - R_\gamma}$. Or, le continu R_γ contient le point a (à moins qu'il ne soit vide); donc[2]) $\overline{R_\Gamma - R_\gamma}$ est un continu.

Il est ainsi établi que T_x se compose de trois continus. En outre, la somme des deux premiers est un continu. Car, si l'on suppose que $I_\gamma \neq 0$, on a $R_\gamma S_\gamma \neq 0$ et $R_\gamma S_\gamma \subset I_\gamma \cdot [R_\Gamma \cdot S_\gamma]$ selon (2) et (1); donc $\overline{I}_\gamma \cdot [R_\Gamma \cdot S_\gamma] \neq 0$.

[1]) Pour C non-borné le théorème est en défaut (voir ex. II, p. 230). M. K n a s t e r a même construit un continu irréductible dont a u c u n e tranche n'est un continu. Voir sa Note *„Sur quelques problèmes de topologie“*, à paraître.

[2]) V. *Irr.* I. p. 203.

De même $R_\gamma \cdot S_\gamma + \overline{J}_\Gamma$ est un continu. Donc T_x est un continu.

2. Dans le cas $\gamma = \Gamma$, on a $T_x = \overline{I}_\gamma + \overline{J}_\gamma$ (en vertu de (2)), somme de deux continus. Si l'on suppose $I_\gamma \neq 0 \neq J_\gamma$, il vient $R_\gamma \neq 0 \neq S_\gamma$ et évidemment $R_\gamma S_\gamma \neq 0$. D'où (en raison de (2)): $\overline{I}_\gamma \cdot \overline{J}_\gamma \neq 0$, ce qui prouve que T_x est un continu.

Définition. *Nous appelons „indice du point p“ le nombre $i(p)$ tel que $p \,\varepsilon\, T_{i(p)}$.*

En vertu du théor. X l'indice est bien défini pour tout point p de C (et varie de 0 à 1, lorsque L est indénombrable, et reste nul en cas contraire).

Théorème XII. *La fonction $i(p)$ est continue.*

D é m o n s t r a t i o n. Il s'agit de prouver que les formules

$$\lim_{n=\infty} p_n = p \tag{19}$$

$$\lim_{n=\infty} i(p_n) = z \tag{20}$$

entraînent: $z = i(p)$. Supposons, par contre, que par ex. $i(p) < z$. Soit y un nombre tel que

$$i(p) < y < z. \tag{21}$$

Donc, pour n suffisamment grand, la formule (20) donne $i(p_n) > y$; c'est-a-dire que: $p_n \,\varepsilon \sum_{x \rhd y} T_x$. Il en résulte en raison de (19):

$$p \,\varepsilon\, \overline{\sum_{x \rhd y} T_x}. \tag{22}$$

D'autre part, l'inégalité (21), donne

$$p \,\varepsilon \sum_{x \lhd y} T_x. \tag{23}$$

On arrive ainsi à une contradiction, car les formules (22) et (23) prouvent que les ensembles $\sum_{x \lhd y} T_x$ et $\sum_{x \rhd y} T_x$ ne sont pas séparés, contrairement au lemme 2.

La fonction $i(p)$ est donc continue.

12. Une décomposition d'un ensemble fermé E en sous-ensembles disjoints est dite *semi-continue*[1]), lorsque pour toute suite

[1]) Cf. R. L. M o o r e, Trans. Amer. Math. Soc. 27, 1925; P. A l e x a n d r o f f, Proc. Akad. Wett. 28, Amsterdam 1925; L. V i e t o r i s, ibid. vol. 29, 1926. Voir aussi ma note sur les décompositions semi-continues qui va paraître dans Fund. Math

$G_1, G_2, \ldots G_n \ldots$ de ces sous-ensembles la condition $[G_0 \,\mathrm{Lim\,inf}\, G_n] \neq 0$ entraîne $[\mathrm{Lim\,sup}\, G_n] \subset G_0$ (autrement dit: lorsque les conditions $g_n \varepsilon G_n$, $g'_n \varepsilon G_n$, $g_0 = \lim g_n$, $g' = \lim g'_n$ entraînent $g' \varepsilon G_0$).

Soit $f(p)$ une fonction continue définie pour tout point p de E. Désignons par $G(x)$ la fonction **inverse** à $f(p)$; c'est à dire $G(x)$ fait correspondre à tout x qui est valeur de la fonction f l'ensemble des arguments p tels que $f(p) = x$. (On écrit parfois $f^{-1}(x)$ à la place de $G(x)$). On voit aussitôt que la famille de tous les ensembles $G(x)$ présente une décomposition semi-continue de l'ensemble E.

T_x étant évidemment la fonction inverse à la fonction $i(p)$, définie p. 225, on a, en vertu du théor. XII, le suivant

Théorème XIII. *La décomposition du continu C en tranches T_x est une décomposition semi-continue.*

Bien entendu, ladite décomposition du continu C n'est pas la seule décomposition semi-continue possible; on obtient, par ex., une autre en réunissant une „portion" de tranches en une seule. Les considérations qui vont suivre ont pour but de prouver que la décomposition en tranches T_x ne peut être — dans un sens qui va être précisé — poussée plus loin.

Supposons qu'un ensemble fermé et borné E soit décomposé en sous-ensembles (nous les appellerons tranches de E) d'une façon semi-continue. On peut alors considérer la famille $\mathcal{H}$ de toutes les tranches comme formant un „hyper-espace", notamment, en regardant un „point" (tranche) G_0 comme „limite" d'une suite $\{G_n\}$ lors que $[G_0 . \mathrm{Lim\,inf}\, G_n] \neq 0$. Si cet hyper-espace est homéomorphe à un ensemble linéaire, la décomposition sera dite *linéaire.*

Or, considérons le cas de décomposition semi-continue linéaire. Soit F l'ensemble linéaire auquel l'hyper-espace $\mathcal{H}$ est homéomorphe. Posons: $f(p) =$ le point de F qui correspond à la tranche contenant p. Nous définissons ainsi une fonction continue qui transforme E en F. En définissant $G(x)$ comme fonction inverse à $f(p)$, la famille des ensembles $G(x)$, $x \varepsilon F$, est évidemment identique à l'hyper-espace $\mathcal{H}$.

On voit ainsi que définir une décomposition semi-continue linéaire d'un ensemble fermé et borné E revient à définir une fonction continue $f(p)$, $p \varepsilon E$, dont les valeurs parcourent un ensemble fermé F situé dans l'intervalle 01.

En particulier, lorsque E est un continu, l'ensemble F, comme image continue de E, est un intervalle ou un point.

13. Supposons, à présent, qu'un continu borné C irréductible entre a et b soit décomposé en sous-continus d'une façon semi-continue et linéaire. (Telle est, en particulier, la décomposition en tranches T_x). Nous supposons que c'est une **vraie** décomposition, c'est-à-dire qu'il y a plus d'une tranche.

Nos hypothèses équivalent à supposer donné une fonction continue $f(p)$ définie sur C, telle que $f(C) =$ l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ et que $G(x)$ est un continu, quel que soit x.

Posons, pour tout ensemble X situé dans l'intervalle 01:

$$G(X) = \sum_{x \varepsilon X} G(x).$$

On prouve facilement [1]) que

$$f[G(X)] = X, \tag{24}$$

(25) *si X est un intervalle* (fermé), *$G(X)$ est un continu.*

Nous établirons à présent quelques lemmes et nous en déduirons le théorème fondamental de cet ouvrage.

Lemme 1. $f(a) = 0$ *ou* $f(a) = 1$.

Démonstration. Posons $f(a) = x_1$ et $f(b) = x_2$. Soit X l'intervalle $x_1 x_2$ (ou $x_2 x_1$, si $x_2 < x_1$). D'après (25), $G(X)$ est un continu unissant a et b. Le continu C étant irréductible entre a et b, il vient $C = G(X)$. D'où $f(C) = f[G(X)] = X$ en vertu de (24). Or, $f(C)$ étant l'intervalle 01, cette égalité ne peut avoir lieu que lorsque $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ ou bien lorsque $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Q étant un continu de condensation, $f(Q)$ se réduit à un seul élément.*

Démonstration. Supposons, par contre, que $f(Q)$ ne se réduise pas à un seul point de l'intervalle 01. La fonction f étant continue, $f(Q)$ est un intervalle. Il existe, par conséquent, deux points x_1 et x_2 tels que $0 < x_1 < x_2 < 1$, $x_1 \varepsilon f(Q)$, $x_2 \varepsilon f(Q)$.

Soient X_1 l'intervalle $0x_1$ et X_2 l'intervalle $x_2 1$. D'après (25), $G(X_1)$ et $G(X_2)$ sont des continus. En outre,

$$Q . G(X_1) \neq 0 \neq Q . G(X_2),$$

[1]) Ces propositions sont d'ailleurs vraies dans des hypothèses bien plus générales (cf. ma note citée tout-à-l'heure).

puisque $x_1 \varepsilon X_1 . f(Q)$ et $x_2 \varepsilon X_2 . f(Q)$. La somme

$$G(X_1) + Q + G(X_2)$$

est donc un continu. Ce continu unit a à b, car, d'après le lemme 1, $f(a) \varepsilon [G(X_1) + G(X_2)]$ et, de même $f(b) \varepsilon [G(X_1) + G(X_2)]$.

Donc: $G(X_1) + Q + G(X_2) = C$. D'où $C - Q \subset G(X_1) + G(X_2)$. Par suite $\overline{C-Q} \subset G(X_1) + G(X_2)$. Or, Q étant continu de condensation, on a $\overline{C-Q} = C$, donc $C = G(X_1) + G(X_2)$. En appliquant (24), on en tire: $f(C) = X_1 + X_2$.

On arrive ainsi à une contradiction, car $f(C) =$ l'intervalle 01 tout entier, tandis que $X_1 + X_2$ ne contient aucun point intérieur au segment $x_1 x_2$. L'hypothèse, que $f(Q)$ ne se réduit pas à un seul point, implique donc une contradiction.

Lemme 3. *$f(I_\xi)$ se réduit à un seul élément.*

Démonstration. En vertu du lemme précédent, on peut se borner au cas où I_ξ n'est pas un continu de condensation. $\overline{I_\xi}$ est alors (conformément aux théor. II et V) un continu indécomposable. Soit $p \varepsilon \overline{I_\xi}$ et soit Z le „composant" du point p dans $\overline{I_\xi}$ [autrement dit: $Z = \overline{I_\xi} - I(p, \overline{I_\xi})$]. Donc $\overline{Z} = \overline{I_\xi}$ (v. théor. III et cor.) et, d'après le lemme 1 du N 2, Z est la somme de continus de condensation (dans $\overline{I_\xi}$) issus du point p; Q étant un de ces continus de condensation, on a donc en vertu du lemme précédent: $f(Q) = f(p)$.

D'où: $f(Z) = f(p)$ et, la fonction f étant continue: $f(\overline{Z}) = f(p)$. Comme $I_\xi \subset \overline{I_\xi} = \overline{Z}$, il vient $f(I_\xi) = f(p)$. Ainsi, $f(I_\xi)$ se réduit au point $f(p)$.

Lemme 4. *$f(T_x)$ se réduit à un seul élément.*

Démonstration. D'après le théor. XI, T_x est un continu. Donc $f(T_x)$, comme image continue de T_x, est également un continu; c'est-à-dire $f(T_x)$ est un point ou un intervalle. Or, selon les propositions (10) et (11), T_x est somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles I_ξ et J_ξ. L'ensemble $f(T_x)$ est donc, en raison du lemme précédent, fini ou dénombrable; il ne peut donc être un intervalle. Par conséquent, $f(T_x)$ est un seul point, c. q. f. d.

L'énoncé du lemme 4 peut être encore modifié. Supposons, en effet, que, pour un argument x_0, le continu $G(x_0)$ admette des points communs avec une tranche T_x. Cela veut dire, que x_0 est un nombre appartenant à $f(T_x)$. Or, selon le lemme 4, $f(T_x)$ se réduit à un seul élément, donc $f(T_x) = x_0$, d'où, par définition de $G(x)$: $T_x \subset G(x_0)$.

Ainsi, *si la tranche T_x a un point commun avec $G(x_0)$, elle y est contenue entièrement.*

D'autre part, selon le théor. X, C est somme de tranches T_x. Il en résulte que, quel que soit x_0, $G(x_0)$ est somme d'un certain lot (≥ 1) de tranches T_x.

Nous arrivons donc à l'énoncé suivant, qui rapproché du th. XIII, présente le

Théorème fondamental. *Si l'on décompose un continu irréductible borné en sous-continus d'une façon semi-continue et linéaire, chacun de ces sous-continus est ou bien identique à une tranche T_x ou bien est somme de toute une famille de tranches T_x.*

Dans le cas où l'ensemble L (voir p. 248) *est fini ou dénombrable et seulement dans ce cas, le continu irréductible n'admet aucune autre décomposition semi-continue linéaire en sous-continus que la décomposition triviale: en une seule tranche*[1]).

14. Dans la théorie générale de la décomposition semi-continue on introduit la notion de *tranche de continuité*[2]): une tranche G_0 est dite tranche de continuité, lorsque la condition $[G_0 . \mathrm{Lim\,inf}\, G_n] \neq 0$ entraîne $G_0 = \mathrm{Lim}\, G_n$ (cette dernière égalité équivaut à la condition qu'à tout point g_0 de G_0 corresponde une suite $\{g_n\}$ convergente vers g_0 et telle que $g_n \varepsilon G_n$).

Dans le cas, considéré auparavant, de la décomposition C en tranches T_x, la condition de continuité peut être énoncée de cette façon: l'égalité $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x_0$ entraîne $\mathrm{Lim}\, T_{x_n} = T_{x_0}$.

Toute tranche qui se réduit à un point est évidemment une tranche de continuité. Ainsi, par ex., si C est le continu „$\sin \frac{1}{x}$" (ex. I), il n'y a qu'une seule tranche de discontinuité, à savoir le segment vertical.

Cependant, il serait faux de supposer que seules les tranches composées d'un point sont des tranches de continuité. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant[3]).

[1]) Ce cas se présente, en particulier, lorsque le continu C est indécomposable. Or, en ce qui concerne la décomposition semi-continue des continus indécomposables en sous-continus, on peut même démontrer d'avantage: l'hyper-espace déterminé par une telle décomposition est lui-même un continu indécomposable.

[2]) Cf. Vietoris, Proc. Amsterdam, op. cit.

[3]) Cet exemple m'a été communiqué il y a plusieurs années par M. Knaster; je m'en suis servi dans mes leçons professées à l'Université de Varsovie en 1923/24.

C est la somme des segments rectilignes qui unissent respectivement tout point p du segment 01 de l'axe des x, dont l'abscisse peut être écrite dans le système de numération à base 4 sans le chiffre 1, avec le point (ou les deux points) de la droite $y=1$, dont l'abscisse s'obtient de celle de p, en remplaçant dans le développement de cette dernière le chiffre 2 par 1.

On voit facilement qu'il y a deux genres de tranches dans le continu C ainsi défini: 1° une infinité dénombrable de tranches ayant la forme de V ou Λ et 2° une infinité indénombrable de segments vers lesquels celles-ci convergent. Les tranches du premier genre sont des tranches de disconuité; celles du second sont des tranches de continuité.

Il est à remarquer qu'il existe — comme le prouve M. Knaster (l. c.) — un continu irréductible C dont *chaque* tranche est une tranche de continuité contenant plus d'un point.

Notons enfin que, d'après un théorème général sur les décompositions semi-continues (démontré dans ma note citée), *les arguments x auxquels correspondent les tranches de continuité forment un ensemble G_δ* (produit d'une suite d'ensembles ouverts) *dense dans l'intervalle 01.*

15. Définition. *La tranche T_{x_0} est dite tranche de cohésion, lorsque $x_0=0$ ou $x_0=1$ ou bien lorsque*

$$T_{x_0} \subset \overline{\sum_{x<x_0} T_x} \cdot \overline{\sum_{x>x_0} T_x}.$$

Il importe de remarquer que l'inclusion peut être remplacée dans cette définition par le signe d'identité. Car les ensembles $\sum\limits_{x<x_0} T_x$ et $\sum\limits_{x>x_0} T_x$ étant, d'après le lemme 2 du N 11, séparés, on a

$$\overline{\sum_{x<x_0} T_x} \cdot \overline{\sum_{x>x_0} T_x} \subset T_{x_0}$$

quel que soit x_0.

On voit aussi que toute tranche de continuité est tranche de cohésion; mais la réciproque n'est pas vraie. La tranche T_0 du con-

Un exemple analogue a été trouvé indépendamment par M. Wilson et publié dans l'Amer. Journ. of Math. 1926 (July). Voir Knaster *Sur quelques problèmes de topologie*, l. c.

tinu „$\sin\frac{1}{x}$“ (ex. I) est une tranche de cohésion (d'ailleurs comme toute tranche initiale ou finale) bien qu'elle soit une tranche de discontinuité.

Une tranche de cohésion T_x $(0<x<1)$ est, par définition, non-dense. Si le continu C est borné, elle est donc un continu de condensation.

Pour avoir un simple exemple d'une tranche qui ne soit pas tranche de cohésion, considérons la courbe composée de

$$\left\{\begin{array}{lll} y=\sin^2\frac{1}{x}, & \text{pour} & -1\leq x<0 \\ -1\leq y\leq 1 & \quad „ & x=0 \\ y=\sin\frac{1}{x} & \quad „ & 0<x\leq 1. \end{array}\right.$$

Le segment vertical forme une tranche qui n'est pas tranche de cohésion, car elle n'est pas contenue dans la fermeture de la partie de la courbe située, à sa gauche. Il en est encore de même, si l'on remplace l'égalité $y=\sin\frac{1}{x}$ par $y=-\sin^2\frac{1}{x}$; dans ce cas, le segment vertical constitue une tranche qui n'est située ni dans la fermeture de sa partie droite ni dans celle de la partie gauche.

Enfin dans l'exemple décrit au N précédent il y a une infinité des tranches qui ne sont pas tranches de cohésion: ce sont les lignes brisées de la forme V et Λ. Leurs indices forment un ensemble dense dans l'intervalle 01.

Théorème XIV. *La famille des tranches qui ne sont pas des tranches de cohésion est au plus dénombrable.*

Démonstration. Supposons que la tranche T_{x_0} ne soit pas une tranche de cohésion. On a donc $0<x_0<1$ et il existe un point p_0 tel que $p_0 \varepsilon T_{x_0}$ et que soit p_0 non ε $\overline{\sum\limits_{x<x_0} T_x}$, soit p_0 non ε $\overline{\sum\limits_{x>x_0} T_x}$. Supposons que la première alternative a lieu. Il existe, par conséquent, un entourage E_0 du point p_0 assujetti à la condition:

$$E_0 \cdot \sum_{x<x_0} T_x = 0. \tag{26}$$

On en conclut, par définition de la fonction $i(p)$ (v. p. 255), que, q étant un point arbitraire de l'entourage de $p_0 (q \varepsilon C . E_0)$, on a $i(q) \geq x_0$. Comme, d'autre part, $i(p_0) = x_0$, nous parvenons à la conclusion que x_0 est une valeur *minimée* (au sens large) de la fonction $i(p)$. Or, d'après un théorème général sur les fonctions réelles, l'ensemble des extrémés d'une fonction est au plus dénombrable [1]). Ceci revient à dire que l'ensemble des indices x_0 tel que T_{x_0} n'est pas une tranche de cohésion est au plus dénombrable [2]).

16. Considérons à présent le cas le plus simple: celui où *C est un continu irréductible borné qui ne contient aucun continu indécomposable, sauf, peut-être, des continus de condensation.*

Le type ordinal du continu C est donc λ, c'est à-dire type de l'intervalle. Autrement dit, l'ensemble L (v. p. 248) coïncide avec l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Rien n'empêche de supposer, à présent, que les indices ξ et x coïncident et que $\varphi(\xi) = x$. Donc $\gamma(x) = \xi = x = \Gamma(x)$.

Par définition de tranche et d'après le théorème X, on a donc

$$(27) \qquad \begin{cases} T_x = I_x + J_x = \prod\limits_{y > x} R_y \, . \prod\limits_{y < x} S_y \\ T_0 = I(b, C), \quad T_1 = I(a, C). \end{cases}$$

En outre, R_x ne contenant, par hypothèse, aucun continu indécomposable qui n'en soit pas continu de condensation, I_x est un continu de condensation (théor. IV et V). Il en est de même de J_x. Donc, selon (27), T_x est un continu de condensation. En s'appuyant sur le lemme 2 du N 13, on voit aussitôt qu'un continu de condensation qui a un point commun avec une tranche T_x est entièrement contenu dans cette tranche. On arrive ainsi au

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* Leipzig, Veit, 1914 p. 363. La démonstration du dit théorème peut être résumée de cette façon: L'entourage E_0 du point p_0 peut être supposé rationnel (intérieur d'un cercle rationnel). Or, soit $x_1 (\neq x_0)$ une valeur minimée de la fonction $i(p)$; il existe alors un point p_1 et un entourage rationnel E_1 de p_1 tel que $i(q) \geqslant x_1 = i(p_1)$ quel que soit $q \varepsilon E_1 . C$. On voit aussitôt que $E_1 \neq E_0$, d'où la conclusion cherchée.

[2]) Dans cette démonstration, l'hypothèse que C et T_x sont des continus n'intervient nullement. La seule hypothèse dont nous nous servons est que la décomposition envisagée est semi-continue et linéaire.

Théorème XV. *Si C est un continu borné du type λ, ses tranches coïncident avec les continus de condensation saturés* (donc avec les ensembles $K(p, C)$ du § 2).

Les tranches de cohésion d'un continu du type λ peuvent être caractérisées d'une façon très simple, comme le prouve le théorème suivant:

Théorème XVI. *$T_x (0 < x < 1)$ étant une tranche d'un continu du type λ, chacune des conditions suivantes est suffisante et nécessaire pour que T_x soit une tranche de cohésion:*

1°: $$T_x = R_x . S_x$$

2°: $$I_x = J_x (= T_x)$$

3°: $$R_x = \prod_{y > x} R_y \quad \text{et} \quad S_x = \prod_{y < x} S_y .$$

Démonstration. 1°. I_x étant non dense dans C et R_x étant régulier dans C, I_x est non dense dans R_x. Selon le lemme 1 du N 11, $\sum\limits_{y<x} T_y = R_x - I_x$. On en conclut que $\overline{\sum\limits_{y<x} T_y} = R_x$ et, de même, que $\overline{\sum\limits_{y>x} T_y} = S_x$. Or, T_x est, par définition, une tranche de cohésion lorsque $T_x = \overline{\sum\limits_{y<x} T_y} \, . \, \overline{\sum\limits_{y>x} T_y}$. Cette égalité équivaut donc à l'égalité 1°.

2°. Selon l'identité (2) du N 9, on a

$$R_x . S_x = I_x . J_x .$$

Donc, l'égalité 1° équivaut à l'égalité

$$T_x = I_x . J_x$$

et, en vertu de (27), à l'égalité

$$I_x + J_x = I_x . J_x,$$

qui (d'après une formule d'algèbre de la logique) équivaut à l'égalité $I_x = J_x$.

3°. D'après le lemme 1 du N 11, on a, quel que soit x:

$$\sum_{y<x} T_y = R_x - I_x ,$$

d'où

(28) $$R_z = \sum_{y \prec z} T_y + I_z \subset \sum_{y \leq z} T_y .$$

Les tranches étant disjointes deux à deux, il vient: $R_z . T_u = 0$ pour $u > z$. Or, $\prod_{y > x} R_y \subset R_z$ pour tout $z > x$. Donc

$$\prod_{y > x} R_y . \sum_{u > x} T_u = 0,$$

ce qui revient à dire que

(29) $$\prod_{y > x} R_y \subset \sum_{y \leq x} T_y .$$

Or, si l'on admet l'égalité 2° et si l'on substitue x à z dans la formule (28), on a: $R_x = \sum_{y \leq x} T_y$, d'où, en vertu de (29): $\prod_{y > x} R_y \subset R_x$. De-même $\prod_{y < x} S_y \subset S_x$.

Comme on a évidemment $R_x \subset \prod_{y > x} R_y$ et $S_x \subset \prod_{y < x} S_y$, nous arrivons — en admettant l'égalité 2° — aux égalités 3°

Inversement, les égalités 3° impliquent 1°, en vertu de la formule (27).

Les égalités 1° et 2° étant équivalentes, il en résulte que chacune d'elles équivaut à 3°, c. q. f. d.

Remarque I. En s'appuyant sur le théor. XV, on peut facilement en déduire le théorème suivant de Janiszewski: *si un continu borné C irréductible entre deux points ne contient aucun continu de condensation* (ne se réduisant pas à un seul point), *C est un arc simple* [1]).

Car, d'abord, C ne contient aucun continu indécomposable, puisque tout continu indécomposable admet des sous-continus de condensation qui contiennent plus d'un point. Donc C est du type λ. Les tranches T_x sont, par conséquent, des continus de condensation. Or, tout continu de condensation de C se réduisant, par hypothèse, à un point, on en conclut que T_x se compose d'un seul point. Autrement dit, la fonction $i(p)$, définie p. 255, est biunivoque et, comme fonction continue, elle est bicontinue. Le continu C est donc homéomorphe à l'intervalle 01, c. q. f. d.

Remarque II. Nous allons prouver que, *pour les continus bornés du type λ, les tranches T_x coïncident avec les „Schichten" de M. Vietoris.*

[1]) Thèse, ch. III, théor. IV. Le théorème reste vrai, lorsqu'on omet l'hypothèse que C soit borné. Cf. Hallett Bull. Amer. Math. Soc. XXV, 1919 et Knaster et Kuratowski Fund. Math. II, p. 224.

Posons, avec M. Vietoris [1]) $p \prec q$ lorsqu'il existe dans C deux continus disjoints et irréductibles ap et qb. Les points p et q appartiennent à une même „Schichte", si p *non* $\prec q$ et q *non* $\prec p$; nous allons montrer que dans ce cas, et seulement dans ce cas, p et q appartiennent à la même tranche T_x.

Soit, en effet, $p \varepsilon T_x$, $q \varepsilon T_y$ et $x < y$. Soit $x < x_1 < y_1 < y$. Il vient $T_x \subset R_{x_1}$ et $T_y \subset S_{y_1}$ (v. form. (27)), d'où $ap \subset R_{x_1}$ et $qb \subset S_{y_1}$. Or, l'inégalité $x_1 < y_1$ donne $R_{x_1} . S_{y_1} = 0$; d'où $(ap).(bq) = 0$, donc $p \prec q$.

Soient, d'autre part, $p \varepsilon T_x$ et $q \varepsilon T_x$. D'après (27), $T_x = I_x + J_x$. Il y a deux cas à distinguer: 1° $p \varepsilon I_x$ et $q \varepsilon I_x$, 2° $p \varepsilon (I_x - J_x)$ et $q \varepsilon (J_x - I_x)$.

Dans le premier cas, R_x est irréductible entre a et p; donc R_x, comme continu régulier, est le seul [2]) continu ap. Comme $q \varepsilon I_x \subset R_x$, il vient $(ap).(bq) \neq 0$. Donc: p *non* $\prec q$ et, de-même, q *non* $\prec p$; c'est-à-dire p et q appartiennent à la même „Schichte".

Dans le deuxième cas, les hypothèses $p \varepsilon I_x$ et $q \varepsilon J_x$ donnent, comme auparavant, $R_x = ap$ et $S_x = bq$. D'où p *non* $\prec q$, puisque $R_x S_x \neq 0$. En même temps q *non* $\prec p$, car, p étant un point de R_x, on a $R_x + (pb) = C$, d'où $C - R_x \subset pb$ donc $S_x = \overline{C - R_x} \subset pb$; de-même $R_x \subset aq$ et il vient $0 \neq R_x . S_x \subset (aq).(pb)$.

L'équivalence entre la notion de tranche T_x et celle de „Schichte" au sens de M. Vietoris est — dans le cas du continu borné du type λ — établie. Il importe de remarquer que, lorsque C n'est pas du type λ, la méthode de M. Vietoris ne donne aucune „Schichtung", c'est-à-dire, qu'elle ne donne aucun moyen de décomposer linéairement ce continu.

Remarque III. *Si C est un continu borné du type λ, ses tranches coïncident avec les „complete oscillatory sets" de M. Wilson* [3]).

Comme le prouve M. Wilson, la décomposition du continu C en »complete oscillatory sets« est, dans le cas du type λ et dans ce cas seulement, une décomposition semi-continue linéaire (l. c. p. 165); ces ensembles sont d'autre part des continus de condensation. Il s'agit donc de prouver (conformément au théorème fondamental) qu'aucun d'eux ne peut contenir plus d'une tranche T_x. Or, en supposant qu'un »complete oscillatory set« contienne plus d'une tranche T_x, il serait nécessairement somme d'un „intervalle" de tranches; mais alors il ne pourrait être un continu de condensation (cf. Lemme 2 du N 13).

§ 4. Propriétés extrinsèques des continus irréductibles.

16. Je rappelle d'abord quelques notions et propositions élémentaires. Je désigne par $C(X)$ le *complémentaire* de l'ensemble X.

[1]) Op. cit. p. 196.

[2]) *Irr.* I, p. 220.

[3]) Le „oscillatory set" du point p est le produit de tous les sous-continus de C qui contiennent un entourage de p (relatif à C). Un »oscillatory set« P est dit „complete", lorsque: soit $a \varepsilon P$, soit $b \varepsilon P$, soit $p \varepsilon \overline{P_a} . \overline{P_b}$, P_a et P_b désignant les constituants de l'ensemble $C - P$ qui contiennent a et b respectivement.

Si X est fermé, $C(X)$ est dit *ouvert*. La *frontière* $F(A)$ d'un ensemble ouvert c'est: $\bar{A}-A$. Un ensemble ouvert semi-continu est dit une *région*:

On a les propositions suivantes:

(α) tout constituant d'un ensemble ouvert est une région;

(β) K étant un continu et Z une région de l'ensemble $C(K)$, l'ensemble $F(Z)$ est un sous-continu de K.

Pour simplifier, je n'examine que le cas de continu irréductible borné, situé sur le plan, et ayant le type d'ordre λ.

Lemme 1. *Si le continu F est la frontière d'une région (bornée) A et $a \varepsilon A$, il existe un continu K tel que*

$$F = I(a, K), \quad K - F \subset A$$

et que $K-F$ est homéomorphe à une demi-droite.

Démonstration. Imaginons une suite de lignes polygonales fermées P_n, disjointes, situées dans A, convergentes vers F et assujetties aux deux conditions:

1°: si $q \varepsilon P_n$ il existe un point $p \varepsilon F$ tel que la distance pq est $< \frac{1}{n}$,

2°: P_1 coupe la région A entre a et F, P_{n+1} entre P_n et F.

Choisissons sur chaque P_n un couple de points a_n, b_n. Ce couple décompose la ligne P_n en deux arcs U_n et V_n. Nous choisissons les points a_n, b_n de façon que le diamètre de U_n soit $< \frac{1}{n}$.

Unissons les points a et a_1 par un arc L_1 situé à l'intérieur de P_1 et, en général, les points b_{n-1} et a_n par un arc L_n. On peut, en vertu de 2°, s'arranger de façon que L_n soit situé entre P_{n-1} et P_n (abstraction faite des extrémités). Par conséquent, la somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L_n + V_n)$ et homéomorphe à une demi-droite. En ajoutant à cette somme l'ensemble F on obtient le continu K demandé. En effet, on voit que F est non-dense dans K et on en conclut facilement que $F = I(a, K)$.

Lemme 2. *Si $I(a, C)$ est un continu, il existe une région A telle que $I(a, C) = F(A)$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble-complémentaire de $I(a, C)$. Cet ensemble étant ouvert, soit A la région qui est son constituant et qui contient a (voir α). D'après β on a:

$$F(A) \subset I(a, C) \subset C. \tag{1}$$

Je dis que $C\bar{A}$ est un continu.

En effet, selon (1):

$$C\bar{A} + (C - A) = C.(A + F(A)) + C - A = C$$

$$C\bar{A}.(C - A) = C.F(A) = F(A).$$

Or, si la somme et le produit de deux ensembles fermés sont des continus, ces ensembles sont des continus eux-mêmes [1]). Par conséquent $C - A$ et $C.\bar{A}$ sont des continus.

Je vais prouver que

$$(C.\bar{A}).I(a, C) \neq 0. \tag{2}$$

On a évidemment $F(A) \neq 0$ et $F(A) \subset C.\bar{A}$. Donc $F(A).C.\bar{A} \neq 0$ et l'inclusion (1) donne l'inégalité (2).

Nous arrivons à la conclusion que $C.\bar{A}$ est un continu qui unit le point a à l'ensemble $I(a, C)$. Le continu C étant irréductible, il vient $C = C.\bar{A}$, d'où $C \subset \bar{A}$ et $I(a, C) \subset \bar{A}$. Or, A étant sous-ensemble du complémentaire de $I(a, C)$, on en tire $I(a, C) \subset \bar{A} - A$, c'est-à-dire $I(a, C) \subset F(A)$. L'inclusion inverse étant vraie selon (1), on en déduit: $I(a, C) = F(A)$.

Les lemmes 1 et 2 donnent le

Théorème XVII. *La condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu soit un ensemble $I(a, C)$ (d'un continu du type λ) est qu'il soit la frontière d'une région.*

17. Théorème XVIII. *La condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu soit une tranche T_x d'un continu irréductible (de type d'ordre λ) est qu'il soit la frontière d'un ensemble composé d'une ou de deux régions disjointes.*

Démonstration. 1) La condition est suffisante. Si l'ensemble en question se compose d'une seule région, sa frontière est une tranche en vertu du lemme 1. Supposons donc que A et B sont deux régions disjointes, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. D'après le lemme 1, il existe deux continus K_1 et K_2 tels que

$$F(A) = I(a, K_1) \qquad F(B) = I(b, K_2)$$

$$K_1 \subset \bar{A} \qquad K_2 \subset \bar{B}.$$

[1]) Cf. Fund. Math. I théorème I, p. 211.

Par conséquent:

$$K_1 . K_2 \subset \bar{A} . \bar{B} = [A + F(A)]\,[B + F(B)] = F(A) . F(B) = \\ = I(a, K_1) . I(b, K_2).$$

Or, si deux continus irréductibles bornés K_1 et K_2 satisfont à l'inclusion $K_1 K_2 \subset I(a,K_1) . I(a,K_2)$, leur somme $C = K_1 + K_2$ est un continu irréductible entre a et b [1]).

Nous allons montrer que l'ensemble $F(A)+F(B)$ est une tranche de C.

Comme

$$F(A+B) = F(A)+F(B) = I(a,K_1)+I(b,K_2),$$

il reste à prouver (v. p. 262) que $K_1 \varepsilon R(a, C)$ et $K_2 = \overline{C - K_1}$.

Or, l'ensemble $\bar{A} - A$, comme égal à $I(a,K_1)$, est un ensemble frontière dans K_1 (d'après le théor. IV). On a donc $\overline{K_1 - (\bar{A}-A)} = K_1$, d'où $K_1 = \overline{(K_1 - \bar{A}) + K_1 A}$ et comme $K_1 \subset \bar{A}$, il vient $K_1 = \overline{K_1 A}$.

Puis $K_2 A = 0$. Donc $K_1 = \overline{(K_1 + K_2) A} = \overline{C . A}$. Ainsi K_1 est la fermeture d'un ensemble ouvert dans C; K_1 est donc un ensemble régulier dans C. D'où $K_1 \varepsilon R(a, C)$.

Pour prouver que $K_2 = \overline{C - K_1}$ remarquons que, d'une part, on a $C = K_1 + K_2$, d'où $C - K_1 \subset K_2$, donc $\overline{C - K_1} \subset K_2$. D'autre part, A et B étant deux ensembles ouverts disjoints, il vient $\bar{A}B = 0$, d'où $CB \subset C - \bar{A} = C - C\bar{A} \subset C - \overline{CA} = C - K_1$. Donc $\overline{CB} \subset \overline{C - K_1}$, d'où $K_2 \subset \overline{C - K_1}$, car l'égalité $K_1 = \overline{CA}$ donne par raison de symétrie: $K_2 = \overline{CB}$.

L'égalité $K_2 = \overline{C - K_1}$ est ainsi établie.

2). La condition est n é c e s s a i r e. Soit T une tranche du continu irréductible C.

En premier lieu remarquons que, si $a \varepsilon T$ ou $b \varepsilon T$, on a, selon la form. (27) du § 3: $T = I(b, C)$ ou $T = I(a, C)$ et T est la frontière d'une région en vertu du théor. XVII.

Supposons donc que ni a ni b n'appartiennent à T. Soient A et B les régions du complémentaire de T qui contiennent respe-

[1]) Cf. P. Szymański: *La somme de deux continus irréductibles*, à paraître. Cf. J. R. Kline Fund. Math. VII.

ctivement a et b (il peut, d'ailleurs arriver que $A = B$). On a donc:

(3) $$(A+B)\,T = 0.$$

(4) $$F(A)+F(B) \subset T.$$

Il s'agit de prouver que

(5) $$F(A)+F(B)=T.$$

On vérifie par un calcul facile les formules:

$$[C.\bar{A} + C.\bar{B} + T] + [C - (A+B)] = C,$$

$$[C.\bar{A}+C.\bar{B}+T].[C-(A+B)] = C.[(\bar{A}+\bar{B}) - (A+B)] + T.$$

Je dis que:

(6) $$(\bar{A}+\bar{B}) - (A+B) = F(A)+F(B).$$

Cette égalité est évidente, lorsque $A = B$. D'autre part, lorsque $A \neq B$ on a $\bar{A}B = 0 = \bar{B}A$, puisque alors A et B sont deux ensembles ouverts disjoints; donc $(\bar{A}+\bar{B})-(A+B) = (\bar{A}-A)+(\bar{B}-B)$, d'où l'égalité (6).

En vertu de (4), on en déduit l'égalité

$$C.[(\bar{A}+\bar{B})-(A+B)]+T = T.$$

Il est ainsi établi que la somme et le produit des deux ensembles $[C.\bar{A}+C.\bar{B}+T]$ et $[C-(A+B)]$ sont des continus. Par conséquent $[C.\bar{A}+C.\bar{B}+T]$ est un continu.

C'est un continu qui contient a et b. Donc

$$C = C.\bar{A}+C.\bar{B}+T,$$

d'où $C - T \subset C.\bar{A}+C.\bar{B} \subset \bar{A}+\bar{B}$. Donc $\overline{C-T} \subset \bar{A}+\bar{B}$ T étant non-dense (théor. XV), on a $C = \overline{C-T} \subset \bar{A}+\bar{B}$. Par conséquent $T \subset \bar{A}+\bar{B}$ et en vertu de (3): $T \subset (\bar{A}-A)+(\bar{B}-B)$. En d'autres termes:

(7) $$T \subset F(A)+F(B).$$

Les inclusions (4) et (7) donnent l'égalité (5).

Corollaires: *1. Toute tranche de cohésion est frontière d'une région.*

2. Les tranches T_x telles que T_x n'est pas frontière d'une région forment une famille au plus dénombrable.

Démonstration. Si T_x est une tranche de cohésion, on a selon le théor. XVI, 2°: $T_x = I(a, R_x)$. La tranche T_x est donc en vertu du théor. XVII, frontière d'une région.

Le second corollaire en résulte en vertu du théor. XIV.

§ 5. Condition suffisante pour qu'un continu soit irréductible. Choix effectif des points d'irréductibilité.

18. D'après le théor. I de *Irr.* I (p. 202), si a est un point d'irréductibilité d'un continu, ce continu ne peut être décomposé en deux vrais sous-continus qui contiennent a tous les deux. Je vais prouver que la proposition inverse est aussi vraie, si l'on suppose le continu borné.

D'ailleurs la condition que le continu soit b o r n é est essentielle: par exemple, K désignant une demi-droite et a son sommet, on ne peut décomposer K en deux continus qui soient différents de K et qui contiennent a tous les deux, — bien que K soit un continu réductible.

Théorème XIX. *Si K est un continu borné est a un point tel que K n'est pas somme de deux vrais sous-continus qui contiennent a tous les deux, il existe un point b tel que K est irréductible entre a et b.*

Démonstration. Supposons, par contre, qu'un tel point b n'existe pas. Il existe alors une suite de continus K_n telle que (v. remarque au lemme 1, p. 232):

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{1}$$

$$a \,\varepsilon\, K_n \neq K. \tag{2}$$

La série (1) va être remplacée par une autre, à termes croissants. Considérons, notamment, les sommes partielles:

$$Q_n = K_1 + K_2 + \ldots + K_n.$$

Je dis que

$$Q_n \neq K, \text{ quel que soit } n. \tag{3}$$

En effet, si $n=1$, l'inégalité (3) coïncide avec (2). D'autre part, si on la suppose vraie pour $n-1$, la décomposition $Q_n = Q_{n-1} + K_n$ est une décomposition de Q_n en deux vrais sous-continus de K qui contiennent a tous les deux. Par hypothèse, leur somme ne peut être égale à K.

Ainsi, la formule

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \tag{4}$$

présente un développement de K en série à termes non-décroissants et distincts de K. On peut supposer que ces termes sont croissants, c'est-à-dire que $Q_{n+1} \neq Q_n$, car on pourrait omettre les termes qui sont identiques aux précédents.

Soit: $p_n \,\varepsilon\, Q_{n+1} - Q_n$. La suite $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ étant bornée, soit p un point d'accumulation de cette suite. D'après (4), p appartient à un des continus Q_n. On peut évidemment supposer que $p \,\varepsilon\, Q_1$. On a donc

$$\overline{K - Q_n} \cdot Q_1 \neq 0, \tag{5}$$

quel que soit n, puisque la suite $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$ appartient à $K - Q_n$.

Je dis qu'il existe un indice m tel que

$$\overline{K - Q_m} + Q_1 \neq K. \tag{6}$$

$K - Q_1$ étant un ensemble non vide ouvert dans K, il ne peut être ensemble frontière dans K. Donc, $K - Q_1$ n'est pas de I^re^ catégorie dans K. Or, selon (4):

$$K - Q_1 = \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n - Q_1).$$

Il existe donc un indice m tel que $Q_m - Q_1$ n'est pas de I^re^ catégorie. L'ensemble $Q_m - Q_1$, comme différence de deux ensembles fermés, est somme d'une série d'ensembles fermés; un, au moins de ces ensembles fermés n'est pas ensemble frontière, car en cas contraire leur somme serait de I^re^ catégorie. Donc, à plus forte raison, $Q_m - Q_1$ n'est pas ensemble frontière dans K. En symboles

$$\overline{K - (Q_m - Q_1)} \neq K. \tag{7}$$

D'autre part

$$\overline{K - (Q_m - Q_1)} = \overline{K - Q_m} + \overline{KQ_1} = \overline{K - Q_m} + Q_1. \tag{8}$$

Les formules (7) et (8) donnent donc (6).

Je vais prouver, à présent, que $\overline{K-Q_m}$ est un continu.

Car, supposons, par contre, que U et V soient deux ensembles fermés tels que

(9) $$\overline{K-Q_m}=U+V, \quad U.V=0,$$

(10) $$U \neq \overline{K-Q_m} \neq V.$$

Considérons la somme et le produit des ensembles fermés (Q_m+U) et (Q_m+V):

(11) $$(Q_m+U)+(Q_m+V)=Q_m+\overline{K-Q_m}=K$$

(12) $$(Q_m+U).(Q_m+V)=Q_m+U.V=Q_m.$$

K et Q_m étant des continus, les formules (11) et (12) prouvent que (Q_m+U) et (Q_m+V) sont aussi des continus. De plus, ce sont des continus qui contiennent le point a; la formule (11) prouve, par conséquent, qu'un deux doit être identique à K. Soit $Q_m+U=K$; d'où $K-Q_m \subset U$, donc $\overline{K-Q_m} \subset U$, contrairement à (10).

Il est ainsi établi que $\overline{K-Q_m}$ est un continu. D'après (5), la somme $\overline{K-Q_m}+Q_1$ est donc aussi un continu. On arrive ainsi à la formule:

$$K=Q_m+(\overline{K-Q_m}+Q_1)$$

qui présente — contrairement à l'hypothèse du théorème — une décomposition de K en deux continus distincts de K (formules (3) et (6)) contenant a tous les deux.

Cette contradiction étant déduite de l'hypothèse que K est réductible entre a et tout autre point, notre théorème se trouve démontré complètement.

19. Le problème dont nous allons nous occuper à présent consiste à définir une loi qui fasse correspondre à tout continu irréductible un couple de points entre lesquels ce continu soit irréductible.

Rappelons, au préalable, qu'il existe une définition d'une fonction $\varphi(F)$ qui fait correspondre à tout ensemble fermé non-vide un de ses points [1]).

On peut aussi définir une fonction qui à toute suite d'ensembles ouverts $O_1, O_2, \dots O_n, \dots$ dont le produit n'est pas vide fait correspondre un point de ce produit. Soit, en effet, $R_1, R_2, \dots R_n, \dots$ la

[1]) Voir, par ex., Fund. Math. III, p. 190.

suite des intérieurs des cercles à centre et rayon rationnels; soit R_{k_1} le premier terme de cette suite tel que $\overline{R}_{k_1} \subset O_1$ et $R_{k_1}.\prod_{n=1}^{\infty} O_n \neq 0$ et, en général, soit R_{k_n} le premier terme tel que: $\overline{R}_{k_n} \subset O_n . R_{k_{n-1}}$ et $R_{k_n}.\prod_{n=1}^{\infty} O_n \neq 0$. Le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{R}_{k_n}$ est fermé, non-vide et contenu dans $\prod_{n=1}^{\infty} O_n$. Le point $\varphi(\prod_{n=1}^{\infty} R_{k_n})$ est donc le point demandé. Il en est de même si tous les ensembles O_n sont ouverts relativement à un ensemble fermé donné en avance.

Passons à la solution de notre problème.

Soit C un continu. Désignons par J l'ensemble de ses points d'irréductibilité. Nous supposons $J \neq 0$. Il s'agit de définir un couple de points de J entre lesquels C soit irréductible.

Nous allons d'abord définir une fonction $\psi(J)$ telle que $\psi(J) \varepsilon J$.

Dans le cas, où C est indécomposable, on a $C=J$ [1]); on posera $\psi(J)=\varphi(C)$.

Supposons donc que C soit décomposable. Il existe, par conséquent, un intérieur de cercle R qui jouit des propriétés suivantes: 1° $R.C \neq 0$, 2° il existe (au moins) une décomposition de C en deux continus: $C=C_1+C_2$ telle que $\varphi(C) \varepsilon C_1$, $C_2 \neq C$ et $C_1.R=0$. Le cercle $\overline{R}$ peut évidemment être supposé de centre et rayon rationnels. Nous admettons que R est le premier terme de la suite $R_1, R_2, \dots R_n, \dots$ assujetti aux conditions 1° et 2°.

Soit L le plus grande sous-continu de $C-R$ qui contient le point $\varphi(C)$. Donc $L \neq C$. Je dis que $L J \neq 0$.

En effet, par definition de L, on a $C_1 \subset L$, où C_1 est un continu arbitraire satisfaisant à 2°. Comme $C=C_1+C_2$, on a $C=L+C_2$ et, si l'on supposait $L.J=0$, on aurait $J \subset C_2$, donc $C=C_2$, contrairement à 2°.

Considérons, parmi les cercles de centre et rayon rationnels, ceux qui sont disjoints de L et qui contiennent des points de C à l'intérieur. Soit

$$R_{m_1}, R_{m_2}, \dots R_{m_n}, \dots$$

la suite des intérieurs de ces cercles.

Soit Q_n le plus grand sous-continu de $C-R_{m_n}$ qui contient L_n.

[1]) Voir, Fund. Math. I, p. 215.

Je dis que

$$C - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \subset J. \tag{13}$$

Supposons, en effet, que $p \varepsilon C - J$ et soit x un point arbitraire de LJ. Il existe donc un continu M tel que $M \neq C$, $x \varepsilon M$, $p \varepsilon M$. Soit $y \varepsilon I(x, C)$. Donc $y \varepsilon C - M$ et comme $y \varepsilon C - L$, on a $y \varepsilon C - -(L+M)$. Il existe par conséquent un n tel que $L + M \subset Q_n$, d'où $p \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$.

L'inclusion (13) est ainsi établie.

D'autre part, $C - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \neq 0$, car les formules $x \varepsilon LJ$ et $y \varepsilon I(x,C)$ entraînent $y \varepsilon C - Q_n$, quel que soit n.

Ainsi, l'ensemble $C - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \doteq \prod_{n=1}^{\infty} (C - Q_n)$ est un ensemble non-vide, donné comme produit infini d'ensembles ouverts dans C. On peut donc en extraire un point bien déterminé. C'est ce point que nous désignons par $\psi(J)$.

D'après le lemme 1 (p. 232), l'ensemble $I(\psi(J), C)$ est donné comme produit d'une suite bien déterminée d'ensembles ouverts dans C. En extrayant de cet ensemble un point, que nous désignons par $\chi(J)$, un obtient un couple de points $\psi(J)$, $\chi(J)$ entre lesquels C est irréductible.

Bibliographie des continus irréductibles.

(Suite).

Alexandroff P. *Ueber kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven.* Math. Ann. 96, 1926 (October).

Gehman H. M. *Concerning irreducibly connected sets and irreducible continua.* Proc. Nat. Acad. Sc. 12, 1926.

Hahn H. *Ueber irreduzible Kontinua.* Sgb. Akad. Wiss. Wien 130, 1921.

Kline J. R. *Concerning the sum of two continua each irreducible between the same pair of points.* Fund. Math. VII, 1925.

— *A condition that every subcontinuum of a continuous curve be a continuous curve.* Fund. Math. X, 1927.

Knaster B. *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable.* Fundam. Math. III, 1922.

— *Quelques coupures singulières du plan.* Fund. Math. VIII, 1925.

— *Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points.* Fundamenta Mathem. X, 1927.

— *Sur quelques problèmes de topologie*, à paraître.

Knaster B. et Kuratowski C. *Sur les continus non-bornés.* Fund. Math. V, 1924.

Kuratowski C. *Sur les coupures irréductibles du plan.* Fund. Math. VI, 1924.

Rosenthal A. *Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua.* Sgb. Bay. Akad. Wiss. München 1919.

— *Die Punktmengen*, Encyklopädie d. Math. Wissenschaften II C 9a, Leipzig 1924.

Szymański P. *La somme de deux continus irréductibles.* Fund. Math. à paraître.

Urysohn P. *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.* Fund. Math. VII—VIII, 1925—1926.

Vietoris L. *Stetige Mengen.* Mon. f. Math. u. Phys. 31. Wien 1921.

Wilson W. A. *On the structure of a continuum, limited and irreducible between two points.* Am. Journ. Math. 48, 1926 July.

— *On the oscillation of a continuum at a point.* Trans. Amer. Math. Soc. 1925.

— *Some properties of limited continua irreducible between two points.* Trans. Amer. Math. Soc. 28, 1926 (July).