tend aussi uniformément vers zéro avec la largeur $x''-x'$ de la bande. Le même raisonnement s'applique naturellement aux bandes horizontales; la propriété III est, par conséquent, démontrée.

Or, on voit aisément que la relation (18) est une conséquence immédiate de ces propriétés; je n'insiste pas sur les détails, qui sont développés par ex. chez M. Tonelli[1]). Le raisonnement est le même que celui dont on se sert pour prouver que la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans une courbe converge vers la longueur de la courbe, c'est-à dire vers la plus grande limite possible, dès que le plus grand côté de la ligne polygonale tend vers zéro.

8. Ajoutons encore une remarque sur la signification géométrique des expressions introduites par Geöcze. Le lecteur aura certainement remarqué que $\alpha_R[f]$. $\beta_R[f]$ représentent approximativement l'aire de la projection sur les plans xz, yz de la portion de surface située au-dessus du rectangle R. Donc, l'aire γ_R de ce rectangle étant la projection sur le plan xy de cette portion de surface, l'aire de cette dernière sera représentée approximativement par $g_R[f]$. Enfin, la somme de Geöcze $G_R[f;D]$ sera une valeur approchée de l'aire de la surface entière $z=f(x,y)$. On reconnaît ainsi que le fait que nous avons démontré, savoir que les sommes de Geöcze convergent vers l'aire de la surface, correspond au fait que les longueurs des lignes polygonales inscrites dans une courbe convergent vers la longueur de la courbe.

9. J'ai déjà appelé l'attention du lecteur à l'analogie du raisonnement employé dans cette Note avec celui développé par M. Tonelli pour montrer que l'on a

$$L_Q[f]=\iint\limits_{(Q)}(1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy,$$

si $f(x,y)$ est absolument continue. Je remarque que dans ce cas les fonctions $F^{(h)}(x,y)$ du numéro 6 possèdent celles des propriétés des polynômes de Stieltjes, utilisés par M. Tonelli, qui sont essentielles pour la démonstration de son théorème. Je développerai cette remarque, avec quelques autres relatives aux recherches de M. Tonelli sur la quadrature des surfaces courbes, dans une Note que je publierai bientôt.

[1]) Cf. T. II.

Szeged, le 11 septembre 1926.

Sur les fonctions d'intervalle[1]).

Par

S. Saks (Varsovie).

CHAPITRE I.

Fonctions d'intervalle et leurs nombres dérivés.

§ 1. Lorsque à tout sous-intervalle I d'un intervalle R correspond une seule valeur réelle, bien déterminée, $f(I)$, $f(I)$ sera dite fonction d'intervalle définie dans R.

Elle s'appellera continue dans un point $x\,\varepsilon\,R$, lorsque I_x désignant un intervalle quelconque contenant x et contenu dans R, $f(I_x)$ tend vers 0, lorsque $|I_x|\to 0$[2]). $f(I)$ sera continue dans R, lorsqu'elle l'est dans tout point de R.

Soit x un point intérieur de R. Désignons, en général, par I_x^+, respectivement par I_x^-, l'intervalle dont x est l'extrémité gauche, respectivement droite, et posons:

$$A=\limsup\,[f(I_x^+ + I_x^-)-f(I_x^+)-f(I_x^-)],$$

$$a=\liminf\,[f(I_x^+ + I_x^-)-f(I_x^+)-f(I_x^-)],$$

où: $|I_x^+ + I_x^-|\to 0$.

Les nombres $\Omega_x=\frac{1}{2}[|A|+A]\geqslant 0$, $\omega_x=\frac{1}{2}[a-|a|]\leqslant 0$ seront appelés les écarts, non-négatif et non-positif de $f(I)$ en

[1]) Certains résultats de ce travail ont été déjà publiés, d'ailleurs sans démonstrations, dans une Note de C. R. (1925, vol. 180, p. 38). Pour simplifier des énoncés nous ne traîtons ici que des fonctions d'intervalle linéaire. L'extension aux intervalles dans un espace à un nombre quelconque de dimensions n'exige que des modifications formelles.

[2]) A étant un ensemble, $|A|$ en désignera la mesure (extérieure).

point x. Lorsque $\Omega_x > 0$, respectivement $\omega_x < 0$, le point x sera dit point d'écart positif, respectivement négatif.

On voit immédiatement que tout point d'écart est un point de discontinuité; par suite, chaque fonction continue dans l'intervalle R n'y admet pas de points d'écart. Il en est de même de toute fonction additive [1]) (non-nécessairement continue).

On nommera la fonction $f(I)$ absolument continue lorsque, ε étant un nombre positif quelconque, il existe toujours un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout système d'intervalles $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ n'empiétant pas et se contenant dans R, l'inégalité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} I_k\right| < \eta \quad \text{entraîne:} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(I_k)\right| < \varepsilon.$$

On l'appellera à variation bornée lorsqu'il existe des nombres M et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout système d'intervalles $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ n'empiétant pas et contenus dans R, on ait:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(I_k)\right| \leqslant M,$$

pourvu que soit $|I_k| < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

§ 2. On appellera subdivision d'un intervalle R tout système formé d'un nombre fini d'intervalles $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ n'empiétant pas et tels que $R = \sum_{k=1}^{n} I_k$; le plus grand des nombres $|I_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sera nommé l'ordre de la subdivision.

On appelle, d'après M. Burkill [2]) l'intégrale supérieure $\overline{\int_R} f(I)$, respectivement inférieure $\int_{-R} f(I)$, de $f(I)$ dans R, la limite supérieure, respectivement inférieure, des sommes $\sum_{k=1}^{n} f(I_k)$, $\{I_k\}$ désignant une subdivision quelconque de R d'ordre tendant vers 0.

Pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de désigner les deux intégrales de $f(I)$ dans R par $\Phi(f; R)$ et $\varphi(f; R)$, ou bien, simplement, par $\Phi(R)$ et $\varphi(R)$.

[1]) Une fonction d'intervalle $f(I)$ est dite additive lorsqu'on a: $f(I_1) + f(I_2) = f(I_1 + I_2)$ pour tout couple d'intervalles n'admettant qu'une seule extrémité commune.

[2]) Burkill. *The derivates of functions.* (*Fund. Math.* t. V, 1924. p. 321—327).

Lorsque les deux intégrales d'une fonction $f(I)$ dans R sont finies et égales, la fonction $f(I)$ est dite intégrable (au sens de M. Burkill); la valeur commune de ses intégrales, supérieure et inférieure, est appelée, dans ce cas, l'intégrale de $f(I)$, et désignée par $\int f(I)$.

Les théorèmes suivants dont nous ferons l'usage plus loin, sont faciles à vérifier:

Théorème 1. *L'intégrale supérieure (inférieure) d'une fonction $f(I)$ dans un intervalle R étant finie, elle diffère de $+\infty$ $(-\infty)$ dans tout sous-intervalle de R.*

Théorème 2. *Une fonction $f(I)$ étant à variation bornée (absolument continue), ses intégrales sont finies dans R et dans tout son sous-intervalle, et sont aussi à variation bornée (absolument continues).*

Théorème 3. *Une fonction $f(I)$ admettant l'intégrale supérieure (inférieure) finie dans R et dans tout son sous-intervalle, on a pour toute subdivision $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ de R:*

$$\Phi(R) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(I_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \Omega(a_k), \quad \textit{respectivement} \tag{1}$$

$$\varphi(R) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(I_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \omega(a_k), \tag{1 bis}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ désignant les extrémités des intervalles $\{I_k\}$ intérieures à R.

Théorèmes 4. *Les deux intégrales d'une fonction d'intervalle $f(I)$ étant finies dans R,*

1° *elles les sont aussi dans chaque sous-intervalle de R;*

2° *$f(I)$ n'admet qu'un ensemble fini ou dénombrable de points d'écart;*

3° *la somme des valeurs absolues des écarts (positifs et négatifs) de $f(I)$ est finie.*

Démonstration: d'après le théorème 1, on a dans tout sous-intervalle I de R: $\Phi(I) \neq +\infty$ et $\varphi(I) \neq -\infty$, d'autre part, $\Phi(I) \geq \varphi(I)$, donc les deux nombres $\Phi(I)$ et $\varphi(I)$ sont finis simultanément.

Pour démontrer (2°) et (3°), considérons un nombre quelconque fini de points d'écart $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ et soit $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ la subdivision de R déterminée par les points $\{a_k\}$ regardés comme les points de division. Donc, d'après le théorème 3, en retranchant (1 bis) de (1):

$$\Phi(R)-\varphi(R)=\sum_{k=1}^{n}[\Phi(I_k)-\varphi(I_k)]+\sum_{k=1}^{n-1}\Omega(a_k)-\sum_{k=1}^{n-1}\omega(a_k)$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\Omega(a_k)+\sum_{k=1}^{n-1}|\omega(a_k)|,$$

ce qui justifie les assertions (2°) et (3°) à la fois.

Théorème 5. *Une fonction $f(I)$ étant intégrable dans un intervalle R, elle l'est aussi dans tout sous-intervalle de R et y est une fonction additive d'intervalle.*

§ 3. Soit $f(I)$ une fonction d'intervalle dans R, x un point quelconque de R, et M une famille des intervalles contenus dans R et contenant x; nous supposons que M contient des intervalles de la longueur si petite que l'on veut.

Cela posé nous appellerons le dérivé supérieur $\overline{f}^*_M(x)$, (respectivement inférieur $\underline{f}^*_M(x)$) de $f(I)$ spécial au système M, la limite supérieure (respectivement inférieure) du quotient $f(I):|I|$, lorsque I tend vers zéro appartenant à M.

Envisageons les cas particuliers:

1° lorsque $\overline{f}^*_M(x)=\underline{f}^*_M(x)$, la valeur commune de ces deux nombres sera nommée simplement le dérivé spécial au système M et désigné par $f^*_M(x)$;

2° lorsque M comprend tous les intervalles contenant x et contenus dans R, les nombres $\overline{f}^*_M(x)$, $\underline{f}^*_M(x)$, seront appelés le dérivé supérieur, respectivement inférieur, de $f(I)$ en x, et désignés par $\overline{f}(x)$ $\underline{f}(x)$. Dans le cas où ils sont égaux, on pose, par définition $f'(x)=\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$, $f'(x)$ étant nommé, tout court, la dérivée de $f(I)$.

3° lorsque M contient tous les intervalles contenus dans R et dont x est l'extrémité gauche, les nombres $\overline{f}^*_M(x)$, $\underline{f}^*_M(x)$ seront dits les nombres dérivés de Dini du côté droit et désignés: le dérivé supérieur par $\overline{f}^+(x)$ et celui inférieur par $\underline{f}^+(x)$. D'une manière tout-à-fait pareille on définit les deux dérivés de Dini à gauche; ils seront désignés par $\overline{f}^-(x)$ et $\underline{f}^-(x)$ respectivement.

§ 4. **Lemme.** Une fonction d'intervalle $f(I)$ admettant dans R l'intégrale supérieure (inférieure) finie, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un nombre $\eta>0$ tel que, $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ [1]) étant une subdivision quelconque de R, d'ordre inférieur à η, on a:

$$\Phi(R)\geqslant\sum_{k=1}^{s}\Phi(I_k)+\sum_{k=s+1}^{n}f(I_k)-\varepsilon,\quad\text{respectivement}\tag{2}$$

$$\varphi(R)\leqslant\sum_{k=1}^{s}\varphi(I_k)+\sum_{k=s+1}^{n}f(I_k)+\varepsilon,\tag{2 bis}$$

où: $s=1, 2, \dots n$.

Démonstration: en effet, soit donné $\varepsilon>0$. D'après la définition même de l'intégrale supérieure (§ 2), on peut assigner à ε un nombre $\eta>0$ tel qu'on ait pour toute subdivision $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q)$ d'ordre inférieur à η:

$$\sum_{p=1}^{q}f(\delta_p)\leqslant\Phi(R)+\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3}$$

Ceci étant, soit $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ une subdivision quelconque de R d'ordre moindre que η, et s quelconque des nombres $1, 2, \dots, n$. Assignons à chaque intervalle I_k une subdivision $(I_{k,1}, I_{k,2}, \dots, I_{k,r_k})$ de manière que, pour tout $k=1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{r=1}^{r_k}f(I_{k,r})\geqslant\Phi(I_k)-\frac{\varepsilon}{2n}.$$

On a donc, d'après (3):

$$\sum_{k=1}^{s}\Phi(I_k)+\sum_{k=s+1}^{n}f(I_k)\leqslant\sum_{k=1}^{s}\sum_{r=1}^{r_k}f(I_{k,r})+\sum_{k=s+1}^{n}f(I_k)+\frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\leqslant\Phi(R)+\varepsilon,$$

ce qui équivaut à (2) [2]).

[1]) remarquons que l'ordre des indices k ne correspond pas, en général, à celui des intervalles I_k; les intervalles désignés par I_k, I_{k+1} n'ont pas donc nécessairement des extrémités communes.

[2]) on a supposé dans la démonstration de ci-dessus que $\Phi(I)$ est finie dans chaque intervalle I_k $(k=1, 2, \dots, s)$; or, lorsque $\Phi(I)$ est infinie, elle ne peut être, en vertu du théorème 1 (§ 2), qu'infinie négative, et dans ce cas l'inégalité (2) est évidente.

Théorème 6. *Une fonction $f(I)$ admettant dans R l'intégrale supérieure (respectivement inférieure) finie, on a, en presque tout point $x \varepsilon R$:*

$$\overline{f}(x) \geqslant \underline{\Phi}(x), \qquad \text{respectivement} \tag{4}$$

$$\underline{f}(x) \leqslant \overline{\varphi}(x). \tag{4 bis}$$

Démonstration: désignons par E l'ensemble des points où une fonction $f(I)$ admettant l'intégrale supérieure dans R finie, ne vérifie pas (4). Il faut prouver que $|E| = 0$. Supposons dans ce but, par impossible, que

$$|E| > 0. \tag{5}$$

Soit pour tout couple de nombres naturels (n, m) $E_{n,m}$ l'ensemble des points x où, pour chaque intervalle δ contenant x:

$$\left\{\begin{aligned} &|\delta| < \frac{1}{n} && \text{entraîne} \\ &\Phi(\delta) > f(\delta) + \frac{|\delta|}{m}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

On a évidemmment

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} E_{n,m},$$

donc, d'après (5), il existe un couple de nombres (n_0, m_0) tel que

$$|E_{n_0, m_0}| > 0.$$

Soit maintenant η_0 la valeur de η du lemme précédent établie de manière à vérifier la condition de ce lemme par rapport à $\varepsilon = \frac{|E_{n_0, m_0}|}{2m_0}$; on peut supposer évidemment que

$$\eta_0 < \frac{1}{n_0}. \tag{7}$$

Ceci étant, soit $(I_1, I_2, \ldots, I_p)$ une subdivision de R d'ordre moindre que η_0 et telle que

$$\Phi(R) < \sum_{k=1}^{p} f(I_k) + \frac{|E_{n_0, m_0}|}{2m_0}; \tag{8}$$

on peut supposer évidemment que les intervalles I_k sont numérotés

de façon que les premiers s de ces intervalles. $I_1, I_2, \ldots, I_s$ sont tous ceux qui contiennent des points de E_{n_0, m_0}.

Or, d'après le lemme précédent:

$$\Phi(R) \geqslant \sum_{k=1}^{s} \Phi(I_k) + \sum_{k=s+1}^{p} f(I_k) - \frac{|E_{n_0, m}|}{2m_0},$$

donc, en vertu (6) et (7):

$$\begin{aligned} \Phi(R) &\geqslant \sum_{k=1}^{p} f(I_k) + \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^{s} |I_k| - \frac{|E_{n_0, m_0}|}{2m_0} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{p} f(I_k) + \frac{|E_{n_0, m_0}|}{2m_0}, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec (8) et qui justifie, par suite, notre théorème.

§ 4. **Théorème 7.** *Lorsque une fonction d'intervalle $f(I)$ à l'intégrale supérieure (inférieure) finie, n'admet qu'un nombre fini ou dénombrable de points d'écart positif (respectivement négatif) et lorsque la somme des écarts positifs (négatifs) est finie*[1]*), on a en presque tout point de R:*

$$f^*(x) \leqslant \Phi^*(x), \qquad \text{respectivement} \tag{9}$$

$$f^*(x) \geqslant \varphi^*(x), \tag{9 bis}$$

où $f^*(x)$, $\Phi^*(x)$ (respectivement $f^*(x)$, $\varphi^*(x)$) sont des dérivés de $f(I)$ et $\Phi(I)$, spéciaux en x à un même système M des intervalles (cf. § 3) et d'ailleurs quelconques

Démonstration: soit $f(I)$ une fonction d'intervalle vérifiant dans R les conditions de notre théorème et soit E l'ensemble de points où les fonctions $f(I)$ et $\Phi(I)$ admettent des nombres dérivés spéciaux à des mêmes systèmes d'intervalles et n'y vérifiant pas l'inégalité (9). Supposons, par impossible, que $|E| > 0$. Appelons par E_n l'ensemble de tous les points x tels que, pour chacun d'eux, il existe une suite d'intervalles $\delta_k^{(x)}$ tendant vers zéro, contenant x et vérifiant l'inégalité

$$f(\delta_k^{(x)}) \geqslant \Phi(\delta_k^{(x)}) + \frac{|\delta_k^{(x)}|}{n}. \tag{10}$$

[1]) on va voir (§ 5) que les restrictions relatives aux écarts de la fonction $f(I)$ sont nécessaires pour que le théorème subsiste (v. § 5).

On a évidemment $E = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, donc, E étant, par hypothèse, de mesure non-nulle, il existe un nombre n_0 tel que

$$|E_{n_0}| > 0.$$

Soit maintenant $\{a_k\}$ la suite des points d'écart positif de la fonction $f(I)$. La somme $\sum_{k=1}^{\infty} \Omega(a_k)$ étant finie par l'hypothèse, on peut déterminer un nombre m de façon que

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \Omega(a_k) < \frac{|E_{n_0}|}{3n_0} \ldots, \tag{11}$$

On peut, d'autre part, d'après le théorème connu de M. Vitali[1]) extraire de la famille de tous les intervalles $\{\delta_k^{(x)}\}$, un système fini d'intervalles $(I_1, I_2, \ldots, I_p)$, n'empiétant par et satisfaisant, en vertu de (10), aux relations:

$$\left\{\begin{array}{ll} f(I_k) \geqslant \Phi(I_k) + \dfrac{|I_k|}{n_0} & (k = 1, 2, \ldots, p) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} |I_k| \geqslant \frac{|E_{n_0}|}{3}; & \end{array}\right. \tag{12}$$

on peut supposer encore qu'aucun des intervalles $\{I_k\}$ ne contient aucun de points $a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}$ et que les longueurs de ces intervalles ne dépassent pas ε, ε étant un nombre positif établi de façon que pour toute subdivision $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ de R, d'ordre moindre que ε:

$$\Phi(R) > \sum_{k=1}^{p} f(\delta_r) - \frac{|E_{n_0}|}{3}. \tag{13}$$

Désignons maintenant par $I_{p+1}, I_{p+2}, \ldots, I_{p+s}$ les intervalles contigus (dans R) aux intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_p$. On peut évidemment assigner à chacun d'eux, soit à I_{p+k}, une subdivision $(I_{k,1}, I_{k,2}, \ldots, I_{k,r_k})$ d'ordre moindre que ε et telle que

$$\Phi(I_{p+k}) \leqslant \sum_{r=1}^{r_k} f(I_{k,r}) + \frac{|E_{n_0}|}{3s.n_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s) \tag{14}$$

[1]) Voir p. ex. Carathéodory. *Vorlesungen ueber reellen Funktionen.* 1918. p. 299—307.

Regardons ensuite la subdivision $(I_1, I_2, \ldots, I_{p+s})$ et soient $(b_1, b_2, \ldots, b_{p+s-1})$ ses points de division. On a d'après le théorème 3 (§ 2) et (11):

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= \sum_{k=1}^{p+s} \Phi(I_k) + \sum_{k=1}^{p+s-1} \Omega(b_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p+s} \Phi(I_k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \Omega(a_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p+s} \Phi(I_k) + \frac{|E_{n_0}|}{3n_0}. \end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de (12) et (14):

$$\begin{aligned} \Phi(R) &\leq \sum_{k=1}^{p} f(I_k) - \frac{1}{n_0} \sum_{k=1}^{p} |I_k| + \sum_{k=1}^{s} \sum_{r=1}^{r_k} f(I_{k,r}) + \frac{|E_{n_0}|}{3n_0} + \frac{|E_{n_0}|}{3n_0} \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} f(I_k) + \sum_{k=1}^{s} \sum_{r=1}^{r_k} f(I_{k,r}) - \frac{|E_{n_0}|}{n_0}. \end{aligned} \tag{15}$$

Or, les systèmes d'intervalles $\{I_j\}$ $\{I_{k,r}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, r;$ r parcourant, pour k fixe, $1, 2, \ldots, r_k)$ forment une subdivision de R d'ordre inférieur à ε. L'inégalité (15) est donc incompatible avec (13); nous aboutissons ainsi à une contradiction.

Corollaire 1. *Lorsque une fonction $f(I)$ dans l'intervalle R vérifie les prémisses du théorème précédent, on a presque partout dans R:*

$$\overline{f}(x) \leq \overline{\Phi}(x), \qquad \underline{f}(x) \leq \underline{\Phi}(x), \tag{16}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{f}^{+}(x) \leq \overline{\Phi}^{+}(x), & \underline{f}^{+}(x) \leq \underline{\Phi}^{+}(x), \\ \overline{f}^{-}(x) \leq \overline{\Phi}^{-}(x), & \underline{f}^{-}(x) \leq \underline{\Phi}^{-}(x), \end{array}\right. \tag{17}$$

$$\underline{f}(x) \leq \underline{\Phi}(x) \leq \overline{f}(x) \leq \overline{\Phi}(x) \tag{18}$$

respectivement:

(16 bis)
(17 bis) } *les relations analogues pour* $\varphi(I)$.
(18 bis)

Démonstration: en effet, on peut faire correspondre à chaque x une famille d'intervalles M telle que

$$\overline{f}(x) = f^*_M(x);$$

on peut aussi extraire de chaque famille M une autre M' telle qu'un nombre dérivé (unique) de $\Phi(I)$ existe par rapport à M'; on a donc d'après le théorème précédent, en presque tout point x:

$$\overline{f}(x) = f^*_M(x) = f^*_{M'}(x) \leq \Phi^*_{M'}(I) \leq \overline{\Phi}(x).$$

ce qui prouve la première des relations (16). On achève de la même manière la démonstration des autres inégalités (16), (17).

S'il s'agit enfin de la relation (18), elle est une conséquence immédiate de (16) et du théorème 6 (§ 4).

Corollaire 2. *Une fonction $f(I)$ admettant ses intégrales, supérieure et inférieure, finies simultanément, elle vérifie presque partout à la fois (9) et (9bis), donc, en particulier, (17), (18), (17bis), (18bis).*

C'est une conséquence immédiate du précédent et du théorème 4 (§ 2).

Corollaire 3. *Une fonction $f(I)$ étant intégrable, ses nombres dérivés de Dini sont presque partout égaux aux dérivés correspondents de son intégrale.*

On le conclut des relations (18) et (17bis) qui, dans le cas envisagé, sont toutes deux vérifiées.

En vertu de ce Corollaire les nombres dérivés extrêmes d'une fonction intégrable satisfont aux relations bien connues de M^me Young et de M. Denjoy [1]); on peut donc regarder cette proposition comme une généralisation du théorème de MM. Denjoy-Young aux fonctions intégrables, mais non-nécessairement additives. On peut encore observer que cette remarque engendre le théorème 2 de l'ouvrage cité de M. Burkill,

§ 5. On aperçoit que le théorème 7 du § précédent a lieu sous les conditions beaucoup plus réstrictives que le théorème 6 (§ 3). L'exemple suivant montre que les réstrictions relatives à l'allure des écarts de la fonction sont nécessaires pour que le théorème en question subsiste: posons $R = (0, \pi)$ et pour tout intervalle $I = (a, b) \subset R$ $(a < b)$:

$$f(I) = \begin{cases} b - a, & \text{lorsque } a, b \text{ sont, tous deux, irrationnels;} \\ 2(b - a), & \text{lorsque } a \text{ est rationel, et } b \text{ irrationel;} \\ -2\pi, & \text{lorsque } b \text{ est un nombre rationel.} \end{cases}$$

[1]) *Voir*: Saks. *Sur les nombres dérivés des fonctions. Fund. Math.* t. V. 1924. p. 98—104.

On vérifie de suite que $f(I)$, ainsi définie, admet dans R, et dans tout sous-intervalle de R, l'intégrale supérieure finie (en particulier: $\overline{\Phi}(R) = \pi$); elle est d'écart nul en tout point x irrationel. Or, on a, en tout point:

$$\overline{\overline{\Phi}}(x) = 1, \quad \overline{f}(x) = 2, \quad \text{donc:} \quad \overline{\overline{\Phi}} < \overline{f},$$

la somme des écarts positifs étant infinie.

§ 6. **Théorème 8.** *La fonction $f(I)$ étant à variation bornée, ses intégrales sont presque partout dérivables et on a presque partout*

$$(19) \qquad \Phi'(x) = \overline{f}(x), \qquad \varphi'(x) = \underline{f}(x),$$

ces deux dérivés étant sommables.

Démonstration: Les intégrales $\Phi(I)$ et $\varphi(I)$ sont à variation bornée en même temps que $f(I)$ (th. 2; § 2); d'autre part, d'après th. 3 (§ 2), elles satisfont, pour tous deux d'intervalles I_1, I_2 contigus, à l'inégalité:

$$\Phi(I_1 + I_2) \geq \Phi(I_1) + \Phi(I_2),$$
$$\varphi(I_1 + I_2) \leq \varphi(I_1) + \varphi(I_2);$$

elles sont donc normales d'après M. Banach et admettent, par suite, presque partout les dérivées uniques et intégrables [1]). Ceci étant, la relation (19) se fait une conséquence du Corollaire 2.

CHAPITRE II.

Applications et exemples.

La notion de la fonction d'intervalle, ainsi que des intégrales d'une telle fonction, se présentent, sous des formes différentes dans la théorie des fonctions réelles. Nous nous proposons ici d'en mentionner quelques applications; on peut d'ailleurs en trouver bien d'autres.

§ 1. *Les courbes réctifiables: théorème de M. Tonelli.*

1. Soit: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ une courbe réctifiable (non-nécessairement continue).

Posons pour tout sous-intervalle $I = (a, b)$ de $(0, 1)$:

$$f(I) = \sqrt{[x(b) - x(a)]^2 + [y(b) - y(a)]^2};$$

l'intégrale supérieure de $f(I)$, dans tout intervalle, $I = (a, b)$ est,

[1]) Banach. *Sur une classe de fonctions d'ensembles. Fund. Math.* t. VI. 1924. p. 177, 182.

par définition, la longueur de l'arc de la courbe considérée correspondant à l'intervalle (a, b) du paramètre t. On a donc, d'après le théorème 8, presque partout:

$$\Phi'(t) = \bar{f}(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2};$$

or, on vérifie aisément que $\Phi(I)$ est dans le cas envisagé une fonction additive, donc, en posant pour $I = (0, t)$: $f(I) = s(t)$, on obtient

$$\frac{ds^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt}, \tag{1}$$

ce qui constitue le résultat de M. Tonelli [1]).

2. En appliquant au calcul de l'aire des surfaces le même théorème 8, mais généralisé aux fonctions de rectangle, on obtient l'énoncé suivant:

$z = f(x, y)$ $(0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1)$ *étant une surface continue à l'aire finie, on a en presque chaque point* (x, y) *du carré* $(0, 0: 1, 1)$

$$\lim \left[\frac{\sigma(R)}{m(R)}\right]^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

R désignant un carré quelconque contenant le point (x, y) et tendant vers 0, et $\sigma(R)$ l'aire de la partie de la surface considérée correspondante au rectangle R du plan xy.

Nous ne donnons pas ici des détails de la démonstration qui est liée intimément aux recherches récentes de MM. Tonelli et Radó [2]) sur le calcul de l'aire des surfaces.

§ 2. *L'intégrale de M. Hellinger.*

Soit $h(x)$ une fonction quelconque bornée dans $R = (0, 1)$ et α un nombre positif. Posons, pour l'intervalle quelconque $I = (a, b) \subset R$:

$$f_\alpha(I) = |h(b) - h(a)|^\alpha (b - a)^{1-\alpha}.$$

L'intégrale supérieure de $f_\alpha(I)$, dans un intervalle quelconque $\delta \subset R$, est appelée l'intégrale de M. Hellinger d'ordre α dans δ et on pose: $\overline{\int\limits_\delta} f_\alpha(I) = \int\limits_\delta dh^\alpha \cdot dx^{1-\alpha}$.

[1]) Tonelli; *Rend. R. Ac. Linc.* 1916 (1° sem.). La relation (1) a été d'ailleurs prouvée antérieurement sous la condition que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ satisfont à la condition de Lipschitz (Lebesgue. *Leçons sur l'intégration.* 1906), où, plus généralement, qu'elles sont absolument continues (Tonelli, *Rend. R. Ac. Linc.* 1906 (1° sem.)).

[2]) voir: Tonelli, C. R. 1926. t. 182, p. 1198. Radó, C. R. 1926. t. 183, p. 588. Saks, C. R. 1926. t. 183. p. 850.

La fonction $h(x)$ sera dite absolument continue d'ordre α, lorsque $f_\alpha(I)$ est absolument continue (§ 1; Chap. I). On voit que la continuité absolue d'ordre $\alpha = 1$ équivaut à celle, au sens habituel.

Nous allons prouver les deux propositions suivantes:

A. lorsque $h(x)$ admet l'intégrale de M. Hellinger d'ordre $\alpha > 0$ finie, elle est absolument continue de tout ordre $\beta < \alpha$, et admet presque partout la dérivée unique sommable de puissance α.

Démonstration: 1° posons $\dfrac{\alpha}{\beta} = p > 1$, et soit $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ un système quelconque d'intervalles n'empiétant pas et contenus dans R. On a, d'après l'inégalité connue de M. Hölder, en posant $I_k = (a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} f_\beta(I_k) = \sum_{k=1}^{n} |h(b_k) - h(a_k)|^\alpha \cdot |I_k|^{1-\alpha}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [|h(b_k) - h(a_k)|^\alpha \cdot |I_k|^{1-\alpha}]^{\frac{1}{p}} \cdot |I_k|^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} f_\alpha(I_k)\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} |I_k|\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

L'expression $\sum\limits_{k=1}^{n} f_\alpha(I_k)$ admettant, par hypothèse, la limite supérieure finie lorsque $\max |I_k|$ tend vers zéro, la continuité absolue de $f_\beta(I)$ découle de la dernière inégalité.

2° D'après le th. 8 (Chap. I, § 6), $f_\alpha(I)$ étant négative, donc à variation bornée, $\bar{f}_\alpha(x)$ est sommable, et, par suite, presque partout finie. Or, on a:

$$\bar{f}(x) \geqslant \limsup_{u \to 0} \left|\frac{h(x + u) - h(x)}{u}\right|^\alpha;$$

donc, les quatre nombres dérivés de $h(x)$ sont, presque partout finis, et, par conséquent, d'après le théorème de MM. Denjoy-Young, ils sont presque partout égaux. On a donc, presque partout:

$$\bar{f}_\alpha(x) = f'_\alpha(x) = [h'(x)]^\alpha.$$

et $h'(x)$ est sommable de puissance α.

On conclut immédiatemant de là et du théorème 2 (§ 2; Chap. I):
B. $h(x)$ étant absolument continue d'ordre α, on a:

$$\int_0^x h^\alpha . dx^{1-\alpha} = \int_0^x [h'(x)]^\alpha dx.$$

Le résultat suivant du à M. Hahn est contenu dans la proposition A: *$h(x)$ admettant l'intégrale de M. Hellinger d'ordre $\alpha > 1$, elle est absolument continue et sa dérivée est sommable de puissance α* [1]).

Pour obtenir cette proposition, il suffit de poser dans A: $\beta = 1$.

La transformation de l'intégrale de M. Hellinger effectuée par M. Hahn, est fournie par B, car, pour $\alpha > 1$, toute fonction intégrable au sens de M. Hellinger d'ordre α est encore absolument continue de même d'ordre.

[1]) *Voir*: Hahn. *Monatshefte f. Math. und Physik*. t. 23. 1912. p. 161—183; aussi: Hobson. *The theory of functions*. 1921. vol. I. p. 609—615.

Théorie des continus irréductibles entre deux points II [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

En cherchant à caractériser l'arc simple de façon topologique M. Zoretti introduisit en 1909 la notion de continu irréductible, qui se présenta comme une généralisation naturelle de l'arc simple. Il parut probable d'abord [2]) que la propriété de l'arc simple d'être ordonné linéairement appartient aux continus irréductibles en général. L'ingénieux exemple d'un continu irréductible indécomposable, inventé par M. L. E. J. Brouwer, montra qu'il n'en était rien: sur un continu indécomposable il n'existe aucun ordre linéaire „naturel" (au point de vue topologique), pas plus qu'il n'en existe sur un cercle ou une circonférence [3]).

Le problème d'établir un „ordre" sur un continu irréductible surgît alors sous une autre forme [4]). Il ne s'agissait plus d'ordonner les points d'un continu irréductible, mais de diviser ce continu en parties (en „tranches") qui puissent être ordonnées d'une facon conforme à sa structure.

[1]) La première partie de cet ouvrage parut dans Fund. Math. III. pp. 200—231. Je la citerai: *Irr. I.*

[2]) Voir: Zoretti Ann. Ec. Norm. XXVI (1909) et Comptes Rendus t. 151 (1910).

[3]) Proc. Akad. Wett. Amsterdam XIV (1911) p. 144, § 4. „The impossibility of a linear arrangement of the points of an irreducible continuum".

[4]) Voir: Vietoris *Stetige Mengen* Mon. f. Math. u. Phys. XXXI (1921), H. Hahn *Ueber die irreduzible Kontinua*, Wiener Ber. 130 (1921). W. A. Wilson *On the structure of a continuum, limited and irreducible between two points*, Amer. Journ. Math. XLVIII (1926).