tandis qu'il y a des fonctions sommables $y(t)$ telles que presque partout en dehors de L_1:

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_n f_n}{\varphi(n)}\right| = \infty, \quad \left(\text{où}\quad b_n = \int_0^1 y(t)\, f_n(t)\, dt\right).$$

Pour interpréter encore le corollaire du § 8, nous indiquerons la proposition suivante qui en découle immédiatement: *si $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ désigne une suite de procédés linéaires de sommation et si pour chaque n il existe une fonction sommable dont le développement (relatif au système (1)) n'est sommable par le procédé T_n en presque aucun point d'un ensemble L, il existe une fonction sommable dont le développement n'est sommable en presque aucun point de l'ensemble L par* aucun *des procédés T_n.*

Le lecteur trouvera facilement quelques autres applications des théorèmes du Chapitre précédent qui rentrent dans le même ordre des idées.

Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes.

Par

Tibor Radó (Szeged, Hongrie).

M. L. Tonelli a publié récemment une série de Notes [1]) sur l'aire des surfaces courbes, contenant des résultats du plus haut intérêt et à plusieurs égards définitifs. En comparant ses méthodes avec celles du mathématicien hongrois Z. de Geöcze, je suis arrivé au théorème qui fait l'objet de la communication présente et qui établit un *procédé régulier de calcul pour l'aire*, au sens de Lebesgue, de toute surface continue donnée sous la forme $z = f(x, y)$.

Soit $f(x,y)$ une fonction continue dans le carré $Q: 0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. L'aire de la surface $z = f(x,y)$ a été définie par M. H. Lebesgue comme la plus petite limite de l'aire, au sens élémentaire, des surfaces polyédrales tendant vers la surface proposée; désignons l'aire ainsi définie par $L_Q[f]$. Si $L_Q[f]$ est finie, la fonction $f(x,y)$ possède presque partout dans Q les dérivées premières $p(x,y)$ et $q(x,y)$, et la fonction $(1 + p^2 + q^2)^{1/2}$ est sommable dans Q [2]). On a toujours

$$(1) \qquad \iint_{(Q)} (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\, dx\, dy \leqq L_Q[f] \text{ [3])},$$

et on forme aisément des exemples où le signe d'égalité ne tient pas. *Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que $f(x, y)$ soit ab-*

[1]) L. Tonelli, *Sulla quadratura delle superficie,* I, II, III, Rendiconti della r. Accademia dei Lincei; séances du 7 mars, du 11 avril et du 7 mai 1926; *Sopra alcuni proprietà di un polinomio di approssimazione,* dans les mêmes Rendiconti; séance du 16 mai 1926. Je citerai ces Notes par T. I, T. II, T. III et T. IV.

[2]) Cf. le travail de M. Lampariello, cité dans T. II, p. 446.

[3]) T. II.

solument continue dans Q; c'est le résultat principal de M. Tonelli [1]).

Si $f(x,y)$ n'est pas absolument continue, l'intégrale classique ne fournira point l'aire de la surface. Comment faut-il alors calculer $L_Q[f]$? Soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\nu, \dots$ une suite de surfaces polyédrales tendant vers la surface donnée et soit σ_ν l'aire de Σ_ν. On aura $\underline{lim}\, \sigma_\nu \geqq L_Q[f]$ par définition; mais il est clair que la relation $\underline{lim}\, \sigma_\nu = L_Q[f]$ tiendra seulement pour certaines suites spéciales, satisfaisant à des conditions restrictives. On ne sait pas cependant, il me semble, en quoi consistent ces restrictions, de sorte que la définition de l'aire ne fournit aucun moyen de calcul [2]).

On obtient un procédé de calcul, procédé valable pour toute surface continue $z = f(x, y)$, en utilisant certaines expressions introduites par Geöcze au cours de ses recherches profondes, expressions que je vais faire connaître [3]).

Soit R un rectangle contenu dans Q et défini par $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$. Posons

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_R[f] = \displaystyle\int_{x'}^{x''} |f(x,y'') - f(x,y')|\, dx, \\ \beta_R[f] = \displaystyle\int_{y'}^{y''} |f(x'',y) - f(x',y)|\, dy, \\ \gamma_R = (x''-x')(y''-y') = \text{aire du rectangle } R, \end{cases}$$

$$(3)\quad g_R[f] = ((\alpha_R[f])^2 + (\beta_R[f])^2 + \gamma_R^2)^{1/2}.$$

Soient $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < \dots < y_n = 1$ des points de division sur l'axe des x resp. des y, et soit D la division de Q en rectangles, obtenue par les droites

$$x = x_i,\ y = y_k\ (i = 0, 1, \dots, m;\ k = 0, 1, \dots, n).$$

Posons

$$(4)\quad G_Q[f; D] = \Sigma\, g_R[f],$$

la somme étant étendue à tous les rectangles de la division D. Voilà maintenant le théorème que je vais démontrer:

[1]) T. III.

[2]) Cf. les remarques de M. H. Lebesgue.

[3]) Cf. Z. de Geöcze, *Quadrature des surfaces courbes*. Thèse. Paris, 1908; reimprimée dans: *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, t. 26, 1910, pp. 1—88.

Théorème. *Soit* $D_1, D_2, \dots, D_\nu, \dots$ *une suite de divisions du carré* Q, *telle que le diamètre maximum des rectangles de la division* D_ν *tend vers zéro pour* $\nu \to \infty$. *Alors on a, dans la seule hypothèse de la continuité de* $f(x, y)$,

$$\lim_{\nu\to\infty} G_Q[f; D_\nu] = L_Q[f].$$

D'une manière précise: la limite à gauche existe toujours, elle est finie ou bien infinie positive, et elle est égale dans chacun de ces deux cas à l'aire $L_Q[f]$.

Ce théorème donne bien un procédé régulier général pour calculer l'aire; et il est à remarquer que ce procédé n'utilise point les dérivées de $f(x, y)$. Pour le cas particulier où $f(x, y)$ satisfait à une condition de Lipschitz, ce théorème a été démontré par Geöcze, à l'aide de considérations extrêmement ingénieuses et compliquées [1]). Pour le cas plus général où $f(x,y)$ est absolument continue au sens de M. Tonelli, ce théorème est un corollaire facile des résultats mentionnés plus haut de cet auteur.

2. Examinons d'abord le cas où $L_Q[f]$ est infini. Si le théorème ne tenait pas en ce cas, il existerait une suite de divisions $D_1, D_2, .., D_\nu ...$, le diamètre maximum des rectangles de D_ν tendant vers zéro, de sorte que

$$G_Q[f; D_\nu] < M, \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

où M désigne une constante finie. Soient alors

$$x_0^{(\nu)} = 0 < x_1^{(\nu)} < \dots < x_{m_\nu}^{(\nu)} = 1, \qquad y_0^{(\nu)} = 0 < y_1^{(\nu)} < \dots < y_{n_\nu}^{(\nu)} = 1$$

les points de division sur les axes définissant la division D_ν. Posons

$$v^{(\nu)}(x) = \sum_{k=1}^{n_\nu} \left| f(x, y_k^{(\nu)}) - f(x, y_{k-1}^{(\nu)}) \right|,$$

et soit, dans la notation de M. Tonelli [2]), $V_{(y)}(x)$ la variation totale de $f(x, y)$, considérée comme fonction de y, sur le segment

[1]) Cf. loc. cit. [3]). — Il semble ressortir de certains passages des travaux de Geöcze qu'il ne croyait pas possible de calculer l'aire, dans le cas général, à l'aide de ses sommes. Par contre, il annonce d'avoir trouvé la construction générale de surfaces polyédrales dont les aires tendent vers l'aire de la surface proposée. Il parait que sa mort prématurée l'avait empêché de développer ces recherches.

[2]) T. I.

$0 \leqq y \leqq 1$ de la droite verticale passant par le point $(x, 0)$. La fonction $v^{(\nu)}(x)$ est continue, $V_{(y)}(x)$ est finie ou bien infinie positive, mais bien déterminée pour $0 \leqq x \leqq 1$. On a pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$0 \leqq v^{(\nu)}(x) \leqq V_{(y)}(x), \quad \lim_{\nu \to \infty} v^{(\nu)}(x) = V_{(y)}(x).$$

On a évidemment

$$\int_{x_{k-1}^{(\nu)}}^{x_k^{(\nu)}} v^{(\nu)}(x)\, dx = \sum_{(k)} \alpha_R[f],$$

où $\underset{(k)}{\Sigma}$ indique que la sommation doit être étendue seulement aux rectangles de D_ν qui sont contenus dans le domaine $x_{k-1}^{(\nu)} \leqq x \leqq x_k^{(\nu)}$. On en déduit

$$\int_0^1 v^{(\nu)}(x)\, dx = \Sigma\, \alpha_R[f],$$

la sommation étant étendue à tous les rectangles de la division D_ν. Il vient donc

$$\int_0^1 v^{(\nu)}(x)\, dx = \Sigma\, \alpha_R[f] \leqq \Sigma\, g_R[f] = G_Q[f; D_\nu] < M.$$

Les fonctions non-négatives $v^{(\nu)}(x)$ tendant pour $0 \leqq x \leqq 1$ vers $V_{(y)}(x)$, il résulte de cette inégalité, en vertu d'un lemme bien connu de M. Fatou, que la fonction limite $V_{(y)}(x)$ est sommable et que l'on a

$$\int_0^1 V_{(y)}(x)\, dx \leqq M.$$

On obtient de la même manière la sommabilité de la fonction $V_{(x)}(y)$, qui est égale à la variation totale de $f(x,y)$, considérée comme fonction de x sur le segment $0 \leqq y \leqq 1$ de la droite horizontale passant par le point $(0, y)$. Mais si $V_{(y)}(x)$ et $V_{(x)}(y)$ sont sommables, l'aire $L_Q[f]$ est finie, en vertu d'un résultat de M. Tonelli[1]). Nous sommes donc arrivés à une contradiction, puisque nous avons

[1]) T. I. p. 446.

supposé que $L_Q[f]$ est infinie. Par conséquent, notre théorème est vrai si l'aire $L_Q[f]$ est infinie.

3. *Nous supposerons donc dans ce qui suit que $L_Q[f]$ est finie.* Désignons par $\Gamma_Q[f]$ la limite supérieure (c'est-à-dire la plus petite borne supérieure) des *sommes de Geöcze* $G_Q[f; D]$, pour toutes les divisions D du carré Q. Nous démontrons d'abord que $\Gamma_Q[f]$ est finie est que

$$\Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f];$$

pour éviter des longueurs nous ferons usage d'un résultat de M. Tonelli. Soit (ξ, η) un point du carré Q, et soit $V_{(y)}(\xi, \eta)$ la variation totale de $f(x, y)$, considérée comme fonction de y, sur le segment $x = \xi, 0 \leqq y \leqq \eta$. La fonction $V_{(y)}(x,y)$ est de la sorte bien définie dans Q, et puisque $L_Q[f]$ est finie, $V_{(y)}(x,y)$ est finie presque partout dans Q et sommable comme fonction de y pour presque tout x dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$[1]). On définit d'une manière analogue la fonction $V_{(x)}(x,y)$. Soit R un rectangle contenu dans Q et défini par $x' \leqq x \leqq x''$, $y' \leqq y \leqq y''$. En posant[2]).

$$\alpha_R^*[f] = \int_{x'}^{x''} \{V_{(y)}(x, y'') - V_{(y)}(x, y')\}\, dx,$$

$$\beta_R^*[f] = \int_{y'}^{y''} \{V_{(x)}(x'', y) - V_{(x)}(x', y)\}\, dy,$$

$$\gamma_R^* = (x'' - x')(y'' - y'),$$

$$g_R^*[f] = ((\alpha_R^*[f])^2 + (\beta_R^*[f])^2 + (\gamma_R^*)^2)^{1/2},$$

$$G_R^*[f; D] = \Sigma\, g_R^*[f],$$

la sommation étant étendue à tous les rectangles d'une division D, et en désignant enfin par $\Gamma_R^*[f]$ la limite supérieure des *sommes de Tonelli* $G_R^*[f; D]$ pour toutes les divisions D de Q, on a, comme l'a démontré M. Tonelli,

$$\Gamma_Q^*[f] \leqq L_Q[f]\ ^{3)}.$$

[1]) T. II.
[2]) T. II.
[3]) T. II, p. 448. — La quantité, désignée par nous par $\Gamma_Q^*[f]$, est désignée à l'endroit cité par A; l'aire $L_Q[f]$ y est désignée par S.

Mais en comparant les expressions introduites par M. Tonelli avec les expressions (2), (3), (4) de Geöcze, on voit immédiatement que

$$G_Q[f;D] \leqq G_Q^*[f;D],$$

d'où

$$\Gamma_Q[f] \leqq \Gamma_Q^*[f].$$

Mais on a, d'après M. Tonelli, $\Gamma_Q^*[f] \leqq L_Q[f]$, donc a fortiori

(5) $$\Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f].$$

4. Nous allons démontrer que $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$, en imitant le procédé dont M. Tonelli s'est servi, dans le cas où $f(x,y)$ est absolument continue, pour établir l'égalité de $L_Q[f]$ et de l'intégrale double classique [1]). Nous démontrerons donc notre assertion d'abord pour le cas où les dérivées premières de $f(x,y)$ existent partout dans Q et sont continues dans Q et sur la frontière de Q. Dans ce cas simple, on démontre aisément que

$$L_Q[f] = \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy \text{ [2]});$$

il s'agit donc de prouver que

$$\Gamma_Q[f] = \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy.$$

En reprenant les formules (2), et en utilisant la continuité de f, nous pouvons écrire

$$\alpha_R[f] = |f(\xi,y'') - f(\xi,y')|\,(x''-x'), \quad \text{où} \quad x' < \xi < x''.$$

La dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe, par hypothèse, partout dans Q; nous avons donc

$$f(\xi,y'') - f(\xi,y') = (y''-y')\,q(\xi,\eta), \quad \text{où} \quad y' < \eta < y''.$$

Donc

$$\alpha_R[f] = (x''-x')(y''-y')\,|q(\xi,\eta)| = |q(\xi,\eta)|\,\gamma_R,$$

et d'une façon analogue

$$\beta_R[f] = |p(\bar\xi,\bar\eta)|\,\gamma_R,$$

[1]) T. III.

[2]) Cf. par ex. T. III., p. 637.

les points (ξ,η), $(\bar\xi,\bar\eta)$ étant intérieurs au rectangle R. Par conséquent,

$$g_R[f] = [1+p(\bar\xi,\bar\eta)^2 + q(\xi,\eta)^2]^{1/2}\gamma_R = \\ = [1+p(\xi,\eta)^2 + q(\xi,\eta)^2]^{1/2}\gamma_R + \varepsilon_R\gamma_R,$$

où, à cause de la continuité de $p(x,y)$, $q(x,y)$, la quantité ε_R tend vers zéro avec le diamètre de R, et cela uniformément pour toutes les positions de R dans Q. En désignant par δ le diamètre maximum des rectangles d'une division D de Q, et en observant que $\Sigma\gamma_R =$ aire de $Q = 1$, nous obtenons

$$G_R[f;D] = \Sigma[1+p(\xi,\eta)^2+q(\xi,\eta)^2]^{1/2}\gamma_R + \varepsilon,$$

où ε tend vers zéro pour $\delta\to 0$. Considérons maintenant une suite de divisions pour lesquelles $\delta\to 0$; la somme $\Sigma[1+p(\xi,\eta)^2+q(\xi,\eta)^2]^{1/2}\gamma_R$ tendra vers l'intégrale $\iint_{(Q)}(1+p^2+q^2)^{1/2}dx\,dy$, puisque la fonction $(1+p^2+q^2)^{1/2}$ est continue par hypothèse. Comme ε tend vers zéro, il vient donc

$$\lim_{\varrho\to\infty} G_Q[f;D_\nu] = \iint_{(Q)} (1+p^2+q^2)^{1/2}dx\,dy = L_Q[f],$$

pour toute suite de divisions $D_1, D_2, \ldots, D_\nu, \ldots$, telle que le diamètre maximum des rectangles de D_ν tend vers zéro. Par conséquent, on a $\Gamma_Q[f] \geqq L_Q[f]$; mais comme on a toujours $\Gamma_Q[f] \leqq L_Q[f]$ en vertu de (5), il résulte $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$, ce que nous voulions démontrer.

5. Passons au cas général, et soit $\underline{Q}$ un carré concentrique à Q et complètement intérieur à Q. Dans le numéro suivant nous établirons l'existence d'une suite de fonctions $F_1(x,y), F_2(x,y), \ldots, F_r(x,y), \ldots$ jouissant des propriétés suivantes:

I. les fonctions $F_r(x,y)$ et leurs dérivées premières sont continues dans le carré fermé $\underline{Q}$ et l'on a $F_r(x,y)\to f(x,y)$ uniformément dans $\underline{Q}$;

II. en désignant par $\Gamma_{\underline{Q}}[f]$ la limite supérieure des sommes de Geöcze relatives au carré $\underline{Q}$ et à la fonction $F_r(x,y)$, et par $\Gamma_Q[f]$ la limite supérieure des sommes de Geöcze relatives au carré primitif Q et à la fonction $f(x,y)$, on a l'inégalité $\Gamma_{\underline{Q}}[F_r] \leqq \Gamma_Q[f]$, $r = 1, 2, \ldots$.

Admettons ceci, et montrons comment on en déduit l'égalité

$\Gamma_{\underline{Q}}[f]=L_{\underline{Q}}[f]$. D'abord, puisque $F_r(x,y)$ admet des dérivées premières continues dans Q, on a en vertu du numéro 4:

$$\Gamma_{\underline{Q}}[F_r]=L_{\underline{Q}}[F_r],$$

de sorte qu'il résulte de la propriété II

(6) $$\overline{\lim}\, L_{\underline{Q}}[F_r]\leqq \Gamma_{\underline{Q}}[f] \quad \text{pour} \quad r\to\infty.$$

Soit $L_{\underline{Q}}[f]$ l'aire de la portion de la surface $z=f(x,y)$ ayant pour projection le carré $\underline{Q}$. Les fonctions $F_r(x,y)$ tendent uniformément vers $f(x,y)$ dans $\underline{Q}$; on a donc, en vertu de la sémi-continuité inférieure de l'aire au sens de Lebesgue,

(7) $$L_{\underline{Q}}[f]\leqq \underline{\lim}\, L_{\underline{Q}}[F_r] \quad \text{pour} \quad r\to\infty.$$

En comparant (5), (6), (7), il vient donc

(8) $$L_{\underline{Q}}[f]\leqq \Gamma_{\underline{Q}}[f]\leqq L_{Q}[f].$$

Faisons tendre carré $\underline{Q}$ vers Q. A cause de la semi-continuité inférieure de l'aire, $L_{\underline{Q}}[f]$ ne saurait tendre vers une limite plus petite que $L_Q[f]$; d'autre part, en vertu de (8), $L_{\underline{Q}}[f]$ ne saurait tendre vers une limite plus grande que $L_Q[f]$. Par conséquent, $L_{\underline{Q}}[f]$ tend vers $L_Q[f]$. Il résulte donc de (8), par le passage à la limite, $\underline{Q}\to Q$

$$L_Q[f]\leqq \Gamma_Q[f]\leqq L_Q[f],$$

donc $L_Q[f]=\Gamma_Q[f]$, comme il a été annoncé.

6. Nous avons maintenant à démontrer l'existence des fonctions $F_r(x,y)$. Soit h une quantité positive assujettie à la seule restriction que pour tout point (x_0,y_0) de $\underline{Q}$ le carré $x_0-h\leqq x\leqq x_0+h$, $y_0-h\leqq y\leqq y_0+h$ soit contenu dans Q. Définissons dans $\underline{Q}$ la fonction $F^{(h)}(x,y)$ par la formule

(9) $$F^{(h)}(x,y)=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x+\xi,y+\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Comme f est continue dans Q, $F^{(h)}$ est continue dans $\underline{Q}$ et l'on a

$$F^{(h)}(x,y)\to f(x,y) \quad \text{pour} \quad h\to 0,$$

uniformément dans $\underline{Q}$. On a, en outre, évidemment

(10) $$\frac{\partial F^{(h)}}{\partial x}=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}(f(x+h,y+\eta)-f(x-h,y+\eta))\,d\eta,$$
$$\frac{\partial F^{(h)}}{\partial y}=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}(f(x+\xi,y+h)-f(x+\xi,y-h))\,d\xi,$$

donc, f étant continue, les dérivées premières de $F^{(h)}$ sont continues dans le carré fermé $\underline{Q}$. Donc, toute suite de ces fonctions $F^{(h)}$, correspondant à des valeurs de h tendant vers zéro possède la propriété I_r énoncée au numéro précédent. Pour établir la propriété II, soit r un rectangle contenu dans $\underline{Q}$ et défini par $x'\leqq x\leqq x''$, $y'\leqq y\leqq y''$. Nous avons

$$F^{(h)}(x,y'')-F^{(h)}(x,y')=$$
$$=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}(f(x+\xi,y''+\eta)-f(x+\xi,y'+\eta))\,d\xi\,d\eta,$$

donc

$$|F^{(h)}(x,y'')-F^{(h)}(x,y')|\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|f(x+\xi,y''+\eta)-f(x+\xi,y'+\eta)|\,d\xi\,d\eta,$$

d'où

(11) $$\alpha_R[F^{(h)}]=\int_{x'}^{x''}|F^{(h)}(x,y'')-F^{(h)}(x,y')|\,dx\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}d\xi\,d\eta\left(\int_{x'}^{x''}|f(x+\xi,y''+\eta)-f(x+\xi,y'+\eta)|\,dx\right),$$

car il est évidemment permis d'intervertir l'ordre des intégrations, f étant continue. Considérons l'expression

(12) $$\int_{x'}^{x''}|f(x+\xi,y''+\eta)-f(x+\xi,y'+\eta)|\,dx.$$

Soit $R_{\xi\eta}$ le rectangle que l'on obtient en faisant subir au rectangle R la translation $X=x+\xi$, $Y=y+\eta$; on voit de suite que (12) est égale à $\alpha_{R_{\xi\eta}}[f]$.

Donc, en vertu de (11),

$$\alpha_R[F^{(h)}] \leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \alpha_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta, \tag{13}$$

et l'on obtient de la même manière

$$\beta_R[F^{(h)}] \leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \beta_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta; \tag{14}$$

d'ailleurs on a évidemment, puisque l'aire des rectangles $R_{\xi\eta}$ est pour toute valeur de ξ, η égale à l'aire du rectangle R,

$$\gamma_R = \gamma_{R_{\xi\eta}} = \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \gamma_{R_{\xi\eta}}\,d\xi\,d\eta. \tag{15}$$

On déduit de (13), (14), (15),

$$\begin{aligned} g_R[F^{(h)}] \leqq \frac{1}{4h^2}\Bigg[\left(\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \alpha_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta\right)^2 + \\ + \left(\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \beta_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta\right)^2 + \left(\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \gamma_{R_{\xi\eta}}\,d\xi\,d\eta\right)^2\Bigg]^{1/2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Mais l'on a, pour un domaine borné Δ d'un nombre quelconque de dimensions et pour tout système φ, ψ, χ de fonctions continues dans Δ l'inégalité élémentaire

$$\left[\left(\int_\Delta \varphi\right)^2 + \left(\int_\Delta \psi\right)^2 + \left(\int_\Delta \chi\right)^2\right]^{1/2} \leqq \int_\Delta (\varphi^2+\psi^2+\chi^2)^{1/2}\ ^{1)}.$$

En l'appliquant au second membre de l'inégalité (16), nous obtenons

[1] Cette inégalité résulte immédiatement de l'autre, valable pour n quelconque, dans laquelle ne figurent que des constantes:

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)^2\right]^{1/2} \leqq \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2+c_k^2)^{1/2}.$$

Celle-ci exprime que dans l'espace à trois dimensions la longueur du vecteur résultant ne surpasse pas la somme des longueurs des vecteurs composants.

$$\begin{aligned} g_R[F^{(h)}] &\leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\left((\alpha_{R_{\xi\eta}}[f])^2 + (\beta_{R_{\xi\eta}}[f])^2 + (\gamma_{R_{\xi\eta}})^2\right)^{1/2} d\xi\,d\eta = \\ &= \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} g_{R_{\xi\eta}}[f]\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\underline{D}$ étant une division quelconque du carré $\underline{Q}$, nous aurons

$$G_{\underline{Q}}[F^{(h)}; \underline{D}] \leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \left(\Sigma\, g_{R_{\xi\eta}}[f]\right)d\xi\,d\eta. \tag{17}$$

Il est aisé de voir ce que signifie la somme sous le signe $\int\int$. En faisant subir à tous les rectangles de la division $\underline{D}$ la même translation $X = x + \xi$, $Y = y + \eta$, on obtient une division du carré $\underline{Q}_{\xi\eta}$, qui provient du carré $\underline{Q}$ par cette même translation. Donc, $\Sigma\, g_{R_{\xi\eta}}[f]$ est une somme de Geöcze de f, relative au carré $\underline{Q}_{\xi\eta}$. Mais à cause de la restriction sur h, ce carré $\underline{Q}_{\xi\eta}$ est aussi contenu dans le carré primitif Q, et par conséquent les sommes de Geöcze de f relatives au carré $\underline{Q}_{\xi\eta}$ sont à fortiori inférieures à $\Gamma_Q[f]$, limite supérieure des sommes de Geöcze de f relatives au carré Q. Donc $\Sigma\, g_{R_{\xi\eta}}[f] \leqq \Gamma_R[f]$, et l'on tire de (17)

$$G_{\underline{Q}}[F^{(h)}; \underline{D}] \leqq \frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \Gamma_Q[f]\,d\xi\,d\eta = \frac{\Gamma_Q[f]}{4h^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} d\xi\,d\eta = \Gamma_Q[f].$$

Cette inégalité tenant pour toutes les divisions $\underline{D}$ du carré $\underline{Q}$, il résulte

$$\Gamma_{\underline{Q}}[F^{(h)}] \leqq \Gamma_Q[f];$$

c'est la propriété II énoncée au numéro 5.

7. Nous avons ainsi complètement démontré que l'on a $\Gamma_Q[f] = L_Q[f]$. Pour arriver à notre théorème nous constaterons que

$$\lim_{\nu\to\infty} G_Q[f; D_\nu] = \Gamma_Q[f] \tag{18}$$

pour toute suite de divisions $D_1, D_2, \ldots, D_\nu, \ldots$, telle que le diamètre maximum des rectangles de D_ν tend vers zéro. Ceci ne présente pas de difficulté, mais je veux au moins indiquer les propriétés des expressions indroduites par Geöcze grâce auxquelles (18) a lieu, puisque la relation (18) est d'une importance capitale au point de vue que nous avons adopté. En effet, nous nous sommes proposés de calculer l'aire $L_Q[f]$. L'égalité $F_Q[f]=L_Q[f]$, à elle seule, exprime que l'aire peut être considérée non seulement comme limite inférieure suivant la définition de Lebesgue, mais aussi comme limite supérieure, savoir comme limite supérieure des sommes de Geöcze. Mais tandis qu'on n'a pas encore réussi à indiquer la construction générale des suites de polyèdres dont les aires tendent vers la plus petite limite $L_Q[f]$ [1]), il est aisé de former des suites de sommes de Geöcze tendant vers la plus grande limite $F_Q[f]=L_Q[f]$; c'est le fait important exprimé par (18). Par exemple, en divisant le carré Q en m^2 petits carrés égaux et en désignant par G_m la somme de Geöcze de f relative à cette division, on aura en vertu de (18)

$$\lim_{m\to\infty} G_m = L_m[f].$$

Considérons donc la quantité $g_R[f]$, définie par la formule (3). La fonction f étant donnée, cette quantité dépend seulement du choix du rectangle R, c'est une fonction de rectangle, possédant les propriétés suivantes [2]):

I. On a constamment $g_R[f] \geqq 0$.

II. En décomposant un rectangle R en deux autres R_1, R_2, on a

$$g_R[f] \leqq g_{R_1}[f] + g_{R_2}[f].$$

Ceci résulte immédiatement de la définition de $g_R[f]$.

III. Pour énoncer la troisième propriété, indiquons d'abord ce que nous entendrons par *bande de rectangles*. Soient x' et $x''>x'$ des points de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ et soient

$$y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots < y_n = 1$$

des points de division de l'intervalle $0 \leqq y \leqq 1$. Soit R_k le rectangle défini par $x' \leqq x \leqq x''$, $y_{k-1} \leqq y \leqq y_k$. Les rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ forment alors une bande verticale, et nous dirons que $x''-x'$ est la largeur de la bande. On définit d'une manière analogue les bandes horizontales. Voilà maintenant la troisième propriété de $g_R[f]$:

[1]) Cf. cependant [1]) (p. 199).

[2]) Cf. loc. cit. [2]) (p. 198).

étant donné arbitrairement un nombre positif ε, on peut déterminer un nombre positif δ, de sorte que l'on ait

$$g_{R_1}[f] + g_{R_2}[f] + \ldots + g_{R_n}[f] < \varepsilon$$

pour tout système de rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ formant une bande de largeur moindre que δ (le nombre de ces rectangles étant d'ailleurs quelconque).

Pour prouver ceci, considérons par ex. une bande verticale. On a évidemment

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{R_k}[f] = \int_{x'}^{x''} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x,y_k) - f(x,y_{k-1})| \right) dx \leqq \int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\,dx.$$

Désignons par $w(\lambda)$ le maximum de $|f(P_2)-f(P_1)|$ pour tout couple de points dans Q dont la distance ne surpasse pas λ. Nous aurons alors

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{R_k}[f] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} |f(x'',y) - f(x',y)|\,dy \leqq \sum_{k=1}^{n} w(x''-x')(y_k-y_{k-1}) = w(x''-x').$$

Enfin

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{R_k} = \sum_{k=1}^{n} (x''-x')(y_k-y_{k-1}) = (x''-x') \sum_{k=1}^{n} (y_k-y_{k-1}) = x''-x'.$$

Il vient donc, puisque $g_R[f] \leqq \alpha_R[f] + \beta_R[f] + \gamma_R$,

$$\sum_{k=1}^{n} g_{R_k}[f] \leqq x''-x' + w(x''-x') + \int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\,dx. \tag{19}$$

L'aire $L_Q[f]$ étant supposée finie, $V_{(y)}(x)$ est sommable, et l'intégrale

$$\int_{x'}^{x''} V_{(y)}(x)\,dx$$

tend vers zéro avec $x''-x'$, uniformément pour toutes les positions de x', x'' dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. A cause de la continuité de f la quantité $w(x''-x')$ converge aussi uniformément vers zéro avec $x''-x'$. En vertu de (19) nous pouvons donc affirmer que la somme

$$\sum_{k=1}^{n} g_{R_k}[f]$$

tend aussi uniformément vers zéro avec la largeur $x''-x'$ de la bande. Le même raisonnement s'applique naturellement aux bandes horizontales; la propriété III est, par conséquent, démontrée.

Or, on voit aisément que la relation (18) est une conséquence immédiate de ces propriétés; je n'insiste pas sur les détails, qui sont développés par ex. chez M. Tonelli [1]). Le raisonnement est le même que celui dont on se sert pour prouver que la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans une courbe converge vers la longueur de la courbe, c'est-à dire vers la plus grande limite possible, dès que le plus grand côté de la ligne polygonale tend vers zéro.

8. Ajoutons encore une remarque sur la signification géométrique des expressions introduites par Geöcze. Le lecteur aura certainement remarqué que $\alpha_R[f]$. $\beta_R[f]$ représentent approximativement l'aire de la projection sur les plans xz, yz de la portion de surface située au-dessus du rectangle R. Donc, l'aire γ_R de ce rectangle étant la projection sur le plan xy de cette portion de surface, l'aire de cette dernière sera représentée approximativement par $g_R[f]$. Enfin, la somme de Geöcze $G_R[f;D]$ sera une valeur approchée de l'aire de la surface entière $z=f(x,y)$. On reconnaît ainsi que le fait que nous avons démontré, savoir que les sommes de Geöcze convergent vers l'aire de la surface, correspond au fait que les longueurs des lignes polygonales inscrites dans une courbe convergent vers la longueur de la courbe.

9. J'ai déjà appelé l'attention du lecteur à l'analogie du raisonnement employé dans cette Note avec celui développé par M. Tonelli pour montrer que l'on a

$$L_Q[f]=\iint\limits_{(Q)}(1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy,$$

si $f(x,y)$ est absolument continue. Je remarque que dans ce cas les fonctions $F^{(h)}(x,y)$ du numéro 6 possèdent celles des propriétés des polynômes de Stieltjes, utilisés par M. Tonelli, qui sont essentielles pour la démonstration de son théorème. Je développerai cette remarque, avec quelques autres relatives aux recherches de M. Tonelli sur la quadrature des surfaces courbes, dans une Note que je publierai bientôt.

[1]) Cf. T. II.

Szeged, le 11 septembre 1926.

Sur les fonctions d'intervalle [1]).

Par

S. Saks (Varsovie).

CHAPITRE I.

Fonctions d'intervalle et leurs nombres dérivés.

§ 1. Lorsque à tout sous-intervalle I d'un intervalle R correspond une seule valeur réelle, bien déterminée, $f(I)$, $f(I)$ sera dite *fonction d'intervalle* définie dans R.

Elle s'appellera *continue* dans un point $x \varepsilon R$, lorsque I_x désignant un intervalle quelconque contenant x et contenu dans R, $f(I_x)$ tend vers 0, lorsque $|I_x|\to 0$ [2]). $f(I)$ sera continue dans R, lorsqu'elle l'est dans tout point de R.

Soit x un point *intérieur* de R. Désignons, en général, par I_x^+, respectivement par I_x^-, l'intervalle dont x est l'extrémité gauche, respectivement droite, et posons:

$$A=\limsup\,[f(I_x^+ + I_x^-)-f(I_x^+)-f(I_x^-)],$$

$$a=\liminf\,[f(I_x^+ + I_x^-)-f(I_x^+)-f(I_x^-)],$$

où: $|I_x^+ + I_x^-|\to 0$.

Les nombres $\Omega_x=\frac{1}{2}[|A|+A]\geqslant 0$, $\omega_x=\frac{1}{2}[a-|a|]\leqslant 0$ seront appelés les *écarts*, *non-négatif* et *non-positif* de $f(I)$ en

[1]) Certains résultats de ce travail ont été déjà publiés, d'ailleurs sans démonstrations, dans une Note de C. R. (1925, vol. 180, p. 38). Pour simplifier des énoncés nous ne traîtons ici que des fonctions d'intervalle linéaire. L'extension aux intervalles dans un espace à un nombre quelconque de dimensions n'exige que des modifications formelles.

[2]) A étant un ensemble, $|A|$ en désignera la mesure (*extérieure*).