Sur les ensembles analytiques.

Par

Nicolas Lusin (Moscou).

Introduction.

En 1905, M. Henri. Lebesgue a donné, dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*, une construction pénétrante d'un ensemble de points qui a été employé par lui comme un instrument transitoire au cours de la recherche d'une fonction-individu échappant à tout mode de représentation analytique. A cause du rôle auxiliaire que cet ensemble E joue là, l'illustre auteur, préoccupé d'achever plus vite la détermination d'une fonction non définissable analytiquement, a omis une analyse approfondie de cet ensemble préliminaire E, car elle paraissait devoir être longue et pénible aux lecteurs et, en même temps, tout superflue pour le but final.

C'est cette fonction non définissable analytiquement nommée par l'auteur sans l'emploi de l'Axiome du Choix qui fut la véritable origine d'une série de recherches desquelles se dégageait, de plus en plus nettement, la notion d'ensemble analytique.

A présent, quand la théorie des ensembles analytiques est formellement achevée, il est impportant de reconnaître en employant des raisonnements habituels de la Théorie des Fonctions que c'est cet ensemble auxiliaire E de M. H. Lebesgue qui est lui-même un *ensemble analytique* ne faisant pas partie de la famille des ensembles mesurables B, et que dans sa construction est contenue, comme dans un germe, toute la théorie des ensembles analytiques,

CHAPITRE I.

La construction de M. H. Lebesgue et ses généralisations.

I. La construction de M. H. Lebesgue.

1. Voici la construction de l'ensemble auxiliaire E. Nous reproduisons ici presque textuellement ce passage de M. H. Lebesgue [1]):

„Nous supposons les nombres rationnels compris entre 0 et 1 rangés dans un certain ordre que nous ne précisons pas mais que nous supposons précisé; soit $r_1, r_2, \ldots$ la suite considérée. Nous prenons une valeur x comprise entre 0 et 1 et nous l'écrivons dans le système de numération de base 2, en employant toujours un nombre infini de fois le chiffre 1; l'expression de x est bien déterminée dès que x est donné:

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \ldots$$

Barrons dans la suite $r_1, r_2, \ldots$ tous les r_i qui correspondent aux indices i des chiffres θ_i qui sont nuls; soient $r'_1, r'_2, \ldots$ les r conservés. Marquons dans l'intervalle (0,1) tous les points ayant ces $r'_1, r'_2, \ldots$ pour abscisses.

Deux cas seulement sont possibles:

Premier cas. — Les points marqués forment dans (0,1) un ensemble *bien ordonné* suivant cette convention que le rang de ces points soit conforme à l'ordre dans lequel on les recontre en parcourant de gauche à droite l'intervalle (0,1);

Deuxième cas. — Les points marqués *ne* forment pas dans (0,1) un tel ensemble.

Désignons par $\mathcal{E}$ la totalité des points de l'intervalle $(0 < x < 1)$ pour lesquels les premier cas est rempli et par E l'ensemble des points x pour lesquels a lieu le deuxième cas.“

[1]) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Jordan*, 1905, p. 213, *lignes* 25—32 et p. 214, *lignes* 1—17). Pour simplifier le plus possible des raisonnements, nous ne nous permettons de faire qu'un changement insignifiant dans la construction de M. H. Lebesgue concernant l'emploi dans *tous* les cas des développements à une infinité des chiffres 1 ce qui ajoute à l'ensemble E de M. H. Lebesgue seulement des points *rationnels*.

L'ensemble E est le complémentaire de la totalité $\mathcal{E}$, et on voit bien que la totalité $\mathcal{E}$ est nommée par M. H. Lebesgue *d'une manière positive* et que la définition de l'ensemble E n'est que négative.

Or, nous verrons dans ce qui suit que c'est l'inverse qui a précisement lieu: nous démontrerons que l'ensemble E de M. H. Lebesgue est un ensemble *analytique* et, par suite, est un ensemble à définition *positive* et *finie*. Quant à la totalité $\mathcal{E}$ de M. H. Lebesque, nous n'avons aucune autre définition *positive* de cette totalité que celle de M. H. Lebesgue.

II. Le crible canonique de M. Henri Lebesgue.

2. La forme géométrique que l'on peut donner à cette construction de M. H. Lebesgue le rendra peut-être plus claire: considérons deux axes rectangulaires et un carré dont les côtés ont pour équations

$$x = 0\,,\ x = 1\,;\ y = 0\,,\ y = 1.$$

Marquons dans le côté gauche vertical $x = 0$ du carré tous les points rationnels $r_1, r_2, \ldots$; leur ensemble R est partout dense dans ce côté.

Menons à l'intérieur du carré par le point r_n la parallèle à l'axe des x, et, en la divisant en 2^n intervalles égaux, numérotons-les au moyen des entiers $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ de gauche à droite. Si l'on supprime de cette parallèle les intervalles ayant les numéros impairs, l'ensemble des points restants est formé de tous les points de segments équidistants fermés, en nombre 2^n, dont la longueur commune est $1:2^n$.

Ainsi on voit que dans chacune des parallèles $y = r_1$, $y = r_2, \ldots$, $y = r_n, \ldots$ sont placés des segments fermés n'ayant aucun point commun et en nombre fini.

Nous appellerons crible canonique de M. H. Lebesgue la réunion de tous ces segments et nous le désignerons par C.

3. Par définition même, le crible canonique C est un ensemble dénombrable de segments fermés particuliers parallèles à l'axe des x répandu d'une manière spéciale dans l'intérieur du carré; d'ailleurs, il est clair que cet ensemble est partout dense dans ce carré.

Il est aisé de justifier la dénomination de *crible*. En effet, soit x un point quelconque appartenant au semi-segment [1]) $0 < x \leqslant 1$

[1]) On appelle *semi-segment* tout segment fermé diminué d'une et une seule de ses extrémités.

de l'axe OX; le point x est donc situé sur le côté inférieur du carré. Désignons par P_x une perpendiculaire élevée en ce point x à l'axe OX. Il est clair que cette perpendiculaire coupe le crible C en un ensemble au plus dénombrable de points; désignons-le par R_x. Comme les ordonnées des points de R_x sont tous des nombres rationnels, la projection orthogonale de P_x sur l'axe OY est contenue dans l'ensemble R des points rationnels qui appartiennent au côté $x=0$ du carré.

Mais une remarque bien plus importante et qui est relative à une des plus belles propriétés du crible canonique C de M. H. Lebesgue est la suivante: un point r_n du côté $x=0$ du carré appartient à la projection de R_x sur l'axe OY si l'on a $\theta_n = 1$, et dans ce cas seulement.

Il en résulte que *l'ensemble dénombrable R_x forme sur la perpendiculaire P_x un ensemble bien ordonné pour tous les points x de la totalité $\mathcal{E}$*, le rang des points de R_x étant conforme à l'ordre dans lequel on les rencontre sur la perpendiculaire P_x parcourue de bas en haut, et *R_x n'est bien ordonné, en adoptant la même convention de rang, pour aucun point x de l'ensemble E.*

On en conclut immédiatement que R_x admet une partie n'ayant pas d'élément initial pour tout point x de l'ensemble E; *il serait donc possible de déterminer, dans ce cas, une suite décroissante $a_1, a_2, \ldots$ formée d'éléments de R_x*, chacun plus bas que le précédent et qui tendent manifestement vers un point μ situé sur la perpendiculaire P_x. Ainsi, les points de R_x admettent, dans ce cas, *le mouvement rétrograde*, et il est clair que, parmi les points *limites* de R_x dans chacun desquels l'ensemble R_x a le mouvement rétrograde, nous avons un point le plus bas; désignons par $\mu(x)$ l'ordonnée de ce point.

En résumé: c'est la collection elle-même des segments fermés de C qui crible d'une manière automatique des points de l'intervalle fondamental $0 < x < 1$ en laissant passer les points de la totalité $\mathcal{E}$: ce sont les points de l'ensemble E qui restent seuls. De là le nom de *crible.*

Nous appellerons *ensemble criblé au moyen du crible C* ou simplement *ensemble criblé* cet ensemble E (et non pas la totalité $\mathcal{E}$).

Remarquons, enfin, que dès maitenant l'ensemble E se présente défini d'une manière *positive*, puisque la propriété de R_x d'avoir

un point limite rétrograde $\mu(x)$ est une propriété nettement positive.

III. L'analycité de l'ensemble E de M. H. Lebesgue.

4. On appelle *ensemble analytique* tout ensemble linéaire de points qui est *l'ensemble des valeurs d'une fonction discontinue seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable* [1]).

La raison de cette dénomination est très claire: comme toute fonction

$$x = f(t)$$

[1]) *Voir* ma Note dans les *Comptes Rendus*, 1917.

C'est M. Emile Borel qui a attiré l'attention, il y a déjà longtemps, sur ces fonctions dont la classe mérite d'être étudiée immédiatement après la classe des fonctions *continues*. Citons textuellement quelques passages de M. E. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*, première édition, 1898; *Note* I, p. 109 et *Note* III, p. 126): «...on ne peut se servir, dans le calcul, d'une fonction que si elle est définie au moyen d'une infinité dénombrable d'éléments. Tel est le cas des fonctions continues, et aussi des fonctions discontinues, discontinues seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable. De telles fonctions peuvent, en effet, être définis, au moyen d'une infinité dénombrable de conditions...»

«...si elles diffèrent, on est sûr de s'en apercevoir avec assez de persévérence. Il n'y a rien de pareil pour les fonctions discontinues (il s'agit ici de fonctions discontinues les plus générales): une telle fonction est définie *par une infinité non dénombrable de conditions*; en pratique, cela revient à dire qu'il est *impossible* de la *définir*. Il y aurait bien de distinguer parmi les fonctions discontinues les plus générales, qui paraissent devoir être exclues, au moins pour l'instant, des considérations mathématiques, des fonctions dont la discontinuité est assujettie à des restrictions. Ces *restrictions doivent être de nature telle que la fonction puisse être entièrement définie par une infinité dénombrable de conditions*. L'ensemble des fonctions satisfaisant à ces conditions restrictives a alors même puissance que le continu. Parmi les fonctions satisfaisant à des conditions restrictives de ce genre, je citerai les fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points, que plusieurs géomètres ont considérées avec profit».

Il serait très intéressant de savoir si la conception d'une *fonction définie par une infinité dénombrable de conditions* de M. Emile Borel est adéquate à celle d'une *fonction qu'on peut nommer* de M. Henri Lebesgue. Il ne semble pas qu'il soit possible de trouver une fonction nommable (c'est-à-dire une fonction-individu) qui ne soit définissable par une infinité dénombrable de conditions.

On trouve dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* (1905) de M. E. Borel les premières études sur les fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points (p. 94—98).

discontinue seulement en une infinité dénombrable de points de l'intervalle fondamental $(0 < t < 1)$ est une fonction de classe 1 de la classification de M. René Baire [1]), il existe une série de polynomes en t à coefficients entiers [1])

$$P_1(t) + P_2(t) + \dots + P_n(t) + \dots$$

convergente pour toute valeur de t de l'intervalle $(0 < t < 1)$ dont la somme est $f(t)$. Donc, tout ensemble analytique lineaire est l'ensemble des valeurs que prend dans un intervalle la somme d'une série convergente de polynomes à coefficients entiers et, par conséquent, est défini au moyen d'une égalité analytique [2]).

Cette définition posée, nous allons porter notre attention sur l'ensemble E de M. H. Lebesgue défini au moyen du crible canonique C. Il est très aisé de démontrer que cet ensemble est un ensemble *analytique.*

5. Pour démontrer cette proposition, considérons, dans le plan XOY, le crible canonique C. Soit σ un segment quelconque qui appartient à C; d'après ce qui précède, σ est un segment *fermé* parallèle à l'axe OX

Abaissons, des deux extrémités du segment σ, les perpendiculaires sur l'axe OX; nous obtenons ainsi un rectangle Q dont la base est sur l'axe OX. Comme les segments σ du crible C sont en

[1]) *Toute fonction de classe 1 de M. R. Baire définie dans* $(0 < x < 1)$, *les extrémités étant exclues, est développable en série de polynomes à coefficients entiers.* C'est une proposition de M. J. Chłodowski.

[2]) Le nom *d'ensemble analytique* est donné suivant une proposition de M. H. Lebesgue de nommer ensembles analytiques tous les ensembles qui peuvent être définis par des égalités ou inégalités analytiques.

»... De ce qui sera démontré dans la suite, il résulte que les ensembles mesurables B sont ceux qui peuvent être définis par des égalités ou inégalités analytiques; pour cette raison ils mériteraient d'être nommés *ensembles analytiques*«. (*Sur les fonctions représentables analytiquement*, p. 165).

La proposition inverse (c'est-à-dire que tout ensemble défini par des égalités ou inégalités analytiques est un ensemble mesurable B) n'est pas vraie.

Dans les cadres limités de nos Notes des *Comptes Rendus* (Souslin — *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis;* N. Lusin — *Sur la classification de M. René Baire,* t. 164, p. 88 et p. 91, séance du 8 janvier 1917) où l'on trouve tous les résultats principaux sur les ensembles analytiques énoncés, d'ailleurs, sans faire les démonstrations, nous avons appelé les ensembles analytiques par le nom succint d'*ensembles* (A).

infinité dénombrable, nous pouvons *numéroter* tous ces rectangles construits au moyen des entiers positifs

$$(1) \qquad Q_1,\ Q_2, \dots,\ Q_k, \dots$$

Nous désignerons par x_k l'abscisse de l'extrémité droite de la base de Q_k.

Ceci posé, occupons-nous de la construction d'une fonction $f(t)$ discontinue seulement en une infinité dénombrable de points de l'intervalle $(0 < t < 1)$ dont l'ensemble des valeurs coïncide avec l'ensemble lebesguien E.

Soit t un nombre incommensurable quelconque compris entre 0 et 1 et défini par un développement de la forme

$$t = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dots + \cfrac{1}{\alpha_n + \dots}}},$$

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots$ étant des entiers positifs déterminés.

Faisons correspondre à t une suite bien déterminée

$$(2) \qquad x_{\beta_1},\ x_{\beta_2}, \dots,\ x_{\beta_n}, \dots$$

formée des extrémités droites des bases de certains rectangles Q, définie par la relation de récurrence suivante:

1° $\beta_1 = \alpha_1$; on a donc $x_{\beta_1} = x_{\alpha_1}$;

2° le nombre $x_{\beta_{m-1}}$ étant défini, considérons tous les rectangles Q qui sont intérieurs au rectangle $Q_{\beta_{m-1}}$; leur ensemble forme une partie de la suite (1), donc, il est une suite. Le nombre x_{β_m} sera défini comme égal au terme de rang α_m de cette suite.

Il est clair que la suite (3) formée de nombres positifs est décroissante; donc, elle a une limite. Comme cette limite est déterminée d'une manière unique par la connaissance de t, nous la désignerons par $f(t)$.

6. Il est aisé de démontrer que la fonction $f(t)$ ainsi construite est *continue en chaque point irrationnel* t_0 *relativement à l'ensemble de tous les points irrationnels.*

En effet, désignons par ϑ l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0 < t < 1)$. La fonction $f(t)$ est défini partout sur ϑ; soit t_0 un point quelconque de ϑ que nous supposerons fixe.

Faisons tendre le point mobile t de $\mathcal{J}$ vers t_0; le nombre N des premiers quotiens incomplets du développement de t en fraction continue qui coïncident avec les quotiens incomplets correspondants du développement de t_0, augmente indéfiniment. Donc, la suite (2) calculée dans le point t et la suite (2) calculée dans le point t_0 ont, toutes les deux, un nombre aussi grand que l'on veut des premiers termes respectivement égaux. Or, les termes de la suite (2) qui suivent le terme quelconque x_{β_n} sont tous des points qui appartiennent à la base du rectangle Q_{β_n}. Comme la longuer de la base du rectangle Q_k tend vers zéro lorsque k croît indéfiniment, le nombre $f(t)$ tend vers $f(t_0)$ lorsque le point t tend vers t_0, tout en restant sur $\mathcal{J}$, ce qui démontre la continuité relative de la fonction $f(t)$.

7. Ceci étant établi, nous voulons examiner l'ensemble des valeurs de f. Considérons les rectangles qui correspondent aux termes de la suite (2)

$$Q_{\beta_1},\quad Q_{\beta_2},\ldots,\quad Q_{\beta_m},\ldots\ldots \tag{3}$$

Comme chaque rectangle Q_{β_m} contient le suivant, c'est une suite de rectangles emboîtés les uns dans les autres et dont les bases, toutes situées sur l'axe OX, tendent vers zéro. Les hauteurs de ces rectangles sont visiblement *décroissantes*. Et comme le point $x=f(t)$, étant une limite de la suite (2), appartient à toutes les bases des rectangles (3), il est clair que le crible C détermine sur la perpendiculaire P_x une suite *descendente* de points de l'ensemble R_x. Donc, toute valeur $f(t)$ de la fonction f est un élément de l'ensemble lebesguien E.

Il est manifeste que l'inverse a encore lieu: tout point de l'ensemble lebesguien E peut être obtenu de cette manière.

Donc, l'ensemble des valeurs que prend la fonction $f(t)$ pour les valeurs incommensurables de la variable t coïncide avec l'ensemble lebesguien E.

8. Il ne nous reste qu'à achever la détermination de la fonction f en tous les points, *rationnels* de l'intervalle $(0<t<1)$ sans troubler l'ensemble E de ses valeurs ni sa continuité dans les points irrationnels.

Pour prendre cette précaution, nous supposons les nombres rationnels de l'intervalle $(0<t<1)$ rangés dans un certain ordre; soit t_1, $t_2,\ldots$ la suite considérée. Désignons par M_n le maximum de f au point t_n relativement à $\mathcal{J}$.

La fonction f étant bornée sur $\mathcal{J}$, nous remarquons bien que tous les nombres M_1, $M_2,\ldots$ sont finis; nous les représentons par des points de l'intervalle $(0<x<1)$ sur lequel est situé l'ensemble lebesguien E.

Il suffit maintenant de prendre pour chaque point M_n un point M'_n qui appartient à E et qui est infiniment voisin à M_n lorsque n croît indéfiniment: la fonction $f(t)$ assujettie à être, dans les points t_1, $t_2,\ldots$, respectivement égale aux abscisses des points correspondants M'_1, $M'_2,\ldots$ satisfait évidemment à toutes les conditions désirées. c. q. f. d.

9. Nous sommes ainsi amenés à la proposition suivante:

l'ensemble lebesguien E de points est un ensemble analytique.

Comme une définition d'un être mathématique au moyen d'une série de polynomes partout convergente et à coefficients entiers est une definition positive et finie, nous pouvons dire que l'ensemble lebesguien E peut être considéré comme défini d'une manière *positive* et *finie.*

IV. Le crible général.

10. Une question très importante se présente ici. Nous venons de voir que l'ensemble lebesguien E est un ensemble analytique.

Est-t-il mesurable B ou non? Et s'il n'est pas mesurable B, par quel mécanisme du raisonnement pouvons-nous découvrir sa non mesurabilité B?

Mais, avant d'aborder ces difficiles questions, il est commode de généraliser légèrement la notion du crible canonique C de M. H. Lebesgue.

Prenons, comme nous avons fait précédemment, deux axes rectangulaires XOY et un carré K dont les côtés ont pour équations

$$x=0,\ x=1;\ y=0,\ y=1.$$

D'une manière générale, nous appellerons crible *toute collection dénombrable C' de segments fermés σ parallèles à l'axe OX et situés à l'intérieur du carré K.*

Par analogie avec ce qui précède, nous désignerons par $\mathcal{E}$ la *totalité* des points x de l'intervalle $(0<x<1)$ tels que la perpendiculaire P_x élevée en x à l'axe OX coupe le crible C' en un ensemble de points *bien ordonné* à l'aide de cette convention que le rang des points soit conforme à la direction positive de l'axe OY.

L'ensemble des points de l'intervalle $(0 < x < 1)$ qui n'appartiennent pas à la totalité $\mathcal{E}$ nous désignerons par E.

Par définition de E, la perpendiculaire P_x en chaque point x de E coupe le crible C' en un ensemble dénombrable R_x qui *n'est pas bien ordonné*, en adoptant la même convention de rang. Donc, il est possible de déterminer, dans ce cas, une suite *décroissante* $a_1, a_2 \ldots$ formée de points de R_x, chacun plus bas que le précédent et qui tendent vers un point μ situé sur la perpendiculaire P_x. Ainsi, l'ensemble R_x, dans ce cas, est en mouvement rétrograde, et il est clair que parmi les points *limites* μ de P_x en chacun desquels l'ensemble R_x a un mouvement rétrograde, il y a un point *le plus bas*; nous désignerons par $\mu(x)$ son ordonnée.

C'est cet ensemble E (et non pas la totalité $\mathcal{E}$) *que nous appellerons ensemble criblé au moyen du crible* C'.

Le crible C de M. H. Lebesgue, que nous avons considéré précédemment, nous l'appellerons *crible canonique*.

11. Le théorème direct. — Nous allons généraliser le théorème dans lequel nous avons reconnu l'analycité de l'ensemble lebesguien E.

Théorème (direct). — *Tout ensemble de points criblé au moyen d'un crible général est un ensemble analytique.*

Pour le démontrer, nous employons toujours le même mode de raisonnement. Mais il est nécessaire de prendre une précaution pour être certain que tous les arguments de la démonstration donnée pour les cas du crible canonique sont encore applicables au cas d'un crible général.

Ce qui rend efficace le raisonnement précédent, ce sont les propriétés suivantes du crible canonique:

1° La longueur de la base du rectangle Q_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment;

2° Quel que soit le nombre n, il existe dans le rectangle Q_n un rectangle Q_m dont la hauteur est précisement inférieure à celle de Q_n.

Tout revient donc à démontrer qu'on peut transformer le crible général donné C' en un autre qui possède les deux propriétés énonées du crible canonique, et ceci sans troubler l'ensemble E criblé au moyen de C'.

Numérotons les segments fermés du crible donné C' au moyen des entiers positifs; soit

$$(\sigma') \qquad \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n, \ldots$$

cette suite. Partons de l'entier positif n. Nous divisons l'intervalle fondamental $(0 < x < 1)$ en 2^n parties égales, et nous projetons les 2^n extrémités des n premiers segments de la suite (σ') sur l'axe OX.

Si nous marquons, dans l'intervalle $(0 = x < 1)$, les points des divisions et ces projections, nous obtenons une collection finie de points; désignons-la par z_n. Nous divisons enfin le segment fermé σ'_n en un nombre fini de petits segments fermés σ'' par les points dont les abscisses appartiennent à z_n.

Cela posé, faisons varier n. L'ensemble de tous ces petits segments fermés σ'' ainsi obtenus forme, évidemment, un crible général nouveau C'' qui possède maitenant la première propriété 1° du crible canonique, et il est manifeste que l'ensemble criblé E reste intact.

12. Tout revient donc à satisfaire à la deuxième propriété 2° du crible canonique. Rappelons qu'à chaque point x de l'ensemble criblé E correspond relativement au crible C'' un nombre bien déterminé dépendant de ce point et que nous avons désigné par $\mu(x)$. Nous avons donc la courbe

$$y = \mu(x)$$

bien déterminée définie sur l'ensemble criblé E.

Cela posé, supprimons du crible C'' tous ses segments fermés σ'' dont tous les points ont les ordonnées inférieures ou égales à celles des points de la courbe $y = \mu(x)$ qui possèdent les mêmes abscisses. Comme l'ensemble criblé E est supposé non vide, il y a des segments σ'' non supprimés, et même en une infinité dénombrable. Leur ensemble forme un crible nouveau que nous désignons par C'''.

Il est bien évident que le crible C''' admet les propriétés 1° et 2° du crible canonique et que l'ensemble criblé E reste encore intact.

De ce moment-là, tous les arguments de la démonstration précédente d'analycité de l'ensemble criblé avec le crible canonique de M. H. Lebesgue appliqués au crible C''' deviennent rigoureux.

c. q. f. d.

En résumé:

si E est criblé au moyen d'un crible général, l'ensemble E est un ensemble analytique.

13. Transformation des points de discontinuité. — Nous sommes conduits à nous demander si la condition trouvée pour qu'un ensemble soit criblé au moyen du crible quelconque est suffisante. Nous allons démontrer que la condition nécessaire *être ensemble analytique* est et même temps suffisante.

Il convient, pour le démontrer, de faire d'abord quelques remarques préliminaires.

Soit E un ensemble analytique situé sur l'intervalle $(0<x<1)$. Par définition même, il existe une fonction $x=f(t)$ définie sur l'intervalle $(0<t<1)$ et discontinue seulement en une infinité dénombrable de points telle que E est l'ensemble de toutes ses valeurs.

Je dis maintenant qu'*on peut toujours supposer la fonction* $f(t)$ *discontinue seulement en points* rationnels *de intervalle* $(0<t<1)$.

En effet, soit D l'ensemble des discontinuités de f; D est dénombrable. On sait que, parmi les transformations de l'*Analysis Situs* du segment fermé $[0\leqslant t\leqslant 1]$ en soi-même, il y en a qui transforment un ensemble dénombrable quelconque donné en une partie de l'ensemble des points rationnels. Si nous effectuons, pour l'ensemble D, une telle transformation, nous aurons évidemment une fonction de t ayant la propriété énoncée.

Pour éviter des difficultés d'ordre secondaire nous allons supposer dorénavant la fonction $f(t)$ discontinue seulement aux points *rationnels*.

14. Les divisions régulières. — Nous allons démontrer que, lorsqu'on néglige un ensemble énumérable de points de E, on peut supposer la fonction $f(t)$ *continue dans* $(0\leqslant t<1)$ *du côté droit en chaque point* t, *sans aucune exception, même aux points rationnels et à l'origine des coordonnées* 0.

Pour le démontrer, il suffit de faire subir à la fonction $f(t)$ une transformation spéciale. Tout d'abord, voici une définition utile: *nous dirons qu'un intervalle ouvert δ est* ***divisé d'une manière régulière*** *en une infinité d'intervalles ouverts partiels lorsqu'il est enlevé de δ un ensemble réductible tendant vers les deux extrémités de δ.*

Cette définition posée, nous allons démontrer que chaque intervalle ouvert δ peut être divisé d'une manière régulière en une infinité d'intervalles partiels *tels que l'oscillation* (*totale*) *de f dans chacun d'eux soit inférieure à ε, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut.*

En effet, comme f est discontinue seulement aux points rationnels, l'ensemble des points de δ où la mesure de discontinuité de f n'est pas inférieure à ε est un ensemble *fermé réductible*; désignons-le par F_ε. Il résulte de la définition de F_ε que l'oscillation de f en chaque point de δ qui n'appartient pas à F_ε est précisement inférieure à ε. Nous concluons de là qu'on peut diviser d'une manière régulière et bien déterminée chacun des intervalles ouverts partiels tels que l'oscillation (totale) de f dans chacun d'eux soit inférieure à ε. Il est manifeste que la réunion de tous les intervalles partiels déterminés dans chacun des contigus à F_ε forme une division régulière cherchée de δ. c. q. f. d.

Cela posé, donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tendant vers zéro. Partons de l'intervalle fondamental $(0<t<1)$. D'après ce qui précède, nous pouvons diviser $(0<t<1)$ d'une manière régulière en une infinité d'intervalles partiels tels que l'oscillation (totale) de f dans chacun d'eux soit inférieure à ε_1. Désignons par R_{ε_1} l'ensemble réductible dont ces intervalles partiels sont contigus. Remarquons que nous pouvons supposer les longueurs de ces contigus inférieures chacune à ε_1.

Divisons d'une manière régulière chacun des contigus à R_{ε_1} en une infinité d'intervalles partiels tels que l'oscillation (totale) de f dans chacun d'eux soit inférieure à ε_2. Désignons par R_{ε_2} l'ensemble réductible dont ces intervalles partiels sont contigus. Nous pouvons supposer les longueurs de ces contigus infèrieures chacun à ε_2.

D'une manière générale, l'ensemble réductible $R_{\varepsilon_{n-1}}$ étant défini dans $(0<t<1)$, divisons d'une manière régulière chacun des contigus à $R_{\varepsilon_{n-1}}$ en une infinité d'intervalles partiels tels que l'oscillation (totale) de f dans chacun d'eux soit inférieure à ε_n. Nous désignons par R_{ε_n} l'ensemble réductible dont ces intervalles partiels sont contigus et nous pouvons supposer leurs longueurs inférieures à ε_n.

On formera ainsi la suite illimitée

$$R_{\varepsilon_1},\ R_{\varepsilon_2}, \ldots,\ R_{\varepsilon_n}, \ldots$$

des ensembles réductibles situés dans $(0<t<1)$, chacun contenant les précédents.

15. La transformation de $f(t)$. — Prenons le semi-segment

$$0 \leqslant \tau < 1$$

et divisons-le en une infinité de semi-segments partiels, fermés chacun du côté gauche et ouverts à droite, par les points M_1, $M_2, \ldots$, $M_k, \ldots$ qui tendent vers 1: ces semi-segments seront dits les *semi-segments de rang 1*. Divisons pareillement chacun des semi-segments de rang 1 en une infinité de semi-segments partiels, fermés chacun du côté gauche et ouverts à droite, par les points tendant vers sa borne droite; ces semi-segments seront dits les *semi-segments de rang 2*. En général, ayant défini tous les semi-segments de rang *n—1*, nous divisons de la même manière chacun d'eux en une infinité de semi-segments partiels, fermés du côté gauche et ouverts à droite: ces semi-segments partiels seront dits les *semi-segments de rang n*, et ainsi de suite. Remarquons que la longueur de chacun des semi-segments de rang n peut être supposée inférieure à $1:n$.

Cela posé, faisons établir, pour chaque valeur de n, entre les intervalles contigus à R_{ε_n} et les semi-segments de rang n une correspondance univoque et réciproque de manière qu'à tout intervalle δ contigu à R_{ε_n} et contenu dans un intervalle δ' contigu à $R_{\varepsilon_{n-1}}$ corresponde un semi-segment $\underline{d}$ de rang n encore contenu dans un semi-segment $\underline{d'}$ de rang $n—1$ qui correspond à δ'.

Pour cela, faisons établir entre les intervalles contigus à R_{ε_1} et les semi-segments de rang 1 une correspondance univoque et réciproque; puis entre les intervalles contingus à R_{ε_2} et les semi-segments de rang 2 contenus respectivement dans les couples δ, d des intervalles contigus à R_{ε_2} et des semi-segments de rang 1 correspondants, Continuons ainsi indéfimment à prendre dans chaque couple δ', d' formé d'un intervalle δ' contigu à $R_{\varepsilon_{n-1}}$ et d'un semi-segment correspondant d' de rang $n—1$ *tous* les intervalles contigus à R_{ε_n} et *tous* les semi-segments de rang n contenus respectivement dans δ' et d' et à faire correspondre d'une manière determinée à chaque δ un d et réciproquement. Il est clair qu'en continuant ainsi, nous formerons entre les contigus à R_{ε_1}, R_{ε_2}, $R_{\varepsilon_3}, \ldots$ et les semi-segments de rang 1, 2, 3,... la correspondance univoque et réciproque cherchée.

Ceci étant établi, nous prenons, dans le semi-segment

$$0 \leqslant \tau < 1$$

un point τ quelconque. Comme le point τ appartient à un semi-

segment déterminé d_1 de rang 1, à un semi-segment déterminé d_2 de rang 2, et ainsi de suite, nous avons la suite illimitée

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \ldots$$

bien déterminée de semi-segments respectivement des rangs 1, 2, 3,..., chacun intérieur au précedent et qui tendent manifestement vers le point τ situé à leur intérieur ou sur leur extrémité gauche.

A cette suite correspond évidemment la suite illimitée

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \ldots$$

des intervalles contigus respectivement aux R_{ε_1}, R_{ε_2}, $R_{\varepsilon_3}, \ldots$, chacun intérieur (au sens étroit) au précédent et qui tendent manifestement vers un point t situé à leur intérieur (au sens étroit).

Donc, nous avons

$$t = \varphi(\tau).$$

Il est clair que la fonction $\varphi(\tau)$ ainsi déterminée est une fonction définie en chaque poiut τ du semi-segment $(0 \leqslant \tau < 1)$. Comme le point t n'appartient à aucun des ensembles réductibles R_{ε_1}, R_{ε_2}, $R_{\varepsilon_3}, \ldots$ et comme *chaque* point t de l'intervalle fondamental $(0 < t < 1)$ qui n'appartent à aucun de ces ensembles réductibles peut être obtenu de cette manière, il est manifeste que la relation

$$t = \varphi(\tau)$$

établit une correspondance univoque et réciproque entre les points du semi-segment $(0 \leqslant \tau < 1)$ et les points de l'intervalle $(0 < t < 1)$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble énumérable D formé de la réunion des R_{ε_1}, $R_{\varepsilon_2}, \ldots$

Cela posé, considérons une fonction composée $F(\tau)$ définie dans le semi-segment $(0 \leqslant \tau < 1)$ par l'égalité

$$F(\tau) = f[\varphi(\tau)].$$

Comme à chaque point τ appartenant à un semi-segment déterminé d de rang n correspond un point t de l'intervalle δ contigu à R_{ε_n} et qui correspond à d, on voit bien que l'oscillation (totale) de $F(\tau)$ dans d est inférieure à ε_n. Donc, *la fonction $F(t)$ est continue du côté droit en chaque point τ du semi-segment* $(0 \leqslant \tau < 1)$.

c. q. f. d.

16. **Le théorème inverse.** — Examinons l'ensemble E' des valeurs de la fonction composée

$$x = F(\tau)$$

qu'elle prende sur le semi-segment $(0 \leqslant \tau < 1)$. Nous allons démontrer que E' est *un ensemble criblé au moyen d'un crible général.*

Pour le construire, prenons un semi-segment quelconque d de rang n. Soient H et h respectivement le maximum et le minimum de $F(\tau)$ dans d.

Nous élévons en la borne *droite* de d une perpendiculaire à l'axe des τ et nous marquons sur cette perpendiculaire deux points dont les ordonnées sont égales à H et à h. Nous obtenons ainsi un segment fermé σ bien déterminé situé sur cette perpendiculaire et ayant pour ses extrémités les points marqués; ce segment σ est vertical, donc parallèle à l'axe des x.

Si nous effectuons cette construction pour chaque semi-segment d de rang n et si nous faisons varier l'entier positif n, nous obtiendrons une infinité dénombrable des segments σ fermés parallèles à l'axe des x. Donc, *nous avons un crible général C'.*

Considérons l'ensemble de points de l'axe des x criblé au moyen de ce crible C'. Nous désignerons cet ensemble par E''. Pour qu'un point x de l'axe OX appartienne à E'', il faut et il suffit qu'il soit compris dans les projections sur cet axe d'une infinité de segments fermés σ du crible C' dont les abscisses τ forment une suite *décroissante.* Et comme la fonction composée $F(\tau)$ est continue du côté droit en *tout* point τ du semi-segment $(0 \leqslant \tau < 1)$, nous en concluons que *l'ensemble E'' coïncide avec l'ensemble E' des valeurs de la fonction $F(\tau)$.*

Il ne nous reste plus qu'a comparer l'ensemble analytique donné E avec l'ensemble E'.

Il résulte de la forme même de $F(\tau)$

$$F(\tau) = f[\varphi(\tau)]$$

que E' est une partie de E. Et puisque la fonction

$$t = \varphi(\tau)$$

prend *chaque* valeur t qui appartient à l'intervalle $(0 < t < 1)$ sauf les éléments des ensembles *réductibles* $R_{s_1}, R_{s_2}, \dots$, on constate bien que *l'ensemble E ne diffère de E' que d'une infinité dénombrable de points éventuels* $x_1, x_2, \dots$

Il est facile maintenant de les ajouter à E' en faisant une modification légère du crible C'. En effet, marquons dans l'intervalle $(1 < \tau < 2)$ une infinité dénombrable des points $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ tendant vers 2. Si nous construisons, pour chaque entier positif m, un crible C'_m ayant un seul point criblé x_m et tel que les abscisses τ des segments fermés qui constituent C'_m appartiennent toutes à l'intervalle (τ_m, τ_{m+1}), on voit bien que la réunion du crible C' et de tous les cribles C'_m est *un crible général dont l'ensemble criblé coïncide précisément avec l'ensemble analytique donné E.*

Donc, nous avons démontré la proposition importante:

Théorème (inverse). — *Tout ensemble analytique linéaire est un ensemble criblé au moyen d'un crible général.*

En raprochant cette proposition au théorème *direct*, nous sommes amenés à la proposition suivante:

La famille de tous les ensembles linéaires criblés est identique avec la famille de tous les ensembles analytiques linéaires.

V. Projections.

17. Par définition même, est *analytique* tout ensemble E linéaire de points qui nous est donné comme l'ensemble des valeurs d'une fonction $f(t)$ discontinue seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de t.

La forme géométrique que l'on peut donner à cet énoncé le rendra peut-être plus clair: considérons deux axes rectangulaires et une courbe dont l'équation est

$$x = f(t).$$

La fonction f est évidemment ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait; donc est une fonction *de classe 1* de M. Baire. Par suite, la différence

$$x - f(t)$$

est une fonction de deux variables, t et x, *représentable analytiquement.* Dans ces conditions, un théorème de M. Lebesgue démontre que l'ensemble des points du plan TOX dans lesquels cette différence s'annule est sûrement un ensemble plan *mesurable B.*

Le rôle qui joue cet ensemble plan devient clair si nous remarquons que l'ensemble analytique linéaire donné E est *une projection* *orthogonale de cet ensemble plan sur l'axe OX.* Pour apprécier la simplicité de cet ensemble plan, il est commode de poser la définition générale suivante.

18. Prenons l'espace euclidien $\mathcal{E}$ à m dimensions. Soit, dans cet espace, un système d'axes rectangulaires quelconque que nous désignerons par $S\ (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Imaginons, dans cet espace $\mathcal{E}$, une suite bien déterminée, dénombrable ou finie, de parallélépipèdes fermés à m dimensions, orientés suivant les axes du système S et sans point commun deux à deux: ces parallélépipèdes seront dits les *parallélépipèdes de rang 1.*

Imaginons, dans chacun de ces parallélépipèdes de rang 1, une suite bien déterminée, dénombrable ou finie, de parallélépipèdes fermés, orientés suivant les axes du système S et sans points communs deux à deux: ces parallélépipèdes fermés seront dits les *parallélépipèdes de rang 2*; on voit bien que l'ensemble composé de tous les parallélépipèdes de rang 2 est dénombrable.

D'une manière générale, quel que soit l'entier positif n, $n > 1$, concevons, dans chacun des parallélépipèdes de rang $n-1$, une suite bien déterminée, dénombrable ou finie, de parallélépipèdes fermés analogues n'ayant aucun point commun deux à deux, et nommons-les, pour abréger, *parallélépipèdes de rang n*, etc.

Comme tous les parallélépipèdes de *rang n* sont en nombre dénombrable (ou fini), leur *ensemble-somme* est nécessairement *mesurable B*; designons le par S_n. Il résulte immédiatement de là que la *partie commune* à tous les ensembles-sommes $S_1, S_2, S_3, \ldots$ est forcement un ensemble *mesurable B*; désignons-le par e et posons la définition suivante:

Définition. — *Nous appellerons* ensemble élémentaire *l'ensemble e ainsi construit.*

On voit que tout ensemble élémentaire est un ensemble d'une nature pas trop compliquée, mais ce n'est, en tout rigueur, que bien relativement [1]).

Remarquons que l'ensemble formé d'un *seul* point est évidemment élémentaire; de même, tout ensemble *isolé* (c'est-à-dire tel que chaque son point soit un point isolé) est encore élémentaire.

[1]) La »simplicité« des ensembles élémentaires nous paraît bien illusoire. La traduction de la définition d'ensemble élémentaire en langage de l'Arithmétique se heurte à toutes les controverses relatives à la *Théorie de la croissance.* Il semble que toutes les difficultés de la théorie des ensembles *projectifs* sont contenues dans les ensembles élémentaires comme dans un germe.

19. Cette définition étant posée, nous allons démontrer la proposition suivante:

Tout ensemble analytique linéaire est la projection orthogonale d'un ensemble élémentaire plan.

Pour le démontrer, il suffit de considérer la fonction $F(\tau)$ continu du côté droit en *chaque* point que nous avons défini précédemment (n° 15).

En effet, prenons un semi-segment quelconque *d de rang n.* Soient H et h respectivement le maximum et le minimum de $F(\tau)$ dans d. Les points du plan dont les abscisses appartiennent au segment fermé d (l'extrémité droite y comprise) et dont les ordonnées sont compris dans le segment $(h \leqslant x \leqslant H)$ forment un rectangle fermé orienté suivant les axes des τ et des x; nous l'appelons *rectangle de rang n.*

Donc, à chaque semi-segment *d de rang n* situé dans $(0 \leqslant \tau < 1)$ correspond dans le plan un rectangle *de rang n*, et il est évident que deux de ces rectangles n'empiètent jamais l'un sur l'autre, mais ils peuvent avoir une frontière commune. Comme chaque semi-segment d de rang n contient une infinité dénombrable des semi-segments d' de rang $n+1$ qui n'ont aucun point commun deux à deux, chaque rectangle de rang n contient une infinité dénombrable des rectangles de rang $n+1$ qui n'empiètent jamais l'un sur l'autre, mais qui peuvent avoir une frontière commune, et *ainsi de suite.* Si cette dernière circonstance se présente, nous pouvons évidemment supposer que ces rectangles sont un peu *contractés* dans la direction de l'axe des τ sans que leurs projections sur l'axe des x soient changées, de manière que tous les rectangles de même rang n'aient aucun point commun.

Dans ces conditions, nous avons un ensemble *élémentaire* plan e; et il est manifeste que sa projection orthogonale sur l'axe des x coïncide avec l'ensemble des valeurs de $F(\tau)$; or, l'ensemble analytique donné E ne diffère de ce dernier que d'un nombre dénombrable (ou fini) des points supplémentaires *que nous pouvons considérer comme les projections des points isolés dans le plan.* Cette remarque achève la démonstration du théorème proposé.

c. q. f. d.

VI. Cribles à plusieurs dimensions.

20. Pour fixer les idées, nous nous bornons au cas d'un crible dans l'espace à *trois* dimensions.

Prenons l'espace euclidien à trois dimensions et considérons trois axes rectangulaires $OXYZ$ et un cube fondamental K de côté 1 dont les points $M(x, y, z)$ vérifient les inégalités

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Définition: *D'une manière générale, nous appellerons* crible dans l'espace à trois dimensions *toute collection dénombrable C' de rectangles fermés parallèles au plan XOZ, orientés suivant les axes OX et OY, et situés à l'interieur du cube K.*

Par analogie avec ce qui précède, nous désignerons par $\mathcal{E}$ la *totalité* des points $M(x, y)$ de la face inférieure du cube K tels que la perpendiculaire P_M élevée en M au plan XOY coupe le crible C' en un ensemble de points *bien ordonné conformément à la direction positive de l'axe OZ.*

L'ensemble des points qui n'appartiennent pas à la totalité $\mathcal{E}$ nous désignerons par E.

Par définition de E, la perpendiculaire P_M en chaque point M de E coupe le crible C' en un ensemble dénombrable R_M qui n'est pas bien ordonné, en adoptant la même convention de rang. Donc, il est possible de déterminer, dans ce cas, une suite *descendante* $a_1, a_2, \ldots$ formée de points de R_M, chacun plus bas que le précédent et qui tendent vers un point μ situé sur la perpendiculaire P_M. Ainsi, l'ensemble R_M, dans ce cas, est d'un mouvement rétrograde, et il est clair que, parmi les points *limites* μ de R_M, en chacun desquels l'ensemble R_M est d'un mouvement rétrograde, il y a un point le plus bas; nous désignerons par $\mu(x, y)$ sa coordonnée z.

C'est cet ensemble E (et non pas la totalité $\mathcal{E}$) que nous appellerons *ensemble criblé au moyen du crible C'* situé dans l'espace à trois dimensions ou, plus simplement, *ensemble criblé*.

21. Les ensembles criblés à plusieurs dimensions sont étroitement liés avec les *ensembles analytiques dans l'espace à plusieurs dimensions.* Mais il est nécessaire d'abord de définir ces derniers.

Définition. *Nous appelons* ensemble analytique dans l'espace à m dimensions *le lieu des positions successives d'un point mobile $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre variable t définies dans l'intervalle $(0 < t < 1)$ et discontinues seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de t: $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t), \ldots, x_m = f_m(t)$.*

On voit bien que cette définition est une généralisation très naturelle de la notion d'ensemble analytique *linéaire*. Ce qui justifie l'introduction de cette généralisation, c'est la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points dans l'espace euclidien à m dimensions soit criblé est qu'il soit analytique dans cet espace.

22. **La condition est necessaire.** Pour fixer les idées, bornons-nous au cas d'un ensemble criblé E *plan* $(m = 2)$

Soit C' un crible dans l'espace à trois dimensions qui définit l'ensemble E. Nous considérons chacun des rectangles fermés ϱ_n du crible C' comme la face supérieure d'un parallélépipède P_n orienté suivant les axes $OXYZ$ et ayant sa base dans le plan $z = 0$.

Cela posé, nous commençons par transformer le crible donné C' en un autre C'' qui possède les deux propriétés du crible canonique C de M. H. Lebesgue:

1° *Le diamètre de la base du parallélépipède P_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment;*

2° *Quel que soit le nombre n, il existe dans le parallélepipède P_n un parallélépipède P_m dont la hauteur est précisément inférieure à celle du P_n.*

La méthode pour effectuer cette transformation est toujours la même que cette utilisée dans le cas de l'ensemble E *linéaire*: il suffit de remplacer les mots „segment“ et „rectangle“ respectivement par les mots „rectangle“ et „parallélépipède“.

Tous les arguments de la démonstration d'analycité de l'ensemble lebesguien E deviennent applicables au crible transformé C''.

c. q. f. d.

23. **La condition est suffisante.** Soit E un ensemble analytique plan contenu dans un carré dont les côtés ont pour équations

$$x = 0, \quad x = 1; \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Par définition, E est le lieu des positions successives d'un point mobile $M(x, y)$ dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre variable t, définies dans l'intervalle $(0 < t < 1)$ et discontinues seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de t:

$$x = f(t), \quad y = g(t).$$

D'ailleurs, comme nous avons dit (n° 13), on peut toujours supposer les fonctions f et g discontinues seulement aux points *rationnels* de l'intervalle $(0 < t < 1)$.

Il en résulte qu'on peut enfermer chaque point *irrationnel* t de $(0, 1)$ en un intervalle ouvert δ tel que les oscillations (totales) de f et g dans δ soient toutes les deux inférieures à ε, ε étant positif aussi petit qu'on veut. Nous concluons de là que, quel que soit un intervalle ouvert δ, on peut déterminer dans δ un ensemble *réductible* R_ε tel que *les oscillations (totales) de f et g dans chacun des intervalles contigus à R_ε soient toutes les deux inférieures à ε, ε étant aussi petit qu'on veut* (n° 14).

Dans ces conditions, tous les raisonnements faits dans le cas d'une *seule* fonction f, deviennent encore applicables au cas de *deux* fonctions f et g.

Il est inutile de fatiguer le lecteur en répétant toujours les mêmes mots: l'application des procédés précédents (n° 15) est justifiée.

Nous serons ainsi amenés aux fonctions composées

$$x = F(\tau) = f[\varphi(\tau)] \quad \text{et} \quad y = G(\tau) = g[\varphi(\tau)]$$

définies dans le semi-segment

$$0 \leqslant \tau < 1$$

et *continues* du côté droit en *chaque* point τ de ce semi-segment, sans aucune exception, même aux points rationnels et à l'origine de coordonnées O. Ces fonctions F et G sont telles que leurs oscillations (totales) dans chacun des semi-segment d de rang n soient précisément inférieures à $\varepsilon_n \cdot \sqrt{2}$.

D'ailleurs, si l'on fait varier τ dans le semi segment $0 \leqslant \tau < 1$, l'ensemble total E' des points $M(x, y)$ est contenu dans l'ensemble analytique donné E et ne diffère de E que d'un nombre dénombrable (ou fini) des points supplémentaires éventuels.

On démontre immédiatement que cet ensemble plan E' est *criblé au moyen d'un crible C' situé dans l'espace à trois dimensions.*

Pour le construire, considérons trois axes rectangulaires OX, OY et $O\tau$, et prenons un semi segment quelconque d de rang n. Comme les oscillations totales des deux fonctions $F(\tau)$ et $G(\tau)$ dans

d sont inférieures à ε_n, on peut déterminer, dans le plan XOY, un petit carré q ayant pour côté ε_n, tel que le point mobile $M(x, y)$ reste dans q lorsque le paramètre τ varie dans d. Si nous considérons maintenant le carré q comme une projection orthogonale sur le plan XOY d'un carré Q parallel à ce plan et à distance égale à la coordonnée τ de la borne *droite* du semi-segment d, nous faisons correspondre à chacun des semi-segments d de rang n un carré Q bien déterminé parallel au plan XOY et situé dans le cube fondamental

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Si nous effectuons cette construction du carré Q pour chaque semi-segment d de rang n et si nous faisons varier n, nous obtiendrons dans ce cube une infinité dénombrable de carrés fermés Q parallels au plan XOY et orientés suivant les axes OX et OY. Donc, nous avons un crible C' dans l'espace à trois dimensions.

D'après la continuité des fonctions F et G en chaque point du côté droit, *un ensemble criblé au moyen de ce crible C' coïncide précisément avec l'ensemble E'.* Et, comme l'ensemble analytique donné E ne diffère de E' que d'un ensemble au plus dénombrable des points supplémentaires, on conclut immédiatement (n° 16) que l'ensemble, analytique E lui-même est un ensemble criblé. c. q. f. d.

Nous sommes ainsi amenés à la proposition suivante:

La famille de tous les ensembles de points dans l'espace à m dimensions criblés au moyen d'un crible dans l'espace à $m+1$ dimensions est identique avec la famille de tous les ensembles analytiques dans l'espace à m dimensions.

24. Les projections. — Revenons aux ensembles *élémentaires* dans l'espace à plusieurs dimensions (n° 18). Nous pouvons tirer de la démonstration précédente une conséquence extrêmement importante.

Nous avons vu qu'à chaque semi-segment *d de rang n* situé sur l'axe $O\tau$ correspond un petit carré q bien déterminé situé dans le plan XOY (n° 23). Considérons donc l'ensemble des points dans l'espace à trois dimensions dont les projections sur le plan XOY et sur l'axe $O\tau$ appartiennent respectivement au carré q et au semi-segment d *supposé fermé* (donc, au *segment* d). Il est évident que cet ensemble forme un parallélépipède fermé orienté suivant les axes du trièdre $OXY\tau$; nous l'appelons *parallélépipède de rang n.*

Tous les parallélépipèdes de rang n sont en infinité dénombrable et n'empiètent jamais l'un sur l'autre, mais ils peuvent avoir une face commune. Si cette dernière circonstance se présente, nous pouvons évidemment les contracter dans la direction de l'axe $O\tau$ sans que les projections sur le plan XOY soient modifiées, de manière qu'ils n'aient aucun point commun deux à deux.

Comme chaque parallélépipède de rang n contient manifestement une infinité dénombrable de parallélépipèdes de rang $n+1$, nous pouvons former au moyen des parallélépipèdes de rangs $1, 2, 3, \ldots$ un ensemble élémentaire e, et il est manifeste que l'ensemble plan E' est une projection orthogonale de e sur le plan XOY. Et puisque l'ensemble analytique donné E ne diffère de E' que d'une infinité dénombrable des points supplémentaires, nous pouvons ajouter à e un ensemble dénombrable de points de manière que E devienne une projection orthogonale d'un ensemble élémentaire.

Nous sommes ainsi amenés à la proposition importante:

Tout ensemble analytique de points dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ à m dimensions peut être considéré comme une projection orthogonale d'un ensemble élémentaire *situé dans un espace euclidien à $m+1$ dimensions contenant $\mathcal{E}$* [1]).

Cette proposition est d'une extrême importance dans la théorie des ensembles analytiques, puisque c'est de là que dérivent les premières propriétés des ensembles analytiques: *puissance, mesure, catégorie.*

Puissance.

25. Soit E un ensemble analytique quelconque sur lequel on sait seulement qu'il est *non dénombrable.* Soit e un ensemble élémentaire dont la projection coïncide avec E.

Comme le diamètre d'un parallélépipède de rang n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment et comme E est non dénombrable, il existe un entier positif n suffisamment grand pour que, parmi les parallélépipèdes de rang n, il y ait *deux* parallélépipèdes π et π' ayant les deux propriétés suivantes:

1° les projections de π et de π' sont sans points communs;

[1]) Théorème de Souslin: «*Tout ensemble (A) est la projection orthogonale d'un ensemble B de classe 1*». V. aussi W. Sierpiński: «*Les projections des ensembles mesurables (B) et les ensemble (A)*», Fundamenta Mathematicae t. V, 159.

2° les projections des parties de e enfermées dans π et dans π' sont toutes les deux encore non dénombrables.

Dès lors, nous sommes dans les mêmes conditions qu'auparavant, et nous pouvons déterminer, dans chacun des deux parallélépipèdes π et π', deux parallélépipèdes nouveaux jouissant des mêmes propriétés; nous obtenons ainsi *quatre* parallélépipèdes déterminés. Nous continuons à opèrer de la même manière dans chacun d'eux et nous obtenons *huit* parallélédipèdes déterminés jouissant des mêmes propriétés, *et ainsi indéfiniment.*

Il est clair que l'ensemble des points qui appartiennent chacun à une infinité de parallélépipèdes ainsi déterminés est un ensemble *parfait* contenu dans l'ensemble élémentaire e. D'ailleurs, les projections de deux ses points supposés différents sont toujours *distinctes.*

Il en résulte que la projection de cet ensemble parfait est encore un ensemble parfait. Et comme ce dernier est manifestement contenu dans l'ensemble analytique donné E, nous obtenons la proposition suivante:

Tout ensemble analytique non dénombrable contient nécessairement un ensemble parfait, donc a la puissance du continu [1]).

Mesure.

26. Soit E un ensemble analytique quelconque sur lequel on soit seulement qu'il a une mesure extérieure *non nulle*, $m_e E > 0$.

Tout d'abord, nous faisons cette remarque bien triviale que pour démontrer qu'un ensemble de points E *quelconque*, de mesure extérieure *non nulle*, est mesurable, il faut constater qu'il contient un ensemble *fermé* F dont la mesure est supérieure à $m_e E - \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut; et cela suffit.

En effet, d'une part, on peut enfermer les points de E en une série de parallélépipèdes (intervalles, rectangles) dont l'étendue (longueur, aire, volume) totale est inférieure à $m_e E + \varepsilon$. D'autre part, tous les points qui n'appartiennent pas à E sont évidemment compris dans une série de parallélépipèdes extérieurs à l'ensemble fermé F dont l'étendue totale est inférieure à $1 - mF + \varepsilon$. Donc, l'étendue totale de tous les deux séries de parallélépipèdes est inférieure à $m_e E + \varepsilon + 1 - mF + \varepsilon < 1 + 3\varepsilon$; donc, E est mesurable. Malgré son extrême banalité, cette remarque nous sera bien utile.

[1]) C'est un résultat de Souslin. *Voir* ma Note dans les *Comptes Rendus*, 1917.

Encore une remarque: si nous avons une suite $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles quelconques qui ne sont assujettis à aucune restriction, la mesure extérieure de l'ensemble-somme des n premiers termes de la suite tend vers la mesure extérieure de la réunion de *tous* les termes de la suite, lorsque n croît indéfiniment.

Il en résulte qu'on peut prendre un nombre n_1 de parallélépipèdes de rang 1 suffisamment grand pour que la partie de l'ensemble élémentaire e comprise dans ces parallélépipèdes ait une projection dont la mesure extérieure est supérieure è $m_e E - \varepsilon_1$.

Opérons de même sur les parallélépipèdes de rang 2 contenus dans les parallélépipèdes choisis de rang 1: nous pouvons prendre un nombre n_2 suffisamment grand pour que la partie de e comprise dans ceux-ci ait une projection dont la mesure extérieure est supérieure à $m_e E - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, *et ainsi de suite.*

On formera ainsi des collections $K_1, K_2, K_3, \ldots$ de parallélépipèdes respectivement de rangs $1, 2, 3, \ldots$, chacune composée d'un nombre *fini* de ceux-ci et intérieure à la précédente, telles que la projection de la partie de l'ensemble élémentaire e comprise dans les parallélépipèdes de la collection K_n ait la mesure extérieure plus grande que $m_e E - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots - \varepsilon_n$; ici la série à termes positifs $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ est convergente et de somme ε, ε étant aussi petit qu'on veut.

Il en résulte que la projection des points de K_n est un ensemble parfait de mesure plus grande que $m_e E - \varepsilon$; nous le désignons par F.

D'autre part, la partie commune aux collections $K_1, K_2, \ldots$ est un ensemble de points manifestement fermé, et il est clair que l'ensemble F est une projection de ce dernier. Donc, l'ensemble F est contenu dans l'ensemble analytique donné E.

Nous sommes ainsi amenés à la proposition suivante:

Tout ensemble analytique est mesurable [1]).

Catégorie.

27. Il s'agit de démontrer qu'aucun ensemble analytique n'est jamais de ceux que M. H. Lebesgue a appelés autre fois *ensembles qui ne sont pas Z*, ou, pour reprendre une dénomination de M. A. Denjoy, qu'un ensemble analytique n'est jamais *inexhaustible résiduel.*

[1]) Théorème V de ma Note (1917): «*Tout ensemble (A) est mesurable (L)*»; v. aussi N. Lusin et W. Sierpiński: «*Sur quelques propriétés des ensembles (A)*», Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 44.

En d'autres termes, il s'agit de faire voir que, quel que soit un ensemble parfait P, il existe une portion π de P telle que *de première catégorie* dans π est: *ou bien* l'ensemble analytique donné $\mathcal{E}$ *ou bien* son complémentaire CE.

Il suffit évidemment de constater que si l'ensemble analytique donné E n'est de première catégorie dans *aucune portion* de P, l'ensemble complémentaire CE est de première catégorie dans P.

Tout d'abord, dans l'espace à $m+1$ dimensions où l'ensemble élémentaire e est situé, nous considérons le cube fondamental comme un parallélépipède unique de rang 0.

Nous commençons par supprimer tous les parallélépipèdes, quel que soit leur rang, tels que les parties de e qui leur appartiennent, aient des projections de première catégorie dans P; il est clair qu'il y a des parallélépipèdes conservés de tous les rangs

Cela posé, nous opérons sur chacun des parallélépipèdes restants, quel que soit son rang, de la manière suivante: soit $\triangle$ ce parallélépipède; nous considérons la partie de l'ensemble élémentaire e qui appartient à $\triangle$. Comme $\triangle$ est un des parallélépipèdes conservés, la projection de cette partie de e n'est pas de première catégorie dans P. Donc, il existe dans P un ensemble *fermé* bien déterminé F tel que cette projection ne soit jamais de première catégorie dans aucune portion π de P qui ne contient pas de points de F, et cela n'ait pas lieu si la portion π est contenue dans F.

Ce premier point établi, nous faisons déterminer pour chaque parallélépipède conservé $\triangle$, contenu dans $\triangle$ et de rang immédiatement suivant, un ensemble fermé F' correspondant.

Il est clair que la partie commune à tous ces ensembles fermés F' est un ensemble *non dense* dans toute portion π de P qui ne contient pas de points de F. Donc, l'ensemble des points communs à tous les F' et qui n'appartiennent pas à F est un ensemble non dense dans P; nous le désignons par $H(\triangle)$.

Ainsi, à tout parallélépipède $\triangle$, quel que soit son rang, correspond un ensemble bien déterminé $H(\triangle)$ non dense dans P. Il s'en suit que la réunion de tous ces ensembles $H(\triangle)$ est *un ensemble de première catégorie dans P*. Désignons-le par H.

Nous allons démontrer que *chaque point m de P qui n'appartient pas à H est un point de l'ensemble analytique donné E.*

En effet, comme m n'appartient pas à $H(\triangle_0)$, où $\triangle_0$ est le cube fondamental, il existe, dans $\triangle_0$, un parallélépipède $\triangle_1$ de rang 1 tel que le point m soit extérieur à l'ensemble fermé F_1 qui correspond à $\triangle_1$; comme m n'appartient pas à $H(\triangle_1)$, il existe, dans $\triangle_1$, un parallélépipède $\triangle_2$ de rang 2 tel que m soit extérieur à l'ensemble fermé F_2 qui correspond à $\triangle_2$, *et ainsi de suite.*

On formera ainsi des parallélépipèdes $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2, \ldots$ de rangs respectivement égaux à $0, 1, 2, \ldots$, chacun intérieur au précédent et tels que le point m n'appartienne jamais à aucun des ensembles fermés F_n. Donc, le point m appartient nécessairement à la projection de chacun des parallélépipèdes $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2, \ldots$. Nous concluons de là que le point m est projection d'un point de l'ensemble élémentaire e, donc appartient à E [1]). c. q. f. d.

28. La forme *analytique* que l'on peut donner à cette proposition la rendra peut-être plus claire: considérons, dans l'espace euclidien à m dimensions, un ensemble analytique *arbitraire* E. Soit f une fonction égale à 1 pour les points de E et à 0 en dehors de E.

Si P est un ensemble parfait quelconque situé dans l'espace considéré, il y a des portions de P dans lesquelles *de première catégorie: est ou bien* E, *ou bien* son complémentaire CE. Donc, la fonction f ainsi définie possède une propriété nécessaire de M. R. Baire qui appartient à toutes les fonctions de sa classification; c'est-à-dire:

f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait P quand on néglige des ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait P.

29. **Remarque.** — Nous compléterons ces résultats par la remarque suivante. Si un ensemble est mesurable, son complémentaire l'est aussi, et nous avons la même conclusion pour la propriété d'être un ensemble Z. Donc,

Le complémentaire d'un ensemble analytique est mesurable et est un ensemble Z (n'est pas un ensemble inexhaustible non résiduel).

[1]) Théorème VI de ma Note (1917): »*Lorsqu'un ensemble E, qui est un ensemble* (*A*) *formé à l'aide de points d'un ensemble parfait P, est de seconde catégorie sur P, il existe un intervalle contenant des points de P et dans lequel le complémentaire de E par rapport à P est de première catégorie*«. V. aussi N. Lusin et W. Sierpiński: »*Sur un ensemble non mesurable* (*B*)«. Journal de Mathématiques t. II (1923), p. 68; O. Nikodym: Fundamenta Mathématicae t. VII, p. 153.

CHAPITRE II.

La mesurabilité *B*.

VII. Les idées de M. Emile Borel.

30. **La notion d'ensemble mesurable** B. — Il est temps d'examiner les relations des ensembles criblés (analytiques) avec les ensembles dits *mesurables* B.

Nous ne chercherons pas à donner une définition *générale* du mot „mesurable B“: il nous paraît qu'il y a là une chose suffisamment dangereuse pour qu'une définition *générale* en soit pratiquée sans précaution extrême.

On appelle habituellement *ensemble mesurable* B tout ensemble de points qui *peut être obtenu par l'application répétée des deux opérations fondamentales* (*addition* d'une infinité dénombrable d'ensembles, *partie commune* à une infinité dénombrable d'ensembles) *à partir d'intervalles.*

Cette définition paraît sans doute particulièrement claire quand il s'agit des ensembles *déjà réalisés*; mais elle n'a point encore une netteté suffisante pour pouvoir figurer dans une démonstration mathématique, dans laquelle on raisonne sur un ensemble mesurable B dont la réalisation est dans le *virtuel.* La nécessité de faire de tels raisonnements s'impose immédiatement si l'on se propose d'étudier les propriétés *générales* d'ensembles mesurables B. Et alors on cherche à préciser cette définition au moyen de phrases supplémentaires.

Dans ce but, après avoir énoncé la définition considérée, on fait habituellement connaître que les deux opérations fondamentales, par lesquelles on construit des ensembles mesurables B au moyen d'intervalles, peuvent être combinées mutuellement d'une manière très compliquée, puisque, pour avoir un ensemble désiré F mesurable B, on doit bien souvent préparer préalablement une infinité d'autres ensembles préliminaires, également mesurables B, dont une composition au moyen des opérations fondamentales nous amène, en définitive, à posséder l'ensemble résultant E.

Ces explications, nécessaires d'ailleurs si l'on se propose d'étudier les ensembles mesurables B dans leur généralité, mettent nettement en lumière toute la complexité, de la notion générale de l'ensemble mesurable B. Mais ces explications mêmes font comprendre que la définition précédente d'ensemble mesurable B *prise seule*, n'avait aucun sens net: sans elles, que veulent dire, en effet, ces mots: *Application répétée des deux opérations fondamentales?* Ainsi, ces explications sont inséparables de la définition précédente; ou plutôt ce sont ces explications qui sont la définition elle-même d'ensemble mesurable B.

Si nous cherchons à analyser ces explications, voici ce que nous constatons: nous sommes partis d'intervalles que nous avons considérés comme donnés; puis nous avions à préparer les ensembles intermédiaires infiniment nombreux dont *les uns sûrement dépendent des autres*. Dans quel ordre faut-il les prendre pour être assuré de les avoir tous, sans s'égarer dans leur multiplicité innombrable et sans faire aucun cercle vicieux?

On rencontre cette question pour la première fois dans les éléments, lorsqu'on aborde l'étude des fonctions et l'on adopte d'habitude la définition suivante: une fonction $f(x)$ est dite *élémentaire*, si l'on sait l'obtenir par *l'application répétée des opérations fondamentales* (addition, soustraction, multiplication, division, $\sqrt[m]{}$, log, sin, etc.) *à partir de la variable réelle x et de constantes*. Il est impossible de ne pas être frappé de l'analogie entre cette définition et la définition précédente d'ensemble mesurable B. Mais cette analogie est purement formelle.

Dans le cas de la notion de fonction élémentaire, chacune des opérations fondamentales est applicable au plus à *deux* fonctions préalablement définies; l'ensemble des fonctions intermédiaires est donc manifestement *fini*. C'est la raison pour laquelle on peut *placer ces fonctions dans un certain ordre*, de telle manière qu'on sait déterminer, par les opérations fondamentales, *toutes* les fonctions intermédiaires *les unes après les autres*, sans en excepter une seule et sans répéter aucune d'eux plusieurs fois, pour, en définitive, aboutir à une fonction finale désirée. C'est en raison de cet ordre, qu'il est impossible de tomber dans le cercle vicieux et par conséquent, que la définition donnée de fonction élémentaire est la *vraie définition*.

Le cas est tout différent de la notion d'ensemble mesurable B. Dans ce cas, les ensembles préliminaires sont en nombre *infini*, et l'ordre dans lequel ces ensembles sont placés est beaucoup plus important que ne l'est cette définition d'ensemble mesurable B elle-même. Sans la connaissance de cet ordre, nous nous trouverons éternellement dans la situation d'un mathématicien qui prétend posséder les entiers positifs possibles sans connaître cependant le principe d'induction complète. C'est cet ordre des ensembles intermédiaires qui est le véritable nerf de toutes les définitions constructives d'ensemble mesurable B. La nécessité théorique des définitions constructives d'ensemble mesurable B se transforme donc, sur le terrain des raisonnements généraux, en la nécessité mathématique de la définition rigoureuse *d'ordre des ensembles intermédiaires*

On sait que tous les processus pour établir effectivement cet ordre sont susceptibles d'une étude générale, qui a été faite, pour la première fois par G. Cantor, à l'occasion des dérivés successifs d'un ensemble donné, et qui conduit à la notion *des nombres transfinis* de la seconde classe. Un nombre transfini lui-même n'est pas autre chose qu'une notation abrégée, pour indiquer l'ordre dans lequel doivent être effectuées une infinité dénombrable d'opérations, comportant une infinité dénombrable de passages à la limite successifs ou superposés [1]). Lorsqu'on ne limite pas le champ des Mathématiques à l'étude d'une catégorie déterminée d'ensembles mesurables B provenant, par exemple, des fonctions de classe finie de M. R. Baire, on fait intervenir dans la définition d'ensemble mesurable B les nombres transfinis *aussi grands qu'on veut*. C'est la raison pour laquelle *la totalité des ensembles mesurables B est quelque chose sûrement adéquate à la totalité des nombres transfinis de la seconde classe.*

31. Les critiques de M. Emile Borel. — C'est M. E. Borel qui a fait la critique la plus profonde sur ce sujet. Cette critique est devenue trop classique pour qu'il soit nécessaire d'en exposer en détail les arguments: nous allons nous borner à rappeler rapidement les points essentiels sur lesquels elle est fondée.

D'abord, il y a bien des virtualités qui semblent être, dans l'état actuel de la Science, des totalités légitimes (c'est-à-dire de véritables ensembles). Par exemple, il paraît difficile de nier, pen-

[1]) On doit cette définition à M. E. Borel: *Le calcul des intégrales définies* (*Journal des Mathématiques*, 1912, p. 177). Il y a plusieurs théories des nombres transfinis: la théorie le Cantor »*d'émanation de types*«, les théories *nominalistes* de MM. R. Baire et H. Lebesgue; la théorie *formelle* de MM. B. Russel—W. Sierpiński.

dant qu'on fait un travail dans la Théorie des Fonctions, la possibilité de raisonner sur *tous* les *points* compris dans un intervalle donné, ou sur *toutes* les *fonctions continues*, cette possibilité paraît légitimée par la définition connue *tout finie* d'un point réel ou de la continuité d'une fonction due à Cauchy. On obtient ainsi les propriétés générales de la *totalité*, mais on ne raisonne jamais en réalité sur un individu *déterminé* de cette totatité, à moins qu'il ne s'agisse d'un individu très particulier qui a pu être distingué de tous les autres par une définition finie [1]). D'ailleurs, si l'on donne, *par une loi quelconque*, un individu de la totalité, nous savons le déterminer *post factum* par un procédé régulier, en employant, par exemple, les divisions décimales ou les approximations polynomiales bien choisies.

Tout au contraire, l'ensemble de *tous* les *ensembles de points* est une totalité illégitime. Quand on parle de cette totalité, on ne donne ni la loi de cette infinité, ni le moyen de la nommer. Si l'on donne, par une voie quelconque, un individu de cette totalité, il n'existe aucun procédé régulier pour l'obtenir *post factum*, même si le mot *transfiniment*, par une synthèse hardie, acquérait un sens aussi clair et aussi universellement dépourvu d'ambiguïté que le sens actuellement adopté pour le mot *indéfiniment*. Nous ne connaissons actuellement aucun moyen de définir la totalité des ensembles de points: quand nous parlons d'elle, nous n'imaginons *en fait* que les divers artifices qu'on peut inventer pour déterminer les ensembles très compliqués à défaut d'une définition finie qui permettrait de les embrasser d'un seul regard. Mais, dès qu'il s'agit de la possibilité humaine de créer les procédés de détermination et les systèmes des conventions, l'assimilation, *consciente ou inconsciente*, avec une totalité à définition finie doit complètement disparaître, et nous sommes dans le domaine des *subjectivités*. Ainsi la totalité des ensembles de points, *étant variable d'un mathématicien à un autre*, n'a, sur le terrain de la Science objective, les parties classiques des Mathématiques par exemple, une autre existence qu'une existence *purement verbale*: il n'est donc pas possible de la regarder comme un véritable être mathématique, pouvant être introduit dans les raisonnements.

[1]) *Voir* E. Borel: *La Philosophie mathématique et l'infini* (Revue du Mois, août 1912).

De même qu'il est nécessaire d'attribuer à la totalité des ensembles de points l'existence entièrement verbale, il faut faire entrer dans le domaine des illégimités la totalité des *nombres* réels elle-même. Comme tout nombre réel doit avoir une loi *finie* nécessaire pour le déterminer à partir de l'unité [1]), il est clair qu'on est arrêté, dans les deux cas, par la même difficulté: on ne peut pas embrasser d'un seul regard les êtres mathématiques, *déterminés à partir des conditions immobiles*, par les lois finies les plus diverses, sans connaître une *loi de ces lois*. Il est cependant nécessaire de dire un mot de la notion du *continu*. Il peut paraître paradoxal de séparer la totalité des *points* de la totalité des *nombres* en légitimant la première et en niant la seconde; c'est cependant un ordre des idées extrêmement naturel. La notion du continu est acquise par l'intuition géométrique [2]); la connaissance de l'unité de longueur n'est nullement nécessaire pour fixer sur la droite un point unique et bien déterminé: un point immobile est bien défini sur la droite par cela seul qu'*il est sur la droite là où il est*. Dans l'étude du continu, il n'y a aucune difficulté tant qu'on reste au point de vue purement géométrique; les points d'une droite sont tous identiques, car ils ont tous les mêmes propriétés générales; les difficultés ne se présentent qu'avec les définitions arithmétiques, car la connaissance de ces propriétés générales communes est alors moins aisée [3]). D'ailleurs, on sait que *la notion arithmétique complète du continu exige qu'on admette la légitimité d'une infinité dénombrable de choix successifs et arbitraires*, cette légitimité étant fort douteuse. Ainsi le continu n'apparaît jamais comme donné dans son intégralité arithmétique [3]). Un des problèmes les plus importants de la Théorie des Fonctions d'une variable réelle consiste maintenant à *transformer la totalité des nombres en une totalité légitime* (à définition finie), ou à *nommer une classe à définition finie de nombres invariante relativement à toutes les transformations de l'Analyse classique et de l'Al-*

[1]) Nous rappelons ici la notion importante de *hauteur* d'un nombre réel donné due à M. E Borel: *Le calcul des intégrales définies* (*Journal des Math.*, 1912, p. 163). Il serait fort intéressant de rapprocher des ces idées de M. E. Borel les idées nouvelles de M. D. Hilbert: *Logische Grundlagen der Mathematik* (*Math. Ann.*, t. 88).

[2]) *Voir* E. Borel: *Sur les principes de la théorie des ensembles* (Communication faite au IV^e *Congrès international des Mathématiciens*, Rome, avril 1908).

[3]) *Voir* E. Borel: *L'antinomie du transfini* (*Revue philosophique*, 1900).

gèbre: c'est cette classe des nombres qui constituerait le *continu pratique* qu'utilisent les mathématiciens [1]).

En revenant aux totalités des nombres transfinis et des ensembles musurables B telles qu'elles sont défini précédemment, nous n'avons que bien peu de choses à dire: *les deux totalités sont sûrement illégitimes.* La difficulté, qu'il y a à acquérir la conception de ces totalités tient à ce qu'on ne peut formuler effectivement qu'un nombre fini de conventions et, si loin que ces conventions permettent d'aller, les êtres (nombres transfinis, ensembles mesurables B) qu'elles permettent d'atteindre effectivement ne sont rien à l'égard de ceux qui leur échappent, mais qui pourront être déterminés par d'autres conventions en nombre fini, sans qu'on arrive jamais au bout [2]). La conception de la totalité *constructive* des ensembles mesurables B, bien que n'étant pas contradictoire en soi, n'est pas une véritable conception mathématique, parce qu'il n'est pas possible de décrire exactement, par un nombre fini de conventions, la construction d'une telle totalité: il faudrait une infinité de conventions, indépendantes d'une façon absolue, les unes des autres, pour en fixer la notation d'une manière dépourvue d'ambiguïté [3]).

C'est pour ces raisons que M. E. Borel a proposé, dans l'étude des ensembles mesurables B, de se borner à la considération toujours d'***un corps ouvert*** d'ensembles mesurables B: l'illustre auteur a donné ce nom à une collection d'ensembles mesurables B qui correspondent aux nombres transfinis inférieurs à un nombre transfini fixé d'avance, donc telle qu'elle puisse sûrement être étendue par la répétition des opérations fondamentales. A cette conception M. E. Borel oppose celle du ***corps fermé***, c'est-à-dire ne pouvant plus être étendu par la répétition des mêmes opérations, cette dernière étant considérée comme vague et illégitime [4]).

C'est cette forme du *paradoxe du transfini* qui nous a forcé d'éviter la notion si délicate du *nombre transfini.* Il est vrai que

[1]) *Voir* E. Borel: *Les «Paradoxes» de la théorie des ensembles* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* 1908).

[2]) *Voir* E. Borel: *L'infini mathématique et la réalité* (*Revue de Mois,* 10 juillet 1914).

[3]) *Voir* E. Borel: *La philosophie mathématique et l'infini* (*Revue de Mois,* août 1912).

[4]) *Voir*: *Leçons sur la théorie des fonctions,* 2ième éd., Note VI, pp. 235 236.

nous étions obligés, dans ce qui précède, d'avoir recours aux ensembles *bien ordonnés* (toujours formés de points rationnels, leur rang étant conforme à la direction positive de la droite), mais l'existence de tels ensembles *particuliers* nous paraît hors de doute, étant simplement *un fait mathématique* suffisamment primitif pour qu'une explication en soit au moins inutile. Il en est tout autrement dans le cas de la notion de *nombre transfini*: cette dernière nous paraît toute secondaire, étant dérivée (peut-être de manière difficile à préciser) de l'image si parfaitement claire que nous nous faisons (ou croyons nous faire) d'un ensemble bien ordonné de points rationnels. Mais alors il faut bien entendu expliquer le *transfini.*

32. Néanmoins, la nécessité mathématique d'avoir les propriétés générales communes à *tous* les ensembles mesurables B s'impose immédiatement. Si l'on a donné une totalité à définition finie d'êtres quelconques, on obtient les propriétés communes à tous ces êtres *par l'analyse directe*, de la définition même (supposée finie) de la totalité proposée. Un exemple parfait de cette manière de procéder est le cas de la totalité des fonctions de classe 1 de M. R. Baire. Mais comment doit-on procéder dans le cas d'une totalité privée d'une définition finie? Et, tout d'abord, comment donc sont possibles de telles propriétés?

Lorsqu'on essait de raisonner sur une totalité imparfaite privée d'une définition finie à la manière d'une totalité à définition finie, on ne peut faire que des raisonnements généraux ou symboliques, dans lesquels la totalité considérée est représentée par un symbole unique. De tels raisonnements, en tant que raisonnement généraux, sont admissibles du moment qu'ils sont exempts de contradiction, mais ils sont en même temps vides de tout contenu précis [1]). Pour pouvoir leur donner un contenu, il faudrait préciser la désignation uniforme des éléments de la totalité, et c'est précisement ce qui est impossible. La théorie des totalités, privées d'une définition finie se réduit forcément à une sorte d'*algèbre logique* dont les symboles ne recouvrent aucune réalité accessible, les divers mathématiciens ne pouvant être assurés qu'ils sont d'accord sur cette réalité, puis-

[1]) *Voir* E. Borel *Sur les principes de la théorie des ensembles.* (*IV Congrès international des Mathématiciens*, Rome 1908).

qu'ils n'en ont pas une représentation commune [1]). Cette manière de procéder est évidemment admissible, en ce sens que l'on a toujours le droit de créer un vocabulaire et de construire avec ce vocabulaire un édifice logique; mais cette manière de procéder est stérile au point de vue des découvertes de faits nouveaux qui seuls font avancer notre science. On ne doit donc pas se faire d'illusion sur la véritable valeur de ces raisonnements symboliques [2]).

C'est pour ces raisons qu'on a préféré suivre, avec un succès incontestable, une voie différente. Si l'on ne limite pas les Mathématiques à l'étude d'une classe spéciale d'ensembles mesurables B provenant des fonctions de classe finie de M. R. Baire (ce qui suffit pour la plupart des applications), la méthode est la même et consiste toujours à déduire les ensembles nouveaux d'ensembles déjà définis; seulement, au lieu de partir des intervalles et de suivre la construction de proche en proche, on suppose que la construction a été faite jusqu'à un certain point et *possède certaines propriétés*, et l'on démontre que *ces propriétés subsistent lorsqu'on avance d'un pas nouveau*. Cette manière de procéder est infaillible au point de vue logique et, ce qui est plus important encore, elle est irréprochable à l'égard de la réalité mathématique. D'ailleurs, elle est fructuense: la plupart des propriétés précieuses (*mesure, catégorie*) communes à tous les ensembles mesurables B sont dues à cette méthode. La position de cette méthode est donc théoriquement très forte [3]).

Pratiquement elle l'est beaucoup moins. Il suffit d'indiquer que cette façon de procéder a conduit une fois même à la *perte* d'une telle propriété commune à tous les ensembles non dénombrables mesurables B: la propriété d'avoir la *puissance du continu*. Comme cette circonstance est peut être peu connue, il nous semble qu'il y aura quelque intérêt a insister sur ce point.

On trouve dans le travail si mémorable de M. H. Lebesgue (*Sur les fonctions représentables analytiquement*) [4]) beaucoup de propriétés fondamentales communes à tous les ensembles non dénom-

[1]) *Sur les principes de la théorie des ensembles*, loc. cit.

[2]) *L' Infini mathématique et la réalité*, loc. cit.

[3]) Cf. E. Borel: *Le calcul des intégralei définies* (*Journal de Jordan*, 1912), p. 183.

[4]) *Journal de Jordan*, 1905.

brables mesurables B. Toutes ces propriétés l'illustre auteur avait obtenues par l'application uniforme de la méthode précédente: on les vérifie pour les intervalles, et l'on démontre qu'elles sont invariantes à l'égard des deux opérations fondamentales (addition, partie commune). Mais, parmi ces propriétés, on ne rencontre pas la propriété importante qui établit l'existence d'un ensemble *parfait* de points dans chaque ensemble non dénombrable mesurable B. C'est cette propriété qui a été découverte pour la première fois par MM. Alexandroff et Hausdorff dix ans après l'apparition du Mémoire de M. H. Lebesgue.

C'est là le point capital: toutes les propriétés déduites par M. H. Lebesgue sont *inductives*, et la propriété trouvée par M. M. Alexandroff et Hausdorff n'est pas de cette nature: cette propriété n'est plus invariante relativement à la deuxième opération fondamentale (partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles) et, par suite, ne peut être obtenue par cette méthode [1]). *L'absence de cette propriété dans le Mémoire de M. H. Lebesgue* s'explique ainsi tout naturellement et était inévitable.

C'est là un fait fort important: il y a des propriétés non-inductives communes à tous les ensembles mesurables B. Mais comment donc peut-il exister de telles propriétés?

33. La réponse nous semble s'imposer: il existe une définition toute finie de la totalité des ensembles mesurables B d'après laquelle cette totalité devient une totalité légitime (à définition finie). C'est à cette définitiou finie qu'on doit l'existence des propriétés non-inductives des ensembles mesurables B. La connaissance de cette définition suffit pour avoir toutes les propriétés, inductives et non inductives, des ensembles mesurables B.

Pour légitimer cette affirmation, il nous suffira de transformer effectivement la totalité constructive des ensembles mesurables B en une totalité à définition finie. Et, pour écarter tout cercle vicieux, nous suivons le mode d'exposition que voici: *nous ne chercherons pas à concevoir en soi l'ensemble mesurable B le plus général* ni même à définir une notion correspondante. Tout au contraire nous commencerons par ne séparer jamais la notion générale d'ensemble me-

[1]) Or, il existe une propriété inductive (invariante relativement à deux opérations fondamentales) qui entraine la propriété de MM. Alexandroff et Hausdorff: voir W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae t. V (1924), p. 166—171.

surable B de la notion plus concrète de *propriété inductive* et nous finirons par arriver à une propriété inductive *particulière* telle que *chaque* ensemble de points la possédant puisse être déduit des intervalles au moyen des opérations fondamentales (addition, partie commune) indéfiniment répétées.

Tous cela étant accompli sans faire intervenir aucun nombre transfini; *par définition même* sera *mesurable* B tout ensemble de points qui possède cette propriété particulière.

C'est cette propriété qui légitime la totalité des ensembles mesurables B si mal conçue au point de vue purement constructif.

VIII. Première propriété inductive: analycité.

34. Nous appellerons *inductive* toute propriété P qui appartient à tous les parallélépipèdes (rectangles, intervalles) et qui est invariante relativement aux deux opérations fondamentales: faire la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, prendre la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles.

Par définition de l'adjectif *mesurable* B, chaque propriété inductive appartient nécessairement à *tous* les ensembles „mesurables B", mais elle peut bien appartenir à beaucoup d'„autres" ensembles.

Ces définitions étant posées, il importe de considérer la propriété des ensembles de points qui consiste en ce: *tel ensemble a un crible.*

Nous allons démontrer une proposition très importante relative à cette propriété:

Théorème. *La propriété: avoir un crible, est une propriété inductive.*

Pour faciliter les raisonnements, nous, partons de l'identité de la famille des ensembles criblés avec la famille des ensembles analytiques.

D'abord, tout parallélépipède fermé $\triangle$ situé dans l'espace à m dimensions est un ensemble analytique [1]): il suffit de prendre une courbe peanienne $x_1=f_1(t)$. $x_2=f_2(t),\ldots, x_m=f_m(t)$ remplissant $\triangle$, les fonctions f étant *continues* dans l'intervalle $(0<t<1)$.

Ceci étant établi, considérons la première des opérations: *somme.*

Soient $E_1, E_2,\ldots$ les ensembles analytiques dans l'espace à m dimensions. Par définition même d'ensemble analytique, E_n est le

[1]) Lemme 1 de Souslin: «*Tout intervalle (a, b) est un ensemble (A)*».

lieu des positions successives d'un point mobile $M(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ dont les coordonnées sont de la forme

$$x_1=f_1^{(n)}(t_n),\ x_2=f_2^{(n)}(t_n),\ldots,\ x_m=f_m^{(n)}(t_n),$$

les fonctions $f^{(n)}$ étant continues dans l'intervalle $0<t_n<1$ sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable.

Prenons un paramètre nouveaux τ et divisons son intervalle $0<\tau<1$ en une infinité dénombrable d'intervalles par les points $\frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$. Si nous faisons transformer l'intervalle $(0<t_n<1)$ en l'intervalle $(\frac{1}{n+1}<\tau<\frac{1}{n})$ par une substitution *linéaire*, nous obtiendrons un système de m fonctions nouvelles du paramètre τ

$$x_1=f_1(\tau),\ x_2=f_2(\tau),\ldots,\ x_m=f_m(\tau)$$

définies dans l'intervalle $(0<\tau<1)$ *sauf aux points* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$ et discontinues seulement en une infinité dénombrable de points.

Pour avoir les fonctions f définies *partout* dans l'intervalle $(0<\tau<1)$, il suffit évidemment d'établir une correspondance univoque et réciproque entre les milieux des intervalles $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, et la réunion de ces milieux et des points $\frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ldots$: en assignant aux fonctions f_i en tout point de cette réunion des valeurs respectivement égales aux valeurs de ces fonctions en un milieu correspondant, nous obtiendrons manifestement les fonctions f_i définies partout dans l'intervalle $(0<\tau<1)$. Comme ces fonctions f_i sont discontinues seulement en une infinité dénombrable de points, le lieu du point mobile $M(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ dont les coordonnées sont

$$x_1=f_1(\tau),\ x_2=f_2(\tau),\ldots,\ x_m=f_m(\tau)$$

est un ensemble *analytique* [1]). D'ailleurs, il est clair qu'il coïncide avec la réunion des ensembles analytiques donnés $E_1, E_2,\ldots$

Il ne reste qu'à considérer la seconde des opérations fondamentales: *partie commune.*

Comme tout ensemble fini ou dénombrable est évidemment un ensemble criblé, tout revient à considérer le cas d'une partie commune *non dénombrable.*

D'ailleurs, comme nous avons dit précédemment (nn° 13, 23), nous pouvons supposer les fonctions

$$x_1=f_1^{(n)}(t_n),\ x_2=f_2^{(n)}(t_n),\ldots\ x_m=f_m^{(n)}(t_n)$$

[1]) Lemme 2 de Souslin: «*Soit $E_1, E_2,\ldots$ une infinité énumérable d'ensembles (A), leur ensemble-somme $E=E_1+E_2+\ldots$ est un ensemble (A)*».

qui servent à la définition de l'ensemble analytique E_n, discontinues seulement aux points *rationnels* de l'intervalle $(0<t_n<1)$.

Cela posé, prenons un point *irrationnel* quelconque t_n de l'intervalle $(0<t_n<1)$; soit

$$t_n=(\alpha_{n,1},\ \alpha_{n,2},\ldots,\ \alpha_{n,\nu}\ldots)$$

son développement en fraction continue, les nombres $\alpha_{n\nu}$ étant des entiers positifs. Nous savons, d'une infinité de manières, ranger les termes du tableau à double entrée

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1}\ \alpha_{1,2}\cdots \\ \alpha_{2,1}\ \alpha_{2,2}\cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

dans une suite simple $\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\ \beta_k,\ldots$. Choisissons un procédé déterminé (d'ailleurs quelconque) pour opérer cette transformation; nous poserons

$$t=(\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\ \beta_k,\ldots)$$

et nous ferons correspondre le point irrationnel t situé dans le domaine nouveau $(0<t<1)$ à la suite illimitée des points irrationnels $t_1,\ t_2,\ldots$ situés respectivement dans les intervalles $(0<t_1<1)$, $(0<t_2<1),\ldots$

Il est clair que la connaissance de cette suite $t_1,\ t_2,\ldots$ détermine t d'une manière unique, et que, réciproquement, la connaissance de t détermine, d'une manière unique, la suite $t_1,\ t_2,\ldots$ Nous pouvons donc écrire

$$t_1=\varphi_1(t),\ t_2=\varphi_2(t),\ldots,\ t_n=\varphi_n(t),\ldots,$$

où, quel que soit un untier positif n, la fonction $\varphi_n(t)$ est définie pour chaque nombre *irrationel* du domaine $(0<t<1)$; pour t *rationel*, φ_n n'a aucun sens. Si nous désignons par $\mathfrak{J}$ l'ensemble des points irrationnels du domaine $(0<t<1)$, nous pouvons remarquer que *la fonction $\varphi_n(t)$ est continue en tout point t_0 de $\mathfrak{J}$ relativement à l'ensemble $\mathfrak{J}$*. Il en résulte que la fonction composée

$$\psi_i^{(n)}(t)=f_i^{(n)}[\varphi_n(t)]$$

est encore continue en tout point t_0 de $\mathfrak{J}$ relativement à $\mathfrak{J}$.

Cela posé, considérons les m suites illimitées des égalités simultanées

$$\begin{array}{l}
\psi_1^{(1)}(t)=\psi_1^{(2)}(t)=\psi_1^{(3)}(t)=\ldots=\psi_1^{(n)}(t)=\ldots \\
\psi_2^{(1)}(t)=\psi_2^{(2)}(t)=\psi_2^{(3)}(t)=\ldots=\psi_2^{(n)}(t)=\ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\psi_m^{(1)}(t)=\psi_m^{(2)}(t)=\psi_m^{(3)}(t)=\ldots=\psi_m^{(n)}(t)=\ldots
\end{array}$$

et désignons par H l'ensemble des points t de $\mathfrak{J}$ qui vérifient toutes ces égalités.

D'après la continuité relative des fonctions $\psi_i^{(n)}$ on voit bien que cet ensemble H est fermé relativement à $\mathfrak{J}$; d'ailleurs, H est contenu dans $\mathfrak{J}$.

On conclut de là immédiatement que, parmi les points limites de H, ce sont les points limites *rationnels* seuls qui n'appartiennent pas à H. Donc, l'ensemble H ne diffère d'un ensemble fermé au sens *ordinaire (absolu)* sur le segment $(0\leqslant t\leqslant 1)$ que d'un ensemble au plus dénombrable des points supplémentaires. Enfin, comme la partie commune à $E_1,\ E_2,\ldots$ est non dénombrable, l'ensemble H l'est aussi.

Dans ces conditions, l'ensemble H admet évidemment une application effective sur le continu $(0<\tau<1)$ au moyen d'une fonction

$$t=\omega(\tau)$$

définie sur l'intervalle $(0<\tau<1)$ et discontinue seulement en points rationnels de cet intervalle [1]).

Cela posé, considérons un système de m fonctions composées $f_1,\ f_2,\ldots,\ f_m$ de τ définies par les égalités

$$f_1(\tau)=\psi^{(1)}[\omega(\tau)],\ f_2(\tau)=\psi^{(2)}[\omega(\tau)],\ \ldots,\ f_m(\tau)=\psi^{(m)}[\omega(\tau)].$$

Il résulte de la continuité des fonctions ψ et ω en tout point irrationnel, que les fonctions f sont discontinues seulement aux poits *rationnels*. Donc, le lieu du point mobile $M(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m)$ dont les coordonnées sont

$$x_1=f_1(\tau),\ x_2=f_2(\tau),\ldots,\ x_m=f_m(\tau)$$

est un ensemble *analytique*; nous le désignons par E.

[1]) Pour effectuer cette application, il suffit de faire une modification insignifiante dans la démonstration du théorème connu: *Tout ensemble parfait linéaire a la puissance du continu*, donnée par M. E. Borel. *Voir* ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, pp. 14–16.

Le procédé que nous venons d'employer pour déterminer l'ensemble E nous indique que E est formé des points qui appartiennent à *tous* les ensembles analytiques donnés $E_1, E_2, \dots$ et qui correspondent aux valeurs *irrationnelles* de *tous* les paramètres représentants $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ Par conséquent, l'ensemble E ne diffère de la partie commune à tous les ensembles $E_1, E_2 \dots$ que par des points supplémentaires qui correspondent éventuellement aux valeurs *rationnelles* des paramètres $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$; mais alors ces points supplémentaires sont au plus *en infinité dénombrable.* Donc, la partie commune considérée, étant la réunion d'un ensemble analytique, donc criblé, et d'un ensemble dénombrable de points, est elle-même un ensemble criblé, donc analytique [1]. c. q. f. d.

Applications.

35 **Application à la puissance d'un ensemble mesurable B.** — Une des conséquences importantes de la proposition précédente, c'est que

Tout ensemble mesurable B est un ensemble criblé, donc analytique [2].

Mais nous avons vu précédemment (nº 25) que chaque ensemble, analytique est ou bien fini, ou bien dénombrable, ou bien contient un ensemble parfait. Il en résulte que

Tout ensemble mesurable B non dénombrable contient un ensemble parfait, donc a la puissance du continu.

On obtient ainsi la proposition de MM. Alexandroff -- Hausdorff.

Il est aisé de voir que la propriété d'ensembles de points dont il s'agit dans cette proposition est une propriété non inductive.

En effet, désignons, d'une manière générale, par P_0 la propriété suivante d'ensembles de points: *quel que soit un ensemble parfait π, si l'ensemble E possède sur π une infinité non dénombrable de points, il possède sur π un ensemble parfait E_1 de points.*

Tout ensemble analytique E admet sûrement cette propriété P_0, puisque la partie commune à E et π, étant un ensemble analytique (nº 34) et non dénombrable, par hypothèse, doit contenir nécessairement un ensemble parfait E_1.

[1] Lemme 3 de Souslin: «*Soit $E_1, E_2, \dots$ une infinité énumérable d'ensembles (A), leur partie commune $E = E_1 \cdot E_2 \dots$ est un ensemble (A)*».

[2] Théorème 1 de Souslin: «*Tout ensemble mesurable B est un ensemble (A)*».

Or, en reprenant les déductions des idéalistes basées sur l'hypothèse du continu (c'est-à-dire une énumération des points du continu au moyen des nombres transfinis de seconde classe), on forme sans aucune difficulté une suite d'ensembles $E_1, E_2, \dots$ qui possèdent tous la propriété P_0 sans que leur partie commune la possède, bien qu'elle soit non dénombrable [1].

36. *Application aux projections d'ensembles.* — Nous avons défini un *ensemble analytique* comme le lieu d'un point mobile $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dont les coordonnées vérifient les égalités

$$x_1 = f_1(t), \; x_2 = f_2(t), \dots, \; x_m = f_m(t);$$

où les fonctions f sont discontinues seulement en une infinite dénombrable de points

La définition proposée d'ensemble analytique nous oblige à justifier cette dénomination en prouvant qu'*elle est indépendante du système choisi $S(x_1, x_2, \dots, x_m)$ de coordonnées.*

Pour le démontrer, changeons le système de coordonnées, en prenant un second système de référence $S'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$. Les formules de transformation de coordonnées sont des relations bien connues qui expriment les coordonnées nouvelles $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ en fonction des coordonnées anciennes $x_1, x_2, \dots, x_m$ (et inversement); comme ces relations sont *linéaires* par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_m$ et ont des coefficients constants, les coordonnées nouvelles $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ sont des fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points de l'intervalle $(0 < t < 1)$. Donc, *le fait de l'analycité d'un ensemble de point est le même dans tous les systèmes de coordonnées cartésiennes.*

[1] D'après une remarque de M. Sierpiński, il suffirait pour notre but de prendre au lieu de la propriété P_0 la propriété P_1 d'ensembles de points, définie comme il suit. Un ensemble E jouit de la propriété P_1, s'il est dénombrable ou bien s'il contient un sous-ensemble parfait.

En s'appuyant sur l'axiome de M. Zermelo (sans admettre l'hypothèse du continu) on démontre sans peine que la partie commune de deux ensembles jouissant de la propriéte P_1, ne jouit pas nécessairement de cette propriété. En effet, de l'axiome de M. Zermelo résulte l'existence dans l'intervalle $(0, 1)$ d'un ensemble E non dénombrable et ne contenant aucun sous-ensemble parfait. Or, désignons par M l'ensemble de tous les nombres réels > 1 et par N l'ensemble de tous les nombres réels < 0, et posons $E_1 = E + M$, $E_2 = E + N$. On voit sans peine que les ensembles E_1 et E_2 possèdent la propriété P_1 sans que leur partie commune (qui est évidemment l'ensemble E) la possède. La propriété P_1 est donc non inductive.

Cela posé, prenons, dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ à m dimensions, un ensemble *analytique* E et projetons-le orthogonalement sur un espace euclidien $\mathcal{E}'$ à m' dimensions, $1 \leqslant m' < m$, pris arbitrairement dans l'espace donné $\mathcal{E}$. Comme l'analycité de E ne dépend nullement du système choisi $S(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de coordonnées, nous pouvons prendre, dans l'espace $\mathcal{E}'$, un système d'axes rectangulaires $S(x_1, x_2 \ldots, x_m)$ tel que les axes des $x_1, x_2, \ldots, x_{m'}$ appartiennent à l'espace $\mathcal{E}'$; ces axes forment pour l'espace $\mathcal{E}'$, un système de référence; désignons le par $S'(x_1, x_2, \ldots, x_{m'})$. Dans ces conditions, la projection orthogonale p^0 d'un point $P^0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$, pris arbitrairement dans $\mathcal{E}$, sur l'espace $\mathcal{E}'$ a pour coordonnées relatives à S' respectivement les nombres $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m'}^0$. Il suit de là que quel que soit l'ensemble analytique E

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_{m'} = f_{m'}(t), \ldots,\ x_m = f_m(t)$$

situé dans l'espace $\mathcal{E}$, la projection orthogonale de E sur l'espace $\mathcal{E}'$ est un ensemble des points de $\mathcal{E}'$ dont les coordonnées sont de la forme

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_{m'} = f_{m'}(t).$$

On voit bien que c'est un ensemble analytique.

Ainsi:

La projection orthogonale d'un ensemble analytique de points dans l'espace euclidien à m dimensions sur un espace euclidien à m' dimensions, $m' < m$, est un ensemble analytique [1].

Comme les ensembles mesurables B sont tous des ensembles analytiques, nous pouvons dire en particulier que:

La projection orthogonale d'un ensemble mesurable B est toujours un ensemble analytique.

Ce théorème est très important, parce qu'il nous montre qu'on n'obtient que des *ensembles analytiques* en projetant les ensembles *élémentaires* qui sont tous mesurables B (n° 18). Et comme, d'autre part, *chaque* ensemble analytique peut être obtenu en faisant projeter un ensemble élémentaire convenablement déterminé (n° 24), nous avons ainsi *trois* méthodes rigoureusement équivalentes pour définir les ensembles analytiques:

[1]) Théorème de Souslin: «*Si E est un ensemble (A), sa projection l'est aussi*».

1° *faire cribler au moyen d'un crible général*;
2° *écrire les équations paramétriques* $x_i = f_i(t)$;
3° *projeter les ensembles élémentaires.*

37. Application aux fonctions. — Nous avons défini un ensemble analytique au moyen des équations paramétriques

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t),$$

où f_i sont discontinues seulement en une infinité dénombrable de points du domaine $(0 < t < 1)$.

Dans ces conditions, les fonctions f_i sont des fonctions *de classe 1* de la classification de M. R. Baire [1]).

Il est naturel maintenant de chercher à étendre à des classes *supérieures* de M. Baire la définition que nous venons de donner.

Nous considérons un système de m fonctions *arbitraires* de la classification de M. Baire $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)$ définies dans l'intervalle $(0 < t < 1)$ et nous désignons par E le lieu des positions successives du point mobile $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dont les coordonnées vérifient les équations

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t).$$

Il s'agit de reconnaître la nature de l'ensemble E.

Prenons, dans ce but, un espace euclidien $\mathcal{E}'$ à $m+1$ dimensions contenant l'espace $\mathcal{E}$ à m dimensions. Soit $S'(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ un système d'axes rectangulaires dans l'espace $\mathcal{E}'$ renfermant le système de référence $S(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ pris dans l'espace $\mathcal{E}$; l'axe des t est donc une droite menée par l'origine O du système S et perpendiculaire à l'espace $\mathcal{E}$.

Cela posé, considérons la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ de $m+1$ variables définie par l'égalité

$$F = [x_1 - f_1(t)]^2 + [x_2 - f_2(t)]^2 + \ldots + [x_m - f_m(t)]^2.$$

Comme les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ appartiennent à la classification de M. Baire, la fonction F en fait également partie. Donc, la fonction F est *représentable analytiquement*. Or, un théorème bien connu de M. H. Lebesgue nous apprend que l'ensemble des points de l'espace dans lesquels une fonction représentable analytiquement est égale à 0 est nécessairement un ensemble *mesurable B* [2]). Donc,

[1]) *Voir* E. Borel: *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 100.
[2]) *Sur les fonctions représentables analytiquement*, p. 156.

l'ensemble des points $N(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ *dans l'espace à* $m+1$ *dimensions* $\mathcal{E}'$ dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ vérifient les équations

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t)$$

est un ensemble mesurable B.

Il s'en suit que la projection orthogonale de cet ensemble sur l'espace euclidien $\mathcal{E}$ à m dimensions est un ensemble *analytique*. Or, cette projection n'est autre chose que le lieu, dans l'espace $\mathcal{E}$, du point mobile $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dont les coordonnées peuvent se mettre sous la forme paramétrique

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t).$$

Nous sommes ainsi amenés à la proposition suivante:

On n'élargit nullement la définition des ensembles analytiques en considérant le lieu des positions que prend successivement un point mobile dont les coordonnées sont des fonctions arbitraires du paramètre représentant qui appartiennent à la classification de M. R. Baire [1]).

IX — Seconde propriété inductive: unicité.

38. **Les ensembles d'unicité.** — Revenons donc à la définition des ensembles analytiques primitivement donnée. Soit E un ensemble analytique dans l'espace $\mathcal{E}$ à m dimensions donné par les équations paramétriques

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t),$$

les fonctions f étant *discontinues seulement en une infinité dénombrable de points.*

Il résulte de la définition même que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point quelconque $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ pris dans l'espace $\mathcal{E}$ appartienne à l'ensemble analytique E est qu'il y ait *au moins une* racine t^0 commune aux équations

$$x_1^0 = f_1(t),\ x_2^0 = f_2(t), \ldots,\ x_m^0 = f_m(t).$$

[1]) Théorème III de ma Note (1917): «*L'ensemble des valeurs de toute fonction $f(x)$ qui rentre dans la classification de M. Baire est un ensemble* (A)».

Or, dans le cas général, ces équations admettent *plusieurs* racines communes; c'est un cas compliqué.

C'est la raison pour laquelle il est naturel de soumettre d'abord à l'analyse attentive le cas *le plus simple* où les équations précédentes n'ont qu'*une et une seule* racine commune *quel que soit le poit* $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ *appartenant à l'ensemble analytique* E. Dans ce cas à chaque point M^0 de E correspond une valeur *unique* t^0 dans l'intervalle $(0<t<1)$.

Nous sommes ainsi amenés à proposer la definition suivante:

Si les fonctions $x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), \ldots, x_m = f_m(t)$ *discontinues seulement en une infinité dénombrable de points de l'intervalle* $(0<t<1)$ *qui déterminent un ensemble analytique* E *sont telles qu'à deux valeurs* différentes *du paramètre variable* t *correspondent deux points* distincts *de* E, *l'ensemble* E *est dit* e n s e m b l e d ' u n i c i t é.

D'après cette définition, on voit bien que tout ensemble d'unicité n'est autre chose qu'un ensemble analytique de forme *peut-être* très particulière.

Pour préciser la particularite des ensembles d'unicité, nous faisons d'abord observer qu'aucun ensemble fini ou dénombrable ne peut pas être un ensemble d'unicité. En effet, les équations paramétriques $x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), \ldots, x_m = f_m(t)$ qui servent à définir la *notion* d'ensemble d'unicité E réalisent évidemment une correspondance *univoque* et *réciproque* entre les points de E et de l'intervalle $(0<t<1)$ de manière qu'à tout nombre t de l'intervalle $(0<t<1)$ correspond un point M de E et un seul, et réciproquement à chaque point M de E correspond le seul nombre t de cet intervalle. Ainsi nous avons une *application de* E *sur le continu* effectuée au moyen du système de m fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points.

Donc,

Tout ensemble d'unicité a effectivement la puissance du continu.

Pour examiner la nature d'un ensemble d'unicité, nous allons démontrer cette proposition importante:

Théorème. — *La propriété des ensembles de points: être un ensemble fini, ou bien dénombrable, ou bien un ensemble d'unicité est une propriété* i n d u c t i v e.

Tout d'abord, *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles d'unicité n'ayant aucun point commun deux à deux est un ensemble d'unicité.*

Pour le voir, il suffit d'observer que la démonstration précédemment donnée (nº 34) dans le cas des ensembles analytiques s'applique sans aucun changement au cas des ensembles d'unicité, puisque si le système de m équations paramétriques

$$x_1^0 = f_1^{(n)}(t_n),\; x_2^0 = f_2^{(n)}(t_n), \ldots,\; x_m^0 = f_m^{(n)}(t_n)$$

n'admet qu'une et une seule racine commune t_n^0, quel que soit l'entier positif n, le système résultant

$$x_1^0 = f_1(\tau),\; x_2^0 = f_2(\tau), \ldots,\; x_m^0 = f_m(\tau)$$

n'admet de même qu'une et une seule racine commune τ^0.

Puis, *la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles d'unicité, si elle n'est ni un ensemble fini, ni un ensemble dénombrable, est encore un ensemble d'unicité.*

Pour le voir, il suffit de faire la même observation (voir nº 34).

Il ne reste donc qu'à démontrer que *tout parallélépipède fermé P à m dimensions est un ensemble d'unicité.*

Pour le voir, il est nécessaire de prendre une précaution puisque le raisonnement précédent (nº 34) ne s'applique plus: toute courbe peanienne remplissant P admet sûrement des points *multiples.*

Prenons donc le parallélépipède P. Comme il existe, pour tout couple de parallélépipèdes à m dimensions P et P', une transformation T

$$x_1' = \omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots,\; x_m' = \omega_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

linéaire par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui transforme P en P', on voit bien qu'il suffit de démontrer la proposition énoncée pour le cube fondamental K:

$$(0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\; 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \ldots,\; 0 \leqslant x_m \leqslant 1)$$

Cela posé, fixons parmi les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_m$, quelques-unes d'entre elles [1]) en les prenant égales à des nombres *rationnels* également fixes, arbitrairement choisis entre 0 et 1, et faisons varier les autres en leur donnant respectivement toutes les valeurs *irrationnelles* comprises entre 0 et 1; nous obtenons ainsi un ensemble de points qui constitue une partie bien déterminée du cube K; désignons-là par K'.

[1]) le nombre de lettres fixées pouvant être 0.

Nous pouvons maintenant affirmer que K' est *un ensemble d'unicité.*

En effet, en reprenant le raisonnement précédemment donné (nº 34) pour le cas de „l'espace à une infinité de dimensions" (il s'agit là d'une infinité des paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_n \ldots$ qui varient les uns indépendamment des autres dans l'ensemble des nombres irrationnels $\mathcal{J}$, et de leur représentation par une suite des fonctions d'*une* variable t: $t_1 = \varphi_1(t),\; t_2 = \varphi_2(t), \ldots, t_n = \varphi_n(t), \ldots$), nous constatons que K' est un ensemble homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{J}$ des points irrationnels de l'intervalle $(0 < t < 1)$, donc K' est un ensemble d'unicité.

Cela posé, revenons au cube fondamental K. Nous avons déjà vu que l'ensemble considéré K' fait partie du cube K et qu'il est parfaitement déterminé par le choix, parmi les lettres $x_1, x_2, \ldots x_m$, des lettres *fixes* et par choix de leurs valeurs *rationnelles.* Comme ces choix sont en infinité dénombrable et comme aux choix différents correspondent des K' sans points communs deux à deux, nous pouvons écrire

$$K = \Sigma K' + D,$$

où D est l'ensemble des points de K à coordonnées *toutes rationnelles.* Donc, D est dénombrable.

D'après le théorème du nº 34, on conclut de là que le cube fondamental est *un ensemble d'unicité.* c. q. f. d.

39. Il résulte de ce théorème que

Tout ensemble mesurable B est ou bien un ensemble fini, ou bien un ensemble dénombrable, ou bien un ensemble d'unicité [1]).

Mais un théorème bien plus remarquable et qui est relatif à la nature elle-même des ensembles mesurables B est le suivant:

Étant donné un système de m équations paramétriques à racine commune unique, on sait obtenir l'ensemble d'unicité E défini par ce système d'équations à partir de parallélépipèdes, *au moyen d'une série d'opérations fondamentales*: somme, partie commune, *énumérées au moyen des entiers positifs, dont l'énumération se déduit du système donné des équations paramétriques.*

Pour démontrer ce théorème important, il convient d'étudier d'abord quelques questions préliminaires.

[1]) Théorème IV de ma Note (1917): «*Pour qu'un ensemble (A) soit mesurable B, il faut et il suffit qu'il admette un système d'unicité*».

X. Séparabilité B.

40. **Ensembles bien arrangés.** — Tout d'abord, nous allons introduire quelques notions qui seront fort utiles dans ce qui suit.

Définition. — *La suite naturelle E des nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$ est dite* arrangée *si, par une loi quelconque, à chaque élément (n) de E correspond une partie finie ou infinie (ou vide) E_n de E constituée des éléments dits* „précédents“ *de (n), une précaution étant prise pour que les relations b „précède“ c et a „précède“ b entraînent a „précège c* [1].

Définition. — *La suite naturelle E des nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$ supposée arrangée est dite* bien arrangée *s'il n'existe aucune suite illimitée $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'éléments de E telle que, quel que soit un entier positif n, a_{n+1} „précède“ a_n.*

Ces définitions étant posées, nous allons démontrer la proposition suivante:

Théorème. — *On sait mettre toute suite naturelle E bien arrangée sous forme* bien ordonnée *E' de manière que, si, dans la suite E, (a) „précède“ (b) suivant une loi adoptée, (a) ait, dans l'ensemble bien ordonné E', un rang inférieur à (b).*

Pour démontrer cette proposition, il suffirait de s'en rapporter au deuxième raisonnement de M. Zermelo relatif à la possibilité de mettre tout ensemble sous forme bien ordonnée, ce raisonnement étant ici parfaitement correct, puisqu'il n'est nullement, dans le cas considéré, question de l'Axiome du Choix, mais qu'il s'agit ici de choix bien réalisés.

En effet, soit E_1 une partie *arbitraire* de la suite naturelle E. Comme cette dernière est bien arrangée, il y a bien de tels éléments de E_1 dont les „précédents“ (s'ils existent) n'appartiennent plus à E_1 et, parmi ces éléments de E_1, on trouve le premier dans E_1; soit e_1 cet élément de E_1. Par cette méthode on obtiendra bien, dans *chaque* partie E_1 de la suite E, un élément distingué e_1 de E_1 bien déterminé. La règle de choix est donc donnée.

Il résulte de la manière même de déterminer ce choix réalisé que, quelle que soit une partie E_1 de la suite naturelle E, aucun élément de E_1 n'est un „précédent“ d'un élément distingué e_1 de E_1.

Or, d'une manière générale l'ordination d'un ensemble M provenant du choix dans chaque son sous-ensemble M_1 d'un élément

[1]) On peut rapprocher cette notion à celle des ensembles *partiellement ordonnés* de M. F. Hausdorff: voir «Grundzüge der Mengenlehre», Leipzig 1914, p. 139.

distingué m_1, est telle que tout élément m de M est un élément distingué dans le sous-ensemble formé des éléments de M dont le rang est supérieur ou égal à m [1]).

Il résulte de là que l'ordination de E provenant de la règle indiquée de choix satisfait à l'énoncé du théorème proposé c. q. f. d.

41. Il y a un grave inconvénient dans ce raisonnement: c'est la nécessité de considérer une partie *arbitraire* E_1 de la suite naturelle E. Alors, le *premier* raisonnement de M. Zermelo est préférable, puisqu'il ne s'agit là que des parties de E énumérées au moyen des entiers positifs.

Appelons donc *chaîne* tout ensemble bien ordonné C formé d'éléments de E ayant la propriété suivante: quel que soit un élément e de la chaîne C, si l'on supprime de E tous les éléments de C dont le rang, dans C, est inférieur à e, parmi les éléments de E restants, le premier tel que tous ses „précédents“ (s'ils existent) ne soient plus des éléments restants, coïncide avec e.

Il est clair qu'il y a des *chaînes* puisque le premier élément de E qui n'a aucun des „précédents“ en constitue une. Il est évident que, étant données deux chaînes *différentes*, l'une est précisement un segment de l'autre. Il en résulte que, si C_0 est une chaîne telle qu'elle ne soit pas la plus grande chaîne, à C_0 correspond un nombre entier positif n_0 bien déterminé qui est un élément d'une plus grande chaîne C_1 immédiatement supérieur à tous les éléments de C_0. D'ailleurs, le réciproque encore a lieu: à chaque élément de E correspond une et une seule chaîne qui n'est la plus grande chaîne. On conclut de là immédiatement que la *totalité* des chaînes dont chacune n'est pas la plus grande existe effectivement puisque ce n'est qu'un ensemble énuméré au moyen des entiers positifs. Donc, il existe la réunion de toutes ces chaînes. Or, cette réunion augmentée, s'il le faut, d'un dernier élément restant de E n'est manifestement qu'une *la plus grande chaîne*. Il est évident que cette plus grande chaîne vérifie l'énoncé du théorème proposé. c. q. f. d.

42. **Ensemble séparables B.** — Nous allons tirer du théorème démontré des conséquences importantes. Il convient pour cela d'introduire d'abord une notion fort utile.

Définition. — *Nous dirons que deux ensembles de points E et E'*

[1]) *Voir* M. E. Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2ième édition, Note IV, n⁰ III. — *Le continu bien ordonné d'après M. Zermelo*, pp 148—149.

n'ayant aucun élément commun sont séparables B, *lorsqu'on sait déduire des définitions de E et de E' deux séries d'opérations fondamentales*: somme, partie commune *énumérées au moyen des entiers positifs qui permettent d'obtenir*, à partir des parallélépipèdes, *deux ensembles H et H' n'ayant aucun point commun et enfermant respectivement les ensembles E et E'*.

Cette notion étant acquise nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème. — *Deux ensembles analytiques n'ayant aucun point commun sont toujours séparables B.*

Considérons deux ensembles analytiques quelconques E et E', *linéaires* pour fixer les idées.

Soient C et C' deux cribles situés dans un carré fondamental dont les côtés ont pour équations

$$x=0,\ x=1;\ y=0,\ y=1$$

et au moyen desquels E et E' sont donnés.

Les cribles C et C' sont formés chacun d'une infinité dénombrable des segments fermés $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ et, respectivement, $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \ldots$ parallèles à l'axe horizontale. OX.

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer ces segments tels que les projections de deux segments quelconques sur l'axe OX ou bien sont emboîtées l'une dans l'autre, ou bien sont sans point intérieur commun. En effet, l'entier positif n étant donné, il suffit de partager les segments σ_n et σ'_n en un nombre fini de segments fermés au moyen des points dont les abscisses coïncident avec les extrémités des projections de $2n$ segments $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ et $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$: deux cribles nouveaux formés respectivement de ces parties de σ_n et de σ'_n, lorsque nous faisons varier n, satisfont évidemment à la condition énoncée [1]).

43. Cela posé, considérons tous les couples $[\sigma, \sigma']$ de segments fermés σ et σ' pris respectivement dans les cribles C et C' et dont les projections sur l'axe OX sont emboîtées l'une dans l'autre. Il est clair que ces couples sont en une infinité énumérable; nous pouvons donc les numéroter au moyen des entiers positifs. Soit

[1]) D'ailleurs, nous pouvons supposer que *les longueurs de σ_n et σ'_n tendent vers zéro lorsque n croît indefiniment.* En effet, il suffit *avant* le partage de σ_n et σ'_n que nous venons de décrire, de diviser σ_n et σ'_n en n parties égales et, en faisant varier n, de numéroter les segments fermés ainsi obtenus au moyen des entiers positifs. Il importe de remarquer que toutes ces transformations ne modifient nullement les cribles C et C' au point de vue *géométrique.*

$$[1],\ [2], \ldots\ [n], \ldots$$

leur suite le symbole $[n]$ désignant un couple $[\sigma, \sigma']$; nous y ajoutons le couple $[0]$ formé du côté $y=1$ répété deux fois du carré fondamental.

Cela posé, faisons la convention suivante de langage: nous conviendrons de dire que le couple $[n_1]=[\sigma_1, \sigma'_1]$ „précède" le couple $[n_2]=[\sigma_2, \sigma'_2]$, lorsque la projection de σ_1 est contenue dans celle de σ_2 et lorsque l'ordonnée de σ_1 est inférieure à celle de σ_2, et si nous avons les relations analogues entre σ'_1 et σ'_2.

Cette définition étant admise, il est clair que les conditions $[b]$ „précède" $[c]$ et $[a]$ „précède" $[b]$ entraînent $[a]$ „précède" $[c]$ Nous concluons de là que la suite

$$\text{(I)} \qquad [0],\ [1],\ [2], \ldots, [n], \ldots$$

est *arrangée.* De plus, cette suite est *bien arrangée*, car autrement nous aurions une suite illimitée $[a_1], [a_2], \ldots$ telle que $[a_{n+1}]$ „précède" $[a_n]$ quel que soit un entier n, ce qui est précisément impossible puisque les ensembles E et E' n'ont aucun point commun.

D'après le théorème précédent (n° 40), la suite (I) peut être mise effectivement sous forme *bien ordonnée* de manière que si $[a]$ „précède" $[b]$, le rang de $[a]$, dans cette forme bien ordonnée, soit inférieur à $[b]$. D'ailleurs, comme tout couple $[n]$, $n \leqslant 1$, „précède" le couple $[0]$, celui ci a, dans cette forme bien ordonnée, *un rang supérieur à tous les autres.*

Cela posé, nous prenons la fonction $\mu(x)$ définie précédemment (nn° 3, 10, 20) sur l'ensemble E au moyen du crible C; soit $\mu'(x)$ une fonction analogue définie sur E' au moyen du crible C'. Enfin, étant donné un couple $[\sigma, \sigma']$, désignons par $[e, e']$ un couple correspondant *formé de deux ensembles de points* et défini de la manière suivante: e est l'ensemble des points de E qui appartiennent à la projection de σ sur l'axe OX et pour lesquels $\mu(x)$ est *plus petite* que l'ordonnée de σ; e' est défini d'une manière analogue au moyen de E' et σ'.

Dans ces conditions, à chaque élément $[n]$ de l'ensemble bien ordonné, précédemment considéré, correspond un couple d'ensembles; nous avons donc un ensemble bien ordonné (II) des couples correspondants d'ensembles. D'ailleurs, parmi ces couples d'ensembles, il y a un qui a un rang le plus élevé: c'est évidemment le couple $[E, E']$ qui correspond à $[0]$.

44. Je dis maintenant que *chaque couple d'ensembles est séparable B.*

La chose est vraie pour le *premier* couple $[e, e']$ de l'ensemble bien ordonné (II).

En effet, soit $[\sigma, \sigma']$ le couple correspondant de segments. Comme ce couple est *le premier* dans l'ensemble bien ordonné des couples de segments, il n'existe aucun couple de segments qui le „précède". Cela posé considérons l'ensemble des segments τ du crible C tels que leurs projections soient contenues dans celle de σ et dont les ordonnées sont inférieures à celle de σ. Soit H la somme des projections de ces segments τ. Nous désignons par H' la somme analogue relative au crible C' et au segment σ'. Comme le couple $[\sigma, \sigma']$ n'a aucun couple qui le „précède", les ensembles H et H' n'ont aucun point commun sauf, peut-être, les extrémités des projections qui sont en infinité énumérable. Et comme les ensembles e et e' sont évidemment contenus respectivement dans H et H' (sauf, peut-être, *quatre* extrémités des projections de σ et de σ'), on voit bien que e et e' *sont séparables B*.

Supposons la proposition vraie pour tous les couples d'ensembles qui ont un rang inférieur à $[e, e']$ et étendons-la à $[e, e']$. Soit $[\sigma, \sigma']$ un couple correspondant de segments.

Désignons par τ un segment du crible C ayant la projection contenue dans la projection de σ et dont l'ordonnée est inférieure à celle de σ; de même, nous désignons par τ' un segment du crible C' ayant les propriétés analogues relativement à σ'. Soit η l'ensemble des points de E qui appartiennent à la projection de τ et dans lesquels $\mu(x)$ est plus petite que l'ordonnée de τ; soit η' l'ensemble des points de E' qui possèdent les propriétés analogues relativement à la projection de τ' et à la fonction $\mu'(x)$.

Je dis que η et η' sont *séparables B* et que *nous possédons les ensembles H et H' qui effectuent cette séparation.*

En effet, si les projections de τ et de τ' sont emboîtées l'une dans l'autre, le couple de segments $[\tau, \tau']$ sûrement „précède" le couple $[\sigma, \sigma']$: donc, dans ce cas, la séparation de η et η' est supposée. Si, au contraire, les projections de τ et de τ' n'ont aucun point commun (sauf éventuellement une extrémité), la séparation de η et η' se produit au moyen des projections mêmes de τ et τ'.

Je dis maintenant que *les ensembles η et e'* sont *séparables B* et que *nous connaissons les ensembles séparatifs.*

En effet, le segment τ étant fixe, faisons varier le segment τ' de toutes les manières possibles et prenons la partie commune à tous les ensembles H correspondants aux divers segments τ'. Soit h cette partie commune. Il est clair que l'ensemble h en contient aucun point de e' puisque chaque point de e' (sauf éventuellement les deux extrémités de la projection de σ') appartient évidemment à au moins un des ensembles η'.

Je dis enfin que e et e' sont *séparables B*. En effet, pour réaliser cette séparation, il suffit de former la somme S des ensembles h qui correspondent aux divers segments τ et d'ajouter, s'il le faut, les deux extrémités de la projection de σ: comme tout point de e ou bien est une extrémité de la projection de σ, ou bien appartient à un des ensembles η, on voit bien que l'ensemble-somme S renferme l'ensemble e et ne contient aucun point de e'. D'autre part, le segment τ étant fixe, si nous faisons la somme S' des ensembles H' correspondants aux divers segments τ' et si nous prenons la partie commune P aux sommes S' correspondantes aux segments τ possibles, nous obtenons manifestement un ensemble n'ayant aucun point commun avec S et contenant l'ensemble e' (sauf, peut-être, les extrémités de la projection de τ'). La séparation cherchée est donc effectuée. c. q. f. d.

Corollaire. *Si deux ensembles analytiques E et E' sont complémentaires*, on sait *déduire de la définition de E et E' leur construction au moyen des opérations: somme, partie commune, à partir des parallélépipèdes* [1]).

XI. Construction effective, à partir des parallélépipèdes, de tout ensemble d'unicité.

45. Nous pouvons maintenant aborder l'étude des ensembles d'unicité.

Théorème. — *Quel que soit un ensemble d'unicité E,* on sait *déduire de la définition de E sa construction au moyen des opérations: somme, partie commune, à partir de parallélépipèdes* [1]).

En effet, soit E un ensemble d'unicité situé dans l'espace euclidien à m dimensions et donné par les équations paramétriques

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t),$$

[1]) Théorème III de Souslin: «*Si l'ensemble E et son complémentaire CE sont tous les deux des ensembles (A), ils sont mesurables B*».

les fonctions f_i étant discontinues chacune seulement en une infinité dénombrable de points dans le domaine $(0<t<1)$. D'ailleurs, comme nous avons vu (nn[0] 13, 23), on peut toujours supposer, sans diminuer la généralité d'ensembles d'unicité, les fonctions f_i discontinues seulement aux points *rationnels* de $(0<t<1)$.

Prenons un nombre positif ε. Comme les fonctions f_i sont continues en chaque point irrationnel t, on peut déterminer, dans le domaine $(0<t<1)$, un ensemble réductible fermé ϱ_ε de points rationnels tel que les oscillations (totales) de toutes les fonctions f_i, dans chacun des intervalles contigus à ϱ_ε, soient inférieures à ε (n[0] 14).

Donnons à ε une suite de valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ décroissantes et tendant vers 0. On obtient une suite d'ensembles réductibles fermés correspondants $\varrho_{\varepsilon_1}, \varrho_{\varepsilon_2}, \ldots, \varrho_{\varepsilon_n}, \ldots$. Cela posé, nous prenons une suite d'ensembles réductibles nouveaux $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ déterminés par la relation de récurrence suivante: le premier ensemble R_1 coïncide avec l'ensemble réductible ϱ_{ε_1}, et l'ensemble R_{n-1} étant déterminé, on forme l'ensemble R_n en ajoutant à R_{n-1} l'ensemble ϱ_{ε_n} et en divisant *d'une manière régulière* (n[0] 14) chaque intervalle contigu à cette réunion.

On formera ainsi la suite infinie des ensembles

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$$

réductibles dans $(0<t<1)$, chacun contenu dans les suivants et tels que les oscillations (totales) des fonctions f_i dans tout intervalle contigu à R_n soient inférieures à ε_n. Il importe de remarquer que chacun des intervalles contigus à R_{n+1} est intérieur *au sens étroit* à un intervalle contigu à R_n de manière qu'ils n'aient aucune borne commune. On conclut de là immédiatement qu'il existe sûrement des points de l'intervalle $(0<t<1)$ communs à tous les intervalles *ouverts*

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

contigus respectivement aux ensembles $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, chacun intérieur au précédent.

Ces préliminaires terminés, nous allons revenir à l'ensemble d'unicité donné E. Soit n un nombre entier positif donné. Prenons

[1]) Théorème IV de ma Note (1917): «*Pour qu'un ensemble* (A) *soit mesurable* B, *il faut et il suffit qu'il admette un système d'unicité*».

l'ensemble réductible R_n et soient δ et δ' deux intervalles distincts quelconques contigus à R_n. Si nous faisons varier le paramètre t dans δ et puis dans δ', le système des équations paramétriques

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t), \ldots,\ x_m = f_m(t)$$

nous donne *deux ensembles analytiques* e *et* e' *qui n'ont aucun point commun*. Donc, nous pouvons en déduire deux ensembles H et H' qui séparent respectivement e et e'. Si nous fixons l'intervalle contigu δ et faisons varier l'intervalle contigu δ', toujours distinct de δ, nous obtenons une infinité énumérable d'ensembles H contenant e. Donc, la partie commune à tous ces H contient sûrement l'ensemble e; nous la désignons par h.

Il résulte évidemment de cette considération qu'à chaque intervalle δ contigu à R_n correspond un ensemble analytique *très petit* e et un ensemble h qui contient e. Comme les ensembles h qui correspondent aux δ distincts n'ont manifestement aucun point commun deux à deux, nous avons une séparation *simultanée* de tous les e au moyen des ensembles h. D'ailleurs, nous pouvons supposer les ensembles h également *très petits* puisque les oscillations (totales) des fonctions f_i dans δ étant inférieures à ε_n, l'ensemble e correspondant a un diamètre très petit.

Cela posé, désignons par S_n la somme de tous ces ensembles h en lui ajoutant une infinité énumérable de points de E qui correspondent aux points de l'ensemble réductible R_n.

Il est clair que l'ensemble d'unicité donné E est contenu dans S_n, quel que soit un entier positif n. Donc, la partie commune à tous les ensembles $S_1, S_2, \ldots$ contient sûrement E; désignons cette partie commune par P.

Je dis maintenant que P *coïncide avec* E. En effet, soit M un point de P. Il faut démontrer que M appartient à E.

La chose est manifeste si M appartient à un des ensembles énumérables supplémentaires que l'on ajoute aux sommes des ensembles h: dans ce cas, M est un point de E que l'on obtent en donnant à t une valeur qui appartient à un ensemble réductible R_n.

Supposons donc que M n'appartient à aucun de ces ensembles supplémentaires. Dans ce cas, le point M appartient à un et à un seul des ensembles h, quel que soit un entier positif n; soit δ_n un intervalle correspondant contigu à R_n.

Nous sommes ainsi amenés à posséder une suite illimitée d'intervalles ouverts

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$$

contigus respectivement aux ensembles $R_1, R_2, \ldots$ et tels que si nous faisons varier le paramètre t dans δ_n, le point M appartient sûrement à un ensemble h_n renfermant un ensemble analytique petit e_n qui correspond à δ_n.

Soit t_0 un point qui est commun à tous les $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ldots$ Comme les fonctions f_i sont *continues* en t_0 et comme le diamètre de h_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, il est manifeste qu'on obtient le point M en donnant à t la valeur t_0. Donc, M appartient à E. c. q. f. d.

46. **Notion d'ensemble mesurable** B. — Les considérations précédentes sont très importantes parce qu'elles nous montrent que, *si l'on fait abstraction des ensembles finis et des ensembles dénombrables*, il n'y a pas de différence essentielle entre les ensembles d'unicité et les ensembles dits *mesurables* B. Nous entrerons plus loin dans quelques détails sur la possibilité de concevoir d'„autres" ensembles; notre seul but, dans ce Chapitre, a été de préciser un peu la notion *d'ensemble mesurable* B.

Voici la conclusion à laquelle nous arrivons: nous sommes partis de la définition purement *constructive* d'un ensemble *mesurable* B et nous avons constaté que la notion qui se dégage de cette définition n'a point encore une netteté suffisante pour pouvoir figurer dans un raisonnement mathématique, puisque la totalité des ensembles ainsi définis n'est elle-même qu'une des formes du paradoxe du transfini. Alors nous avons entrepris la marche suivante: nous avons démontré que la propriété des ensembles de points: *être des ensembles d'unicité, ou dénombrables, ou finis* est une propriété *inductive*, donc telle que, dans *toute* construction *particulière* effectuée au moyen des deux opérations fondamentales lorsqu'on suit cette construction de proche en proche, chaque ensemble intermédiaire possède cette propriété, de même que l'ensemble final. C'est la raison pour laquelle il est assez naturel de regarder cette propriété comme appartenant à *tous* les ensembles *mesurables* B, ainsi que toute propriété inductive, d'ailleurs, bien que nous n'avons pas une *définition* de ces ensembles. D'autre part, nous avons démontré que tout ensemble d'unicité peut être construit, à partir des parallélépipèdes, au moyen des deux opérations fondamentales répétées une infinité énumérable de fois, la série de ces opérations et leur ordre étant tirés des équations paramétriques de l'ensemble d'unicité proposé.

Nous sommes ainsi amenés à proposer le principe suivant:

Tout ensemble mesurable B est ou bien un ensemble fini, ou bien un ensemble dénombrable, ou bien un ensemble d'unicité.

La notion acquise nous paraît avoir le grand avantage d'être moins métaphysique, puisque, comme il est difficile de nier l'existence des totalités de *tous* les points de (0,1), de *toutes* les fonctions continues, de *toutes* les fonctions discontinues seulement en points rationnels, il paraît difficile de nier la totalité de tous les ensembles *analytiques*; or, si nous ajoutons la condition supplémentaire d'avoir des points sûrement *distincts* correspondants aux valeurs *différentes* de t, la légitimité de la totalité correspondante ne peut pas en être diminuée.

Remarquons, enfin, que la notion acquise facilite notre *conception* de l'ensemble mesurable B *le plus général*.

En effet, parmi les ensembles ayant la puissance *infinie*, les plus simples et les plus naturels sont *les ensembles dont les éléments peuvent être numérotés au moyen des entiers positifs*.

Ce sont les ensembles *dénombrables*.

De même, parmi les ensembles *non dénombrables*, les plus simples et les plus naturels sont *les ensembles dont les éléments peuvent être numérotés au moyen des nombres réels*, à condition de n'employer jamais que des correspendances discontinues au plus en une infinité énumérable de points.

Ce sont les ensembles *mesurables* B.

Applications.

47. **Applications aux projections d'ensembles.** — Nous avons une application du théorème précédent aux projections d'ensembles tout à fait analogue à celle du n° 37.

Théorème. — *La projection orthogonale d'un ensemble mesurable B dans l'espace euclidien à m' dimensions, $m' < m$, si les projections de deux points* différents *de l'ensemble sont* distinctes, *est sûrement un ensemble mesurable B.*

Pour le voir, prenons la démonstration du théorème correspondant du n° 36. Comme, dans le cas actuel, deux points de la projection

$$x_1 = f_1(t), \; x_2 = f_2(t), \; x_{m'} = f_{m'}(t)$$

de l'ensemble mesurable B considéré qui correspondent à deux valeurs *différentes* du paramètre variable t sont *distincts*, le théorème proposé est démontré. c. q. f. d.

48. **Application aux fonctions.** — Cette application est encore analogue à celle du n° 37.

Théorème. — *Si le système de m fonctions quelconques de la classification de M. René Baire $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t), \ldots, x_m = f_m(t)$ est tel qu'à deux valeurs* différentes *du paramètre variable t correspondent deux points* distincts *de l'espace à m dimensions, l'ensemble E défini à l'aide de ces équations paramétriques est sûrement mesurable B.*

En effet, considérons dans l'espace $\mathcal{E}'$ à $m+1$ dimensions le système $S(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ d'axes rectangulaires. D'après le théorème cité de M. H. Lebesgue (n° 37), l'ensemble E' des points de l'espace $\mathcal{E}'$ qui annulent la fonction représentable analytiquement de $m+1$ variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$

$$[x_1 - f_1(t)]^2 + [x_2 - f_2(t)]^2 + \ldots + [x_m - f_m(t)]^2$$

est un ensemble mesurable B. Il résulte de la propriété admise du système des fonctions f_i que chaque perpendiculaire à l'espace $\mathcal{E}$ à m dimensions déterminé par les axes des $x_1, x_2, \ldots, x_m$ coupe l'ensemble E' au plus en un seul point. Donc, d'après le théorème précédent, la projection orthogonale de E' sur l'espace euclidien $\mathcal{E}$ est un ensemble mesurable B. Or, ce dernier coïncide évidemment avec l'ensemble proposé E. s. q. f. d.

49. **Remarque.** — Il est très aisé de donner une extension utile au théorème précédent, en *l'étendant au cas où l'on prend pour domaine de définition des fonctions f_i*, au lieu de l'intervalle fondamental $(0 < t < 1)$, *un ensemble mesurable B arbitraire.*

En effet, soit H un ensemble mesurable B situé dans l'intervalle $(0 < t < 1)$ et sur lequel est défini un système de m fonctions quelconques $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t), \ldots, x_m = f_m(t)$ de la classification de M. R. Baire.

Supposons qu'à deux valeurs différentes du paramètre variable *t prises dans l'ensemble H* correspondent deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$ à m dimensions, et que nous ne savons rien lorsqu'on prend des valeurs de t n'appartenant plus à H. Il s'agit de démontrer que *l'ensemble E des points dans l'espace $\mathcal{E}$ qui correspondent à toutes les valeurs de t prises dans H et seulement dans H est un ensemble encore mesurable B.*

La chose est triviale, si H est un ensemble fini ou dénombrable. Supposons donc que H est non dénombrable

Comme H est supposé mesurable B, il existe une réprésentation paramétrique

$$t = \varphi(\tau)$$

de l'ensemble H telle qu'elle établisse une correspondance univoque et réciproque entre les points de l'ensemble H et de l'intervalle $(0 < \tau < 1)$, la fonction $\varphi(\tau)$ étant discontinue seulement en une infinité dénombrable de points.

Cela posé, considérons les fonctions composées

$$x_1 = f_1[\varphi(\tau)], \; x_2 = f_2[\varphi(\tau)], \ldots, \; x_m = f_m[\varphi(\tau)].$$

Il est clair que ces fonctions sont définies dans l'intervalle total $(0 < \tau < 1)$ et appartiennent à la classification de M. R. Baire. Comme à deux valeurs différents de τ correspondent deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$, il est manifeste que l'ensemble E est *mesurable B.*

XII. Les fonctions implicites.

50. **Problème de M. Henri Lebesgue.** — Soit $\mathcal{E}$ l'espace euclidien à $m+p$ dimensions rapporté à un système de référence $S(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p)$ d'axes rectangulaires.

Désignons par $\mathcal{E}_X$ et $\mathcal{E}_Y$ deux espaces euclidiens partiels, respectivement à m et à p dimensions qui contiennent l'un le système $S(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ l'autre le système $S(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ d'axes rectangulaires.

Cela posé, considérons des relations analytiques

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_q(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0$$

où les fonctions F sont des fonctions de la classification de M. René Baire définies partout dans l'espace $\mathcal{E}$.

La question se pose alors de savoir

si ces relations sont résolubles par rapport aux y, et, si elles les sont, quelle est la nature des fonctions implicites y qui les satisfont? (voir M. Henri Lebesgue: *Sur les fonctions représentables analytiquement,* p. 192).

51. **Domaine d'existence des fonctions implicites.** — Tout d'abord, la fonction de $m+p$ variables réelles

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_q^2$$

rentre évidemment dans la classification de M. Baire. Donc, l'ensemble des points E de l'espace total $\mathcal{E}$ qui annulent cette fonction est un ensemble *mesurable* B [1]).

Il en résulte que la projection orthogonale E_X de E sur l'espace euclidien partiel $\mathcal{E}_X$ est un ensemble *analytique*. D'ailleurs, comme l'ensemble E peut être un ensemble mesurable B pris *arbitrairement* dans l'espace $\mathcal{E}$, sa projection orthogonale E_X est l'ensemble analytique *le plus général*.

Ainsi:

Le domaine d'existence des fonctions implicites est un ensemble analytique le plus général.

52. **Fonctions implicites uniformes. Théorème de M. Lebesgue.** — Ceci étant établi, considérons le cas classique de M. H. Lebesgue, où aucune des fonctions implicites y n'est jamais une fonction *multiforme*.

Dans ce cas, les projections orthogonales de deux points *différents* de l'ensemble E sur l'espace euclidien partiel $\mathcal{E}_X$ sont sûrement distinctes. Il en suit immédiatement (n° 47) que la projection orthogonale E_X de E sur l'espace partiel $\mathcal{E}_X$ est un ensemble *mesurable* B.

Donc,

Le domaine d'existence des fonctions implicites uniformes *est un ensemble sûrement mesurable* B.

53. Cela posé, considérons la nature de ces fonctions implicites.

Pour écarter le cas trivial où E est fini ou dénombrable, nous supposerons l'ensemble E non dénombrable.

Dans ce dernier cas, comme E est mesurable B, nous pouvons l'écrire d'une manière paramétrique

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ldots,\ x_m=f_m(t),\ y_1=g_1(t),\ y_2=g_2(t),\ldots,\ y_p=g_p(t)$$

les fonctions f et g étant discontinues seulement en une infinité dénombrable de points de l'intervalle $(0<t<1)$.

Examinons une fonction implicite quelconque y_k. D'après un théorème connu de M. Lebesgue, *pour qu'une fonction quelconque* $y(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *rentre dans la classification de M. Baire il faut et il suffit que, quel que soient* a *et* b, *l'ensemble*

$$E(a\leqslant y\leqslant b)$$

soit mesurable B [1]).

Appliquons ce critère au cas de la fonction implicite y_k.

Comme la fonction $g_k(t)$ est discontinue seulement en une infinité dénombrable de points dans l'intervalle $(0<t<1)$, elle rentre dans la classification de M. Baire. Donc, l'ensemble des points t de l'intervalle $(0<t<1)$ pour lesquels on a

$$a\leqslant g_k(t)\leqslant b$$

est un ensemble *mesurable* B; désignons-le par e.

Il résulte de la *Remarque* du n° 49 que si nous faisons varier t dans e, l'ensemble des points

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ldots,\ x_m=f_m(t)$$

sera nécessairement un ensemble *mesurable* B.

Or, il est manifeste que cet ensemble coïncide avec l'ensemble

$$F[a\leqslant y_k(x_1, x_2,\ldots, x_m)\leqslant b].$$

Donc, *la fonction implicite* y_k *rentre dans la classification de M. R. Baire.*

Nous sommes ainsi amenés au théorème de M. Lebesgue relatif aux fonctions implicites *uniformes* [2]):

Théorème (Lebesgue). — *Une fonction* uniforme *définie implicitement à l'aide d'expression analytique est exprimable analytiquement d'une manière explicite* [3]).

54. **Fonctions implicites multiformes. Les recherches de M. Novikoff.** — Les choses sont plus compliqées dans le cas des fonctions implicites *multiformes*. C'est le théorème de M. H. Lebesgue relatif aux fonctions implicites *uniformes* que nous per-

[1]) *Voir* H. Lebesgue: *Sur les fonctions représentables analytiquement*, p. 157.

[1]) *Voir: Sur les fonctions représentables analytiquement*, p. 167.

[2]) loc. cit. p. 192.

[3]) Pour préciser les limites d'efficacité du raisonnement, il nous a suffi de faire un changement dans l'énoncé de M. H. Lebesgue concernant l'addition du mot «uniforme». D'ailleurs, M. Henri Lebesgue lui-même ne considérait jamais que des fonctions implicites *uniformes*.

mettra, par analogie, d'aborder l'étude des fonctions implicites *multiformes* [1]).

Tout d'abord, il faut de signaler ici un cas particulier important qui a beaucoup de ressemblance avec le cas classique de M. H. Lebesgue des fonctions implicites uniformes, celui où *l'ensemble des valeurs que peut prendre chacune des fonctions implicites multiformes en un point* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *est au plus dénombrable.*

Voici les résultats des recherches de M. Novikoff relatives à ce cas important;

I. *Le domaine* E_X *d'existence des fonctions implicites* y_k *est encore un ensemble mesurable* B;

II. *Il existe au moins un système de* p *fonctions* uniformes $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0$ *définies* dans le domaine E_X et rentrant dans la classification de M. R. Baire qui satisfont les relations analytiques proposées $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, $F_q = 0$.

III. *Le système complet* $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *des fonctions implicites multiformes qui vérifient les équations proposées* $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, $F_q = 0$ *peut être regardé comme la* réunion *d'une infinité dénombrable de systèmes de p fonctions* uniformes *de la classification de M. Baire vérifiant chacun les équations proposées.*

Nous nous bornons, pour abréger l'exposition, aux énoncés seuls de ces résultats intéressants.

En résumé: *si l'on se borne à considérer les fonctions implicites uniformes à un nombre* dénombrable *des valeurs, c'est le théorème de M. H. Lebesgue qui a encore lieu.*

55. **Cas général.** — Le résultat est tout différent dans le cas général des fonctions implicites multiformes à une infinité *non dénombrable* des valeurs.

Tout d'abord, *le domaine* E_X *d'existence des fonctions implicites est, dans ce cas, l'ensemble analytique le plus général* (n° 50).

Insistons un peu sur ce fait. Soit $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un point quelconque du domaine d'existence E_X. Comme les équations proposées

[1]) C'est M. H. Lebesgue qui a esquissé le programme d'étude des fonctions implicites *multiformes.*

«A ce théorème (il s'agit du théorème relatif aux fonctions uniformes) on en peut rattacher d'autres sur les fonctions à plusieurs déterminations. J'indique seulement la nature de ces propositions». (loc. cit. pp. 192—193).

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0$$
$$F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_q(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0$$

sont, par hypothèse, résolubles en $y_1, y_2, \ldots, y_p$ pour tout point $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ appartenant à E_X, il existe des systèmes de nombres $y_1, y_2, \ldots, y_p$ qui vérifient simultanément ces équations. Chaque système de nombres. $y_1, y_2, \ldots, y_p$ étant un point dans l'espace euclidien partiel $\mathcal{E}_Y$, il est manifeste que l'ensemble de *tous* les points $N(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ de l'espace $\mathcal{E}_Y$ qui vérifient les équations proposées est un ensemble *mesurable* B: il suffit de considérer l'ensemble des points N qui annulent la fonction

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_q^2,$$

les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant fixes. Nous désignons par E_M l'ensemble de ces points N.

Dans le cas général, l'ensemble E_M n'est pas dénombrable, donc il a la puissance du continu; et, parmi les points M de E_X, il y en a *effectivement* de tels que E_M ne soit pas dénombrable ou fini.

Ces considérations géométriques étant faites, il est clair que *chercher à vérifier les équations proposées au moyen des fonctions* uniformes *c'est chercher à choisir, dans chacun des ensembles* E_M, *un et un seul point* N.

Maintenant, la question intéressante se pose:

la réalisation effective de ce choix est-elle possible? Et, si elle l'est, existe-t-il des fonctions uniformes de la classification de M. R. Baire *qui réalisent ce choix?*

Voici les résultats de M. Novikoff à cet égard:

I. *On peut toujours* nommer, *au sens de M. H. Lebesgue, un système de p fonctions* uniformes $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *qui vérifient les équations proposées.*

II. *On peut définir effectivement un système d'équations analytiques* $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots$, $F_q = 0$ *tel qu'il n'existe aucun système de fonctions uniformes* de la classification de M. Baire *qui vérifient ces équations* [1]).

[1]) L'existence d'un tel système d'équations est déduite par M. Novikoff de l'existence de deux ensembles E_1 et E_2 complémentaires respectivement de deux

56. **Systèmes à une infinité dénombrable d'équations.** — Ces considérations peuvent-elles être étendues au cas d'une infinité dénombrable des équations $F_i = 0$ contenant une infinité dénombrable des x et des y? Cela dépend, bien entendu, de la *définition* d'une fonction d'une infinite dénombrable de variables et de la notion de la „classification de M. Baire“ dans ce cas.

Il est nécessaire de prendre une précaution que voici: une fonction $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ d'une infinité dénombrable des variables x_i continue par rapport à chacune de ces variables peut devenir une fonction *absolument arbitraire* $\varphi(x)$ de variable réelle x lorsqu'on pose

$$x = x_1 = x_2 = x_3' = \dots = x_n = \dots$$

Mais voici une définition d'une fonction d'une infinité dénombrable de variables:

$$f(x_1, x_2, \dots; x_n, \dots) = \lim f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Cette définition étant admise, le théorème fondamental de M. H. Lebesgue relatif aux fonctions implicites *uniformes* a encore lieu.

CHAPITRE III.

L'ensemble analytique le plus général.

XIII. Le critère de la mesurabilité B.

57. **L'étude approfondie de l'ensemble lebesguien E.** — Revenons au but principal de la recherche actuelle: à l'étude de l'ensemble analytique E défini par M. H. Lebesgue. Tout d'abord, nous allons tirer les conséquences importantes de la démonstration du théorème du n° 42 relatif à la séparabilité B de tous les deux ensembles analytiques E et E' qui n'ont aucun point commun.

ensembles analytiques et *qui ne sont pas séparables* B, bien qu'ils n'aient aucun point commun. M. Novikoff a notamment trouvé un exemple d'une fonction $F(x, y)$ de classe 2, telle qu'il existe une fonction uniforme $\varphi(x)$ vérifiant pour tout x réel l'équation $F(x, \varphi(x)) = 0$, mais qu'il n'existe aucune fonction uniforme $\varphi(x)$ de la classification de M. Baire qui vérifiait (pour tout x réel) cette équation.

Soient C et C' deux cribles au moyen desquels sont respectivement définis les ensembles analytiques E et E'. Soient x et x' deux points quelconques qui appartiennent respectivement aux ensembles E et E'. Désignons par R_x et $R_{x'}$ deux ensembles énumérables en lesquels les perpendiculaires P_x et $P_{x'}$ élevées respectivement dans les points x et x' à l'axe OX coupent les cribles C et C'. D'après le n° 10, les ensembles R_x et $R_{x'}$ sont *bien ordonnées* conformément à la direction positive de l'axe OY.

Cela posé, nous avons la proposition suivante:

Théorème. — *Les cribles C et C' étant données,* on sait nommer *un ensemble bien ordonné W formé des entiers positifs et plus étendu que les ensembles bien ordonnés R_x et $R_{x'}$ quels que soient les points x et x' qui appartiennent respectivement aux ensembles E et E'*

Pour le démontrer, il suffit de se rapporter à la démonstration du théorème du n° 42. En effet, désignons par W la forme bien ordonnée sous laquelle est mise la suite (I) du n° 43 de manière que si $[a]$ „précède“ $[b]$ suivant une loi adoptée dans (I), le rang de $[a]$ dans W est inférieur à $[b]$ (*voyez* n° 43). Soit x un point de E qui n'est pas une extrémité de la projection sur l'axe OX d'aucun des segments fermés constituant les cribles C et C'.

Il s'en suit que la perpendiculaire P_x élevée en x à l'axe OX coupe des segments des cribles C et C' seulement en des points *intérieurs*. Donc, si σ et σ' sont deux segments quelconques qui appartiennent respectivement aux cribles C et C' et qui rencontrent la perpendiculaire P_x, leurs projections sur l'axe OX sont emboîtées l'une dans l'autre (n° 42); ceci montre que *le couple* $[\sigma, \sigma']$ *est sûrement un élément de W.*

Cela posé, prenons une suite $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots$ de segments du crible C telle qu'elle coupe la perpendiculaire P_x en une suite *descendente* de points correspondants $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ (n° 10); d'ailleurs, nous pouvons supposer que la projection de σ_{n+1} est contenue dans celle de σ_n quel que soit l'entier positif n. Comme le point x appartient à E, il est clair qu'il existe de telles suites $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

Ceci étant, considérons tous les couples de la forme

$$[\sigma_n, \sigma'],$$

n étant un entier positif et σ' un segment du crible C' tel qu'il rencontre la perpendiculaire P_x; soit W_1 leur ensemble. Il est clair que W_1 est un ensemble bien ordonné, puisqu'il est une partie de l'ensemble bien ordonné W. Nous allons *comparer* les ensembles bien ordonnés R_x et W_1. Remarquons qu'à chaque élément $[\sigma_n, \sigma']$ de W_1 correspond un point de R_x et un seul: c'est un point de la perpendiculaire P_x qui appartient à σ'.

Pour effectuer cette comparaison, partons de l'élément *initial* $[\sigma_{n_0}, \sigma'_0]$ de W_1. Je dis que le point correspondant de R_x a un rang *fini*. En effet, dans le cas contraire, nous pourrions déterminer un point de P_x de rang *fini* assez grand pour que le segment σ' correspondant ait une projection contenue dans celle du segment σ'_0 [1]); donc, dans ce cas, le couple $[\sigma_{n+1}, \sigma']$ „précéderait" le couple $[\sigma_{n_0}, \sigma'_0]$ ce qui est précisément impossible.

D'une façon générale, quel que soit le point p de R_x, parmi les éléments-couples de l'ensemble bien ordonné W_1 tels que les points correspondants de l'ensemble bien ordonné R_x aient, dans R_x, des rangs supérieurs ou égaux à p, le premier, dans W, correspond à un point p' de R_x dont le rang dépasse celui de p d'un nombre *fini* d'unités.

On conclut de là immédiatement que, si p est un élément de R_x tel qu'il y ait une infinité d'éléments de R_x de rangs supérieurs à p, le segment de R_x défini par p est semblable à une partie de W, donc est semblable à un segment de W.

Il en résulte que, si l'on ajoute à l'ensemble bien ordonné W, pour former un ensemble bien ordonné plus étendu, un ensemble bien ordonné semblable à la suite naturelle des nombres entiers positifs, on obtient un ensemble bien ordonné sûrement plus étendu que tout ensemble bien ordonné R_x et, par symétrie, $R_{x'}$, quels que soient les points x et x' qui appartiennent respectivement à E et à E' et qui ne coïncident avec aucune projection d'une extrémité des segments σ et σ' constituant les cribles donnés C et C'. Or ces dernières sont en une infinité énumérée de même que le sont les segments des cribles C et C'.

Donc, si l'on ajoute, l'un après l'autre, à l'ensemble bien ordonné W les ensembles bien ordonnés R_x et $R_{x'}$ déterminés pour les projections x et x' de ces extrémités numérotées au moyen des entiers positifs, on obtient un ensemble bien ordonné *fixe*, énumérable et

[1]) Nous supposons que, quelque petit que soit ε, les cribles C et C' ne renferment qu'un nombre *fini* de segments fermés dont les longueurs dépassent ε. Voir la note du n° 42.

sûrement plus étendu que les ensembles bien ordonnés R_x et $R_{x'}$ quels que soient les points x et x' qui appartiennent respectivement à E et à E'. c. q. f. d.

58. Ceci étant établi, nous revenons à l'ensemble lebesguien E de points (n° 1) défini au moyen du crible canonique de M. H. Lebesgue (n° 2). Nous avons reconnu que E est un ensemble *analytique* (III, nn° 5—8). Rappelons que la collection [1]) des points x de l'intervalle $(0 < x < 1)$, qui n'appartiennent pas à E, a été appelé totalité lebesguienne et a été désignée par $\mathcal{E}$ (n° 1).

Le résultat principal du Mémoire présent est le suivant:

Théorème fondamental. — *On aboutit à une contradiction, en admettant comme possible qu'on saura* nommer *un crible pour la totalité lebesguienne* $\mathcal{E}$.

En effet, soit C' un crible nommé pour la totalité lebesguienne $\mathcal{E}$. Comme l'*ensemble* lebesguien E et la *totalité* lebesguienne $\mathcal{E}$ n'ont aucun point commun, on voit bien que, d'après le théorème précédent, nous pouvons nommer un ensemble énumérable bien ordonné W plus étendu que tout ensemble de points bien ordonné R_x quel que soit le point x qui appartient à la totalité lebesguienne $\mathcal{E}$.

D'autre part l'expression de x est bien déterminée dès que x est donné

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \frac{\theta_3}{2^3} + \dots + \frac{\theta_n}{2^n} + ,\dots$$

Par définition (n° 1), l'ensemble R_x est formé des nombres rationnels écrits dans la suite

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$$

et ayant cette prepriété que leurs indices soient égaux aux indices des chiffres θ_i qui sont 1.

Comme la suite $r_1, r_2, \dots$ contient *tous* les nombres rationnels, compris entre 0 et 1, il est clair que R_x est l'ensemble le plus général formé de points rationnels dans (0,1).

Et comme l'ensemble *le plus général* formé de points rationnels est, en particulier, un ensemble bien ordonné aussi étendu que l'on voudrait, la contradiction désirée est signalée.

Il est très important de remarquer que, en fin de compte, en

[1]) Ce mot *collection* doit être pris dans le sens le plus large possible.

dépit des apparences, c'est la possibilité humaine libre de penser aux ensembles dénombrables bien ordonnes aussi étendus que l'on veut qui est le dernier principe de cette démonstration.

c. q. f. d.

Corollaire. — *Il y a une contradiction dans la supposition que l'ensemble lebesguien E fait partie de la famille des ensembles mesurables B.*

En effet, dire que l'ensemble E est mesurable B c'est dire que nous savons nommer [1]) une construction de E au moyen des opérations: somme, partie commune, à partir d'intervalles. Dès que nous savons nommer cette constructions de E, nous savons nommer une construction analogue de la totalité lebesguienne $\mathcal{E}$, puisque cette dernière est la complémentaire de E. Dès que nous savons réaliser cette construction de $\mathcal{E}$, nous savons nommer une représentation paramétrique $x=f(t)$ de $\mathcal{E}$, f étant discontinue seulement en une infinité dénombrable de points (n° 34), donc nous savons nommer un crible pour $\mathcal{E}$ (n° 16), ce qui est précisément impossible, d'après le théorème fondamental précédent. c. q. f. d,

Nous sommes conduits ainsi à l'énoncé suivant:

La notion d'ensemble analytique le plus général ne coïncide pas avec celle d'ensemble mesurable B le plus général.

59. Cribles bornés et non bornés. — Nous allons donner une extension aux résultats qui font l'objet des deux numéros précédents, en étendant le raisonnement fait pour le cas l'ensemble lebesguien E.

Tout d'abord, nous allons établir une distinction importante entre les divers cribles.

Définition I. — *On dit que C est un crible* borné *si l'on sait nommer un ensemble énumérable bien ordonné W plus étendu que l'ensemble R_x quel que soit x n'appartenant pas à l'ensemble E criblé au moyen de C.*

Définition II. *Un crible C est dit* non borné *s'il n'existe pas d'ensemble dénombrable bien ordonné qui soit plus étendu que l'ensemble R_x quel que soit x n'appartenant pas à l'ensemble E criblé au moyen de C.*

La définition I est évidemment légitime parce que la possibilité

[1]) Nous ne chercherons pas à concevoir l'*ensemble mesurable B en soi* indépendamment de notre possibilité de *nommer* une telle construction.

de nommer ne se démontre pas, mais elle se *constate*; on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu [1]). Quant à la définition II, nous ne chercherons pas à reconnaître ni si elle est un inverse *absolu* de la définition I, ni si elle est assez kroneckérienne pour lui attribuer un sens.

Voici une proposition relative à la définition I:

Théorème. — *Pour qu'un crible C soit borné il faut et il suffit qu'on sache nommer une construction de l'ensemble criblé E au moyen des opérations: somme, partie commune, à partir d'intervalles (c'est-à-dire que E soit un ensemble* effectivement *mesurable B).*

La condition est nécessaire. — En effet, soit W un ensemble *énumérable* bien ordonné plus étendu que chaque ensemble bien ordonné R_x, quel que soit le point x n'appartenant pas à l'ensemble E criblé au moyen de C. Nous supposons ce crible C placé dans l'intérieur du carré fondamental K dont les côtés ont pour équations

$$x=0,\ x=1;\ y=0;\ y=1.$$

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ les segments constituant le crible C; ce sont les segments fermés parallèles à l'axe OX et situés dans l'intérieur du carré K.

Nous désignerons par e les éléments de l'ensemble bien ordonné W; soit e_1 un élément initial de W.

Cela posé, nous introduisons une infinité *énumérable* d'ensembles de points situés dans l'intérieur de K que nous désignons par $[e, \sigma_n]$ et qui sont déterminés par la loi de récurrence que voici:

1° Par définition, $[e_1, \sigma_n]$ coïncide avec le segment fermé σ_n;

2° Si l'élément e de W est de *première espèce*, $[e, \sigma_n]$ est la *somme* des projections orthogonales sur σ_n des ensembles $[e', \sigma_i]$, où σ_i est un segment du crible C dont l'ordonnée est précisément inférieure à celle de σ_n;

3° Si l'élément e de W est de *seconde espèce*, $[e, \sigma_n]$ est la *partie commune* à tous les ensembles $[e', \sigma_n]$, e' étant un élément de W précédant e.

Comme l'ensemble bien ordonné W est *supposé énumérée au moyen des entiers positifs*, on voit bien que les ensembles $[e, \sigma_n]$

[1]) *Voir* J. Hadamard: *Lettre à M. Emile Borel. (Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904).

sont en une infinité énumérable et *sont tous effectivement mesurables* B puisque nous avons nommé la construction de chacun d'eux au moyen des opérations: somme, partie commune, à partir des segments.

Désignons par $[e]$ la somme des projections orthogonales sur l'axe OX des ensembles $[e, \sigma_n]$, e étant fixe, et $n = 1, 2, 3, \ldots$. Désignons, enfin, par E' la partie commune à tous $[e]$. On voit bien que E' est *effectivement mesurable* B.

Je dis maintenant que E' *coïncide avec* E.

En effet, si le point x appartient à E, il appartient manifestement à la projection sur l'axe OX de tout ensemble $[e, \sigma_n]$, où σ_n a une ordonnée *supérieure* à $\mu(x)$ (*voir* n° 10). Donc, x appartient à E'.

Si au contraire, x n'appartient pas à E, l'ensemble R_x est bien ordonné. Et, comme R_x est *moins* étendu que W, il existe un élément e de W tel que x n'appartienne à la projection sur l'axe OX d'aucun ensemble $[e, \sigma_n]$, quel que soit n. Donc, x n'appartient pas à E'.

Ainsi, les ensembles E et E' sont *identiques*. Nous concluons de là que E est effectivement mesurable B.

La condition est suffisante. — En effet, si E est un ensemble effectivement mesurable B, nous savons nommer un crible C' pour l'ensemble complémentaire de E (n° 58, *Corollaire*). Mais alors, d'après le théorème du n° 57, nous savons nommer un ensemble W formé des entiers positifs et plus étendu que R_x, x étant un point arbitraire du complémentaire de E. Donc, le crible donné C est *borné*. c. q. f. d.

On ne trouve aucune difficulté pour étendre toutes ces propositions au cas des cribles à plusieurs dimensions (n° 10).

60. Voici la conclusion à laquelle nous arrivons: nous connaissons actuellement un critère pour qu'un crible quelconque C soit *borné*. Mais il n'y a rien de pareil pour la définition II du n° précédent. Nous ne savons pas même si elle a un sens.

Il est vrai que cette définition est énoncée en termes tels que „*il n'existe pas* d'un ensemble... bien ordonné plus étendu que...“ qui paraîtront sans doute tous objectifs, mais on peut demander si cette objectivité n'est pas plus apparente que réelle.

Le verbe „exister“ est employé dans cet énoncé, au sens *absolu*, or il semble que la Science, d'après son caractère même, ne peut employer ce mot qu'au sens *relatif*, en indiquant chaque fois d'avance un *champ de lois* par rapport auquel on constate les „existences“ et „non-existences“ d'être scientifique, de même manière qu'on ne peut pas parler d'irréductibilité ou de réductibilité d'équation algébrique au sens absolu sans faire indiquer d'avance un corps de nombres par rapport auquel on constate l'irréductibilité (ou l'inverse) de cette équation. C'est Kronecker qui a ajouté même l'exigence du procédé *fini* régulier d'effectuer la réductibilité.

Si nous ne trouvons pas toujours, lorsqu'on parle d'existence, de renseignements explicites relatifs à un *champ de lois* par rapport auquel on considère l'existence ou non-existence, c'est en raison de la clarté extrême de l'unicite même de tel champ: tel est, par exemple, le cas d'existence de l'intégrale d'une équation différentielle. Mais, dans le cas général, des renseignements sur un champ de lois sont nécessaires, ainsi que la régularité kroneckérienne, *dans ce champ*, des procédés qui peuvent être supposés finis ou *infinis*; mais, dans ce dernier cas, ces procédés doivent être nécessairement *énumérables* puisque, lorsqu'il s'agit de l'infini, c'est seulement la suite naturelle des nombres entiers positifs

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

qui présente une image parfaitement claire et *positive* [1]). La notion de l'infini non dénombrable est une notion *purement négative* [2]), n'ayant aucune réalité objective; cette notion évoquant seulement la possibilité humaine de créer des démonstrations „*par l'absurde*“ ne recouvre aucune réalité accessible et varie de champ en champ.

Si nous faisons varier un champ de lois, les „existences“ et „non-existences“ d'un être mathématique changent totalement de sens et peuvent être même permutées, ainsi que la régnlarité kroneckérienne dans un champ.

Maintenant, quand nous examinons de près la définition II, nous la trouvons trop peu kroneckérienne pour lui attribuer un sens.

Il est vrai que, dans l'état actuel de la Science, on ne peut éviter totalement l'emploi des notions non-kroneckériennes, mais il importe de remarquer qu'il y a des notions „*plus*“ kroneckériennes

[1]) *Voir* M. E. Borel: *L'infini mathématique et la réalité* (*Revue du Mois*, 10 juillet 1914).

[2]) *Voir* M. E. Borel: *Les «Paradoxes» de la théorie des ensembles* (*Annales de l'Ecole Normale*, 1908).

et „moins" kroneckériennes, et il importe de distinguer les *divers degrés* d'intensité de cette qualité.

Par exemple, la notion de la série divergente (à termes positifs) ou la notion de nombre irrationnel sont des notions sûrement non-kroneckériennes. Mais, une série à termes positifs ou un nombre réel étant donnés, on reconnaît si elle est convergente ou s'il est rationnel au bout d'une infinité *énumérable* d'opérations. Le degré de la qualité indiquée est donc *énumérable.*

Il n'y a rien de pareil pour la notion de crible „non borné": il n'est pas possible de fixer une méthode telle que, si le crible donné C est non borné, on en soit assuré sûrement au bout d'une infinité énumérable d'opérations; cela tient à ce que le complémentaire $\mathcal{E}$ de E n'est ni *dénombrable*, ni même *mesurable* B; il est donc nécessaire de prendre *tous* les ensembles bien ordonnés R_x, x étant un point arbitraire de $\mathcal{E}$, et les comparer; en pratique, cela revient à dire qu'il est *impossible* de *définir* la notion d'un crible non borné.

Voici une difficulté *toute objective*: *le crible quelconque C étant donné, il n'est pas possible de fixer une méthode qui permettrait de nommer* un point *du complémentaire $\mathcal{E}$ de E.*

Il en est tout autrement dans le cas de l'ensemble analytique (nº 11) et nous savons *effectivement* former, le crible C étant donné, une représentation paramétrique $x=f(t)$ de E; alors, en posant $t=\frac{1}{2}$, nous avons un point unique et bien déterminé de l'ensemble criblé E. Mais, il n'est pas possible de nommer un point du complémentaire $\mathcal{E}$ même si nous sommes assuré, par une méthode hypothétique quelconque, que le crible C est non borné et donc *qu'il y a des points de $\mathcal{E}$.* C'est en raison de cette impossibilité qu'il n'est possible ni de trouver un ensemble parfait contenu dans $\mathcal{E}$, ni même de reconnaître sans aucune ambiguïte sa puissance.

Cette difficulté ne se présente plus, si le crible donné C est un *crible d'unicité*, c'est-à-dire un crible tel que, quel que soit le point x de E, l'ensemble R_x ait un point et un *seul* point limite vers lequel R_x a un mouvement rétrograde (nº 10): d'après les théorèmes des nnº 38, 45, tout ensemble E effectivement mesurable B admet un crible d'unicité, et ce sont les seuls ensembles qui possèdent cette propriété. Donc, si l'ensemble E est criblé au moyen d'un crible d'unicité, nous savons nommer un crible pour son complémentaire $\mathcal{E}$, et, par conséquent, effectuer la représentation paramétrique $x=g(t)$. Alors, en posant $t=\frac{1}{2}$, nous avons le point $x_0=g(\frac{1}{2})$ sûrement appartenant à $\mathcal{E}$.

Mais, dans le cas général, lorsque C n'est aucun des cribles d'unicité, ce mode de raisonnement doit complètement disparaître, et nous sommes dans l'impossibilité de nommer un point de $\mathcal{E}$.

Il y aurait lieu de distinguer parmi les cribles „non bornés" les plus généraux, qui paraissent devoir être exclus, au moins pour l'instant, des considérations mathématiques, des cribles „non bornés" dont les ensembles bien ordonnés correspondants R_x soient assujettis à des restrictions. Ces restrictions doivent être de nature telle que l'affirmation de non-existence de la „borne" des ensembles R_x puisse être déduite de la conception si vague d'ensemble *le plus général* formé de points rationnels.

On appelle *dense en lui même* tout ensemble dénombrable linéaire dont aucun point n'a pas de point consécutif. On sait que chaque ensemble dénombrable linéaire dense en lui même est *semblable* à l'ensemble des points rationnels de l'intervalle (0,1), les extrémités comprises ou exclues.

Cela posé, considérons un crible C quelconque. Soit Y l'ensemble des ordonnées de tous les segments σ constituant le crible C. La considération du crible canonique de M. H. Lebesgue (nnº 2 et 58) nous amène à proposer la définition suivante:

Nous dirons qu'un crible C est *de type lebesguien* si nous savons nommer une partie Y_1 de Y formée d'une réunion de l'ensemble D dense en lui-même et d'un ensemble bien ordonné H (en adoptant la convention habituelle d'ordre) *fixe* de manière que, quelle que soit une partie D_1 de D, il existe un point x dans $(0<x<1)$ dont l'ensemble correspondant R_x contienne D_1 et soit contenu dans Y_1.

Sans insister sur la généralité de cette définition, nous ferons observer que *la démonstration du théorème du nº 58* relatif à ce que le crible canonique de M. H. Lebesgue ne peut pas être borné, *s'étend sans aucune modification au cas d'un crible de type lebesguien.* Ainsi, aucun des ensembles déterminés au moyen d'un crible de type lebesguien ne fait partie de la famille des ensembles mesurables B.

Nous allons faire une application immédiate de cette observation.

61. **Une modification de l'exemple de M. H. Lebesgue**[1]. — On sait que M. R. Baire a donné un exemple purement *arithmétique* d'une fonction de classe 3 de sa classification. Voici cet exemple.

Prenons l'intervalle fondamental (0,1) et considérons un nombre irrationnel quelconque x réduit en fraction continue

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dotsb + \cfrac{1}{\alpha_n + \dotsb}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ étant des entiers positifs. A tout nombre irrationnel x correspond une suite bien déterminée d'entiers positifs

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

et, réciproquement, une telle suite détermine d'une manière unique le nombre irrationnel x.

Cela posé, *il nous suffira*, suivant M. R. Baire, *de poser*

$$f(x) = 1$$

si les entiers positifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ *tendent vers l'infini, et de poser*

$$f(x) = 0$$

dans le cas contraire.

La fonction $f(x)$ ainsi définie est exactement une fonction de classe 3, d'après les recherches de M. R. Baire[2].

62. Pour nommer d'une manière entièrement arithmétique une fonction analogue $f(x)$ ne faisant pas partie de la classification de M. Baire, posons la définition suivante:

Nous dirons qu'une suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ *d'entiers positifs est* composée, *s'il y a, parmi ses termes, une infinité de nombres*

[1]) Cf. ma Note dans les *C. R.*, t. 182, p. 1521 (séance du 21 juin 1926).

[2]) *Acta Mathematica*, t. 30.

Il importe de remarquer que M. R. Baire s'abstient toujours de l'emploi de la *méthode de diagonale de Cantor* (c'est-à-dire de faire une application sur le continu) par laquelle M. H. Lebesgue a réussi à nommer *des exemples de fonctions de toutes les classes* (*Sur les fonctions représentables analytiquement*, p. 212). C'est M. Lebesgue qui voulut bien m'indiquer que, si l'on écarte cette méthode, le problème d'existence d'une fonction de classe 4 mérite d'attirer l'attention des analystes, malgré sa difficulté.

α divisibles les uns par les autres $\alpha_{n_1} : \alpha_{n_2} : \alpha_{n_3} : \dots$; *au cas contraire nous dirons que la suite donnée* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ *est* simple.

Cette définition posée, *nous définissons la fonction $f(x)$ par les égalités*:

$$f(x) = 1,$$

si la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ *est composée, et nous posons*

$$f(x) = 0,$$

si la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ *est simple.*

Pour démontrer que la fonction $f(x)$ ainsi définie ne rentre pas dans la classification de M. Baire, il suffit de constater que l'ensemble des points $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots)$ qui correspondent aux suites composés est un *ensemble criblé au moyen du crible C de type lebesguien.*

Pour construire ce crible, rappelons quelques désignations de M. R. Baire (loc. cit.). Le symbole $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ désigne un intervalle dit *de rang n* dont les extrémités sont rationnelles et données par deux fractions continues finies:

$$\cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dotsb + \cfrac{1}{\alpha_n}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dotsb + \cfrac{1}{\alpha_n + 1}}}$$

On sait que tous les intervalles I de rang n sont sans point commun deux à deux et couvrent totalement l'intervalle $(0 < x < 1)$. D'ailleurs, chaque intervalle de rang n, $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, est divisé en une infinité d'intervalles de rang $n+1$: $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 1)$, $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 2), \dots$ Enfin, toute suite $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \dots, \mathrm{I}_n, \dots$ d'intervalles de rangs respectivement égaux à $1, 2, 3, \dots$, chacun intérieur au précédent, est nécessairement de la forme $\mathrm{I}(\alpha_1)$, $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \dots$; le point irrationnel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ est le seul qui appartient à *tous* ces intervalles.

Cela rappelé, considérons l'intervalle quelconque $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de rang n. Nous faisons correspondre à cet intervalle un segment fermé situé dans l'intérieur du carré fondamental et parallèle à l'axe OX que nous désignerons par $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et qui est déterminé de la manière suivante:

1° la projection de $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sur l'axe OX coïncide avec l'intervalle $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, les extrémités exclues;

2° l'ordonnée de $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est un nombre rationnel de la forme

$$\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{\theta_n}{2^n}$$

défini par cette condition que $\theta_n = 1$ et, pour $i < n$, on a $\theta_i = 0$ si α_i est un diviseur de α_n, et $\theta_i = 1$, dans le cas contraire.

Comme les intervalles $\mathrm{I}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sont en une infinité énumérable, l'ensemble des segments σ forme un crible C qui définit un ensemble criblé E.

On voit bien, d'après la construction du crible C, que ce crible est *de type lebesguien* et que l'ensemble criblé E au moyen de C coïncide avec l'ensemble des points pour lesquels on a $f(x) = 1$, sauf peut-être des points rationnels. c. q. f. d.

Ainsi, *parmi les lois de l'Arithmétique*, il y en a de telles qu'ells nous amènent aux ensembles ne faisant partie de la famille des ensembles mesurables B [1]).

63. **La diagonale de Cantor.** — On obtient des ensembles analytiques non mesurables B, en partant d'un ordre d'idées tout différent.

On sait que G. Cantor a nommé, quelle que soit une suite dénombrable $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de nombres réels, un nombre réel U tel qu'il ne fasse pas partie de cette suite. La méthode qu'il avait employé est celle d'*une diagonale*.

On sait que cette méthode diagonale de G. Cantor a été employée par M. E. Borel pour le cas des familles applicables sur le continu [2]) et qu'elle a permis de conclure: à M. E. Borel l'existence de fonctions qui ne sont ni de la classe α, ni d'une classe inférieure [3]), et à M. H. Lebesgue l'existence de fonctions de toute classe de la classification de M. R. Baire [4]).

[1]) C'est pourquoi, il serait fort intéressant de pouvoir donner un problème de l'Arithmétique pure dont la résolution dépend d'une manière essentielle d'un ensemble non mesurable B. Il semble que la résolution d'un tel problème, s'il existe de tels problèmes, doit présenter des difficultés extraordinaires.

Ceci se rattache à la question de savoir dans quelle mesure les problèmes de l'Arithmétique *déjà connus* sont liés aux ensembles non mesurables B.

[2]) *Voir* E. Borel: «*Leçons sur la théorie des fonctions*», première édition, 1898, Note II, p. 107.

[3]) *Voir* E. Borel: «*Leçons sur les fonctions de variables réelles*», 1905, Note III.

[4]) *Voir* H. Lebesgue: «*Sur les fonctions représentables analytiquement*», p. 212.

C'est cette méthode qui nous permettra maintenant de conclure l'existence d'un ensemble analytique non mesurable B.

Mais il est nécessaire de prendre une précaution voici laquelle: si nous partons d'*une des* applications sur le continu de la famille de tous les ensembles analytiques, nous pouvons en déduire seulement un ensemble *non analytique* et, par suite, non mesurable B; mais nous ne pouvons pas encore conclure de là l'existence des ensembles analytiques non mesurables B.

Pour éviter cette difficulté, nous introduisons la notion suivante: *un ensemble analytique U de ponts du plan XOY s'appelle* universel *si nous avons en le coupant avec les droites parallèles à l'axe OY tous les ensembles analytiques linéaires possibles.*

Le complémentaire CU de tout ensemble universel U *ne peut pas être analytique.*

En effet, si CU est un ensemble analytique, sa partie située sur *la diagonale* Δ, $x = y$, l'est aussi (n° 34), ainsi que la projection P de cette partie sur l'axe OY. Comme l'ensemble U est *universel*, il existe une parallèle à l'axe OY, $x = x_0$, telle que la partie de U située sur cette parallèle a pour projection sur l'axe OY l'ensemble P.

Or, le point $M(x_0, x_0)$ de la diagonale Δ ne peut appartenir à l'ensemble U, puisque, dans ce cas, la projection de M sur l'axe OY doit être contenue dans P, ce qui est contradictoire; et le point M ne peut non plus appartenir à CU puisque, dans ce cas, la projection de M sur l'axe OY doit être être étrangère à P, ce qui est encore contradictoire. c. q. f. d.

Tout revient à démontrer l'existence *réelle* d'un ensemble analytique universel U.

Tout ensemble analytique *linéaire* E est l'ensemble des valeurs que prend dans l'intervalle $(0 < t < 1)$ une fonction $f(t)$ discontinue seulement en une infinité *dénombrable* de points. Une telle fonction $f(t)$ est une fonction de classe 1 de la classification de M. R. Baire.

Tout revient donc à définir une fonction $\varphi(t, x)$ telle qu'elle fournisse, en attribuant à x des valeurs particulières x^0, toutes les fonctions de la variable t de classe 1 possibles.

Toute fonction $f(t)$ de classe 1 peut être réprésentée par une série de polynomes, à coefficients rationnels, il suffit de prendre la série dont le terme général est une fonction continue de t et de x

$$\varphi_1(x)\cdot P_1(t)+\varphi_2(x)\cdot P_2(t)+\ldots+\varphi_n(x)\cdot P_n(t)+\ldots,$$

la suite $P_1, P_2, \ldots$ étant l'ensemble de tous les polynomes en t à coefficients rationnels et $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ étant une courbe péanienne remplissant, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, le cube fondamental à côté 1 dans l'espace à une infinité dénombrable de dimensions.

Appelons $S_n(t, x)$ la somme des n premiers termes de cette série: c'est une fonction continue de t et de x. La fonction $\varphi(t, x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(t, x) = \lim_{n=\infty} S_n(t, x)$$

possède évidemment la propreté désirée et est de classe 2 au plus dans la classification de M. R. Baire. Donc, la surface (S)

$$(S) \qquad\qquad y = \varphi(t, x)$$

est *représentable analytiquement*; l'ensemble des points, dans l'espace à trois dimensions, qui appartiennent à cette surface (S) est *mesurable B* (H. Lebesgue), la projection U de la surface (S) sur le plan XOY est un ensemble *analytique*, qui est manifestement *universel*.

c. q. f. d.

Remarque I. — On démontre de la même manière qu'il existe encore, *dans l'espace euclidien à trois dimensions* $OXYZ$, un ensemble analytique *universel* U: c'est un ensemble analytique tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan XOY, nous aurons tous les ensembles analytiques *plans* possibles.

Remarque II. — Pour les raisons que nous avons exposées ailleurs (*Comptes Rendus*, t. 181, 1925, p. 95) et sur lesquelles nous ne revenons pas, la méthode de la diagonale de G. Cantor, bien que n'étant pas transfinie en apparence, nous paraît être en réalité adéquat au transfini, puisque *tout* ensemble analytique non mesurable B est intimement lié à la totalité de *tous* les ensembles dénombrables *bien ordonnés* (nº 59). D'ailleurs, les difficultés liées à cette méthode s'accroissent infiniment, lorsqu'il s'agit des ensembles dits *projectifs*.

XIV. Le transfini.

64. **L'axiome du Choix.** — Pour préciser la notion *du transfini* il convient de considérer d'abord l'axiome du Choix.

Soit M un ensemble formé des ensembles de points non vides

M' sans points communs deux à deux, et défini d'une manière précise au moyen d'une loi toute finie Λ.

Nous dirons que nous sommes dans le cas du *choix lebesguien* si nous pouvons tirer de Λ une loi nouvelle λ toute finie qui permette de définir d'une manière précise et sans ambiguïté possible un ensemble de points L contenant un et un seul point dans chacun des ensembles M'.

S'il n'existe pas une telle possibilité, nous dirons que nous sommes dans le cas du *choix zermellien*: c'est le fameux *Principe du Choix arbitraire* appelé souvent *Axiome de M. Zermelo* qui fait l'affirmation catégorique, *dans tous les cas*, de l'existence *réelle* d'un ensemble Z ayant un et un seul point dans chaque M', en donnant aux mots une extension extraordinaire et trop peu kroneckérienne pour qu'on puisse, à mon avis, lui attribuer un sens.

Mais il y a lieu ici de distinguer un cas particulier important, celui où l'ensemble M est *dénombrable*. Dans ce cas, le choix lebesguien est bien imposé, puisque il est *à priori* impossible, à notre avis, d'avoir les ensembles M' *eux-mêmes* numérotés au moyen des entiers positifs sans avoir préalablement une loi qui définit les points choisis, un dans chacun des ensembles M', et numérotés d'une manière analogue.

Maintenant une question très importante se pose: le choix lebesguien est-il nécessairement imposé de même dans le cas où l'ensemble M a *effectivement* [1]) la puissance du continu?

En d'autres termes, si l'on admet qu'il *nous* est impossible de constater un numérotage des ensembles M' *au moyen des entiers positifs* sans avoir réalisé préalablement un choix déterminé d'un et d'un seul point dans chaque M' en même temps qu'un numérotage analogue des éléments choisis, — dans quelle mesure un numérotage des ensembles M' *au moyen des nombres réels* suppose-il accompli un numérotage analogue des éléments choisies un et un seul dans chaque M'?

Cette question, à laquelle nous avons été naturellement conduits, paraîtra sans doute très aisée si l'on ne prend pas une précaution pour être certain d'avoir une application *effective* de M sur le continu.

En effet, prenons pour les ensembles M', les ensembles de points d'une droite D tels que la distance de deux points quelconques de

[1]) Ce veut dire que *nous savons nommer* une application de M sur le continu.

M' soit *rationnelle* et la distance de deux points, dont l'un appartient à M' et l'autre est en déhors de M' soit *irrationnelle.* On voit bien que, étant donnés deux ensembles M', ils sont ou bieu identiques, ou bien sans points communs.

Soit M l'ensemble de *tous* ces ensembles M' *différents.*

Chaque ensemble M' est évidemment *dénombrable*, étant l'ensemble des points de la forme $x \pm \frac{p}{q}$, où x est un point de M'.

D'autre part, la droite D est totalement décomposée en les ensembles M'. Il paraît essez naturel de conclure de là que l'ensemble M a la puissance du continu. Or, le choix d'un point dans chaque M' présente des difficultés excessives.

En réalité, la puissance de l'ensemble M (s'il est légitime d'en parler) est toute inconnue: *nous ne savons pas nommer une application de M sur le continu.* De plus, M. Sierpiński a démontré que si nous savons nommer une *ordination simple* de M, quelle que soit la puissance de M, nous savons nommer un ensemble de points *non mesurable,* au sens de M. H. Lebesgue [1]).

Mais on peut indiquer un autre exemple de l'ensemble M ayant effectivement la puissance du continu, tel que le choix lebesguien dans les M' présente des difficultés insurmontables.

Prenons, en effet, l'ensemble analytique universel U que nous avons construit dans nº 63. Soit E l'ensemble des points x de l'axe OX tels que la perpendiculaire P_x élevée en x à l'axe OX coupe le complémentaire CU de U en un ensemble *non vide.*

Il est très aisé de voir que E contient un ensemble *parfait*; donc, E a *affectivement la puissance du continu* [2]). Or, le choix lebesguien, pour chaque point x de E, d'un et d'un seul point de CU ayant x pour l'abscisse est manifestement adéquat au choix d'un point du complémentaire de chaque ensemble analytique linéaire (nº 60).

Ainsi, il y a une différence essentielle entre le cas où M est numéroté au moyen des *entiers positifs* et le cas où M est numéroté au moyen des *nombres réels.* La possibilité d'avoir les ensembles M' numérotés au moyen des nombres réels sans avoir le choix lebesguien tient, à notre avis, à ce que le continu ne peut pas être mis *effectivement* sous la forme bien ordonnée.

[1]) *Bull. Acad. Cracovie*, 1918, p. 147.

[2]) C'est une conséquence du théorème connu de Cantor-Bernstein. *Voir* M. E. Borel: «*Leçons sur la théorie de fonctions*», Note I, p. 106.

65. **L'axiome du Partage.** — Nous avons indiqué précédemment (nº 30, Note) qu'il y a plusieurs théories des nombres transfinis. Pour voir l'origine logique du transfini, plaçons nous sur le terrain de la théorie formelle de MM. Russel-Sierpiński qui paraît être la plus achevée.

Soit R une relation binaire (à 2 termes) *symétrique* (c'est-à-dire si xRy est vraie, yRx l'est aussi) et *transitive* (c'est-à-dire si xRy est vraie et si yRz est vraie, xRz l'est aussi) présentant un sens bien déterminé pour tous les points x et y pris dans le continu [1]).

Appelons *système complet* relativement à R tout ensemble de points $\mathcal{E}$ tel que la relation xRy est vraie quels que soient les points x et y pris dans $\mathcal{E}$. et est fausse toutes les fois que l'un de ces deux points, x et y, appartient à $\mathcal{E}$ et l'autre à son complémentaire $C\mathcal{E}$.

Il est clair que, étant donnés deux systèmes complets, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$, ils sont ou bien identiques, ou bien sans point commun.

Ces préliminaires terminés, l'Axiome du Partage [2]) *affirme l'existence réelle de la totalité T des systèmes complets distincts qui épuise d'une manière définitive le continu.*

Les arguments qui peuvent être inventés en faveur de cet axiome sont tous d'ordre psychologique, comme dans le cas de l'Axiome du Choix, d'ailleurs, et ne valent pas mieux [3]); la collection fini de phrases qui constitue la relation R, en nous prêtant la possibilité de définir de systèmes complets particuliers, est elle-même bien loin de nous présenter une décomposition totale du continu.

Il en est tout autrement pour le cas singulier où nous pouvons tirer de R une loi finie λ qui définit un ensemble de points L ouissant des deux propriétés suivantes:

1º xRx' est fausse si les points x et x' $(x \neq x')$ appartiennent à L;

2º Quel que soit le point y pris dans le continu, il existe un point x de L tel que xRy est vraie.

Nous appellerons *partage lebesguien* tout partage qui possède ces deux propriétés. C'est dans ce cas seul que la totalité T existe réellement, étant achevée; elle est donc légitime.

[1]) On pourrait, par exemple, prendre pour R la phrase: «avoir la distance $|x-y|$ commensurable».

[2]) On appelle, dans la Logique, ce mode d'établir des existences *Principe d'abstraction.*

[3]) Je dois signaler les conversations intéressantes sur ce sujet avec MM. Kolmogoroff et Novikoff.

Mais, dans le cas général où nous n'avons plus du partage lebesguien, la totalité T est, à notre avis, tout illégitime: *ce n'est qu'une pure virtualité.*

C'est cet axiome qui est l'origine, en faisant varier la relation R, d'une quantité innombrable de virtualités *quasi-effectives*, et il y a bien des chances pour que la plupart soient irréductibles deux à deux [1]).

66. Le transfini. — D'après la théorie formelle des nombres transfinis, on appelle *nombre transfini de seconde classe* tout ensemble $\mathcal{E}$ composé de *tous* les ensembles bien ordonnés semblables deux à deux formés chacun de points rationnels de l'intervalle $(0 < y < 1)$, le rang des points étant conforme à la direction positive de l'axe OY.

C'est à partir de cette définition qu'on construit une belle théorie des nombres transfinis de seconde classe.

D'après ce qui précède il est clair que le „nombre transfini" de cette théorie n'est autre chose qu'un système complet par rapport à la relation symétrique et transitive „être semblable". Donc, *la totalité des nombres transfinis de seconde classe, dépend de l'application de l'Axiome du Partage* ce qui présente à notre avis, des difficultés énormes [2]).

67. La forme géométrique que l'on peut donner à cet énoncé le rendra peut-être plus clair.

Considérons, dans le plan XOY, le carré fondamental K à côté 1. Soit C le crible *canonique* de M. H. Lebesgue (nº 2) situé dans K. Prenons l'ensemble lebesguien E et la totalité lebesguienne $\mathcal{E}$; on sait que E est criblé au moyen de C, et $\mathcal{E}$ est le complémentaire de E.

Si le point variable x parcourt la totalité $\mathcal{E}$, nous avons les ensembles bien ordonnés R_x (formés de points rationnels et rangés suivant la direction positive de l'axe OY) *tous possibles.* Dès lors, la notion de nombre transfini de la théorie formelle s'applique immédiatement et peut être interprétée d'une manière totalement géométrique.

[1]) Rappelons ce que nous avons dit dans nº 64 de la puissance de la virtualité M provenant de la relation «*avoir la distance* $|x-y|$ *rationnelle*».

[2]) Je ne sais pas s'il existe un exemple correct d'un ensemble bien ordonné non dénombrable formé d'éléments quelconques. L'existence de ces ensembles me paraît fort discutable. Au contraire, c'est le théorème: *Tout ensemble bien ordonné est nécessuirement dénombrable* qui me paraît très vraisemblable. Mais, la démonstration de cette proposition paraît présenter, dans l'état actuel de la Science, de grandes difficultés, puisque nous n'avons pas encore classées *toutes* les méthodes d'ordonner les ensembles.

Il suffit pour cela de réunir en un seul stystème *tous* les points x de l'axe OX dont les ensembles correspondants R_x sont *semblables deux à deux.* Nous obtenons ainsi un ensemble e bien déterminé et parfaitement défini par la connaissance d'un seul son point x.

On voit bien que ces ensembles réunions e sont tous sans point commun deux à deux et que la totalité lebesguienne $\mathcal{E}$ est la *somme* de *tous* ces ensembles réunions e.

D'après la théorie formelle, on voit bien que *c'est cet ensemble-réunion e qui est. par définition, un nombre transfini*, de la même manière qu'un nombre réel est, par définition, un ensemble de points rationnels satisfaisant aux conditions bien connues de la théorie de Dedekind. *La totalité des nombres transfinis n'est autre chose que la totalité de ces ensembles-réunions e*, et il importe de remarquer que *l'existence* de cette totalité est entièrement due à l'*Axiome de Partage*, puisque c'est ce partage de la totalité lebesguienne $\mathcal{E}$ en ensembles-réunions e qui crée cette totalité des nombres transfinis.

Ces ensembles-réunions e peuvent être rangés d'une manière *bien ordonnée*: il suffit de dire que l'un d'eux e est *avant* e', si l'ensemble bien ordonné R_x correspondant à un point x de e est moins étendu que l'ensemble $R_{x'}$ correspondant à un point x' de e'. Avec cette convention, la totalité des e est mise sous la forme bien ordonnée (W)

$$(W) \qquad e_0, e_1, e_2, \dots; e_\omega, \dots e_\alpha, \dots$$

Enfin, on remarque que, quel que soit un point x de e_x, l'ensemble bien ordonné R_x est semblable au segment de (W) défini par e_x.

68. Ceci étant établi, une question très importante se pose: *quelle est la nature de ces ensembles-réunions e?*

Dans nos démonstrations nous ferons usage du lemme suivant:

Lemme I. — *Si nous savons nommer un point de e_α, nous savons nommer un point distingué dans chacun des e_β qui précédent e_α.*

En effet, soit x un point nommé de e_α. L'ensemble bien ordonné R_x est aussi nommé. Soit e_β un élément de W précédent e_α. Comme tout ensemble bien ordonné $R_{x'}$, x' étant un point de e_β, est semblable au même segment bien déterminé de R_x, et comme ce segment est évidemment un R_ξ, on voit bien que le point nommé ξ, appartient à e_β. Ainsi. nous avons un point distingué de e_β.

c. q. f. d.

Ce lemme étant établi, voici un théorème relatif à la question posée:

Théorème. — *Pour que nous sachions nommer une construction de e_α, au moyen des opérations: somme, partie commune, à partir d'intervalles, il faut et il suffit que nous sachions nommer un point de e_α.*

La condition est nécessaire. — En effet, si nous savons nommer une telle construction de e_α, nous savons nommer une représentation parametrique $x = f(t)$ de e_α. Alors, en faisant $t = \frac{1}{2}$, nous avons un point *nommé* dans e_α.

La condition est suffisante. — D'après le lemme précédent, si nous savons nommer un point, soit x_0, dans e_x, nous savons nommer un point distingué x' dans chaque e' précédent e_α.

D'autre part, nous avons vu (*voir* le théorème du nº 59) que, étant donné un ensemble énumérable bien ordonné W_1, l'ensemble des points x du complémentaire de E dont R_x correspondants ne dépassent pas W_1, est un ensemble *effectivement* mesurable B (c'est-à dire nous savons indiquer une construction de cet ensemble). En prenant pour W_1 l'ensemble bien ordonné R_{x_0}, nous obtenons comme conséquence que la somme de tous les e' qui précédent $e_{\alpha+1}$ est un ensemble *effectivement* mesurable B.

Ce raisonnement est encore applicable à tout ensemble e' précédent e_α, puisque nous savons nommer un point x' de e'.

Il résulte de là que la somme des ensembles e' précédents e_α est encore effectivement mesurable B. Donc e_α est *effectivement* mesurable B. c. q. f. d.

Si un ensemble e_α ne contient aucun point qu'on peut nommer, e_α est un ensemble mesurable B *en soi*, puisqu'on ne saura jamais nommer une construction de e_α.

69. **Le paradoxe du transfini.** Ce paradoxe consiste précisément en ce qu'on ne peut pas définir *tous* les nombres transfinis au moyen des notations de passages à la limite successifs ou superposés: il n'est pas possible de fixer une désignation uniforme de *tous* les nombres transfinis [1]).

Précisons un peu ce paradoxe.

Lemme. *Pour qu'on sache nommer un point de e_α, il faut et il suffit qu'on sache avoir une suite fondamentale et une seule pour chacun des éléments limites de W non supérieures à e_α.*

[1]) *Voir* M. E. Borel: «*La Philosophie mathématique et l'infini*» (Revue du Mois, 1912).

La condition est nécessaire. — En effet, si x est un point nommé de e_x, R_x est ensemble bien ordonné nommé. D'ailleurs, nous savons nommer un numérotage de R_x au moyen des entiers positifs puisque R_x est formé de points rationnels. Comme le segment de W défini par e_α est semblable à R_x, nous savons numéroter les éléments e' de ce segment au moyen des entiers positifs:

$$e'_1,\ e'_2,\ e'_3, \ldots,\ e'_n, \ldots$$

Soit e' un élément *limite* de W, non supérieur à e_α. Prenons, dans la suite précédente, le premier élément inférieur à e', soit e'_{λ_1}, $\lambda_1 \geqslant 1$. Prenons ensuite le premier élément supérieur à e'_{λ_1} dans W et inférieur à e', soit e'_{λ_2}, $\lambda_2 > \lambda_1$. On peut continuer l'application de la méthode indéfiniment. On forme de cette manière une suite

$$e'_{\lambda_1},\ e'_{\lambda_2}, \ldots,\ e'_{\lambda_k}, \ldots$$

qui est évidemment fondamentale pour e'.

La condition est suffisante. — Pour avoir un point nommé de e_α, il suffit *de savoir nommer un numérotage de segment de W défini par e_α au moyen des entiers positifs*. En effet, nous pouvons, dans ces conditions, déterminer un ensemble ϱ bien ordonné et formé de points rationnels (le rang étant conforme à la direction positive) tel qu'il soit semblable à ce segment. Comme cet ensemble est un R_ξ, nous avons un point ξ nommé dans e_α.

Tout revient donc à nommer un numérotage de ce segment.

Je dis qu'on sait un numérotage *déterminé* du segment défini par e_β, si l'on sait un et un seul numérotage du segment défini par chacun des éléments e' précédents e_β.

En effet, si e_β est de *première espèce*, on déduit le numérotage du segment défini par e_β du numérotage du segment défini par $e_{\beta-1}$

$$e'_1,\ e'_2,\ e'_3, \ldots,\ e'_n, \ldots$$

en ajoutant à cette suite un seul élément $e_{\beta-1}$

$$e_{\beta-1},\ e'_1,\ e'_2,\ e'_3, \ldots,\ e'_n, \ldots$$

Si e_β est de *seconde espèce*, nous avons, d'après l'hypothèse, *une seule* suite fondamentale

$$e_{\lambda_1},\ e_{\lambda_2}, \ldots,\ e_{\lambda_x}, \ldots$$

pour e_β.

Effectuons un numérotage *déterminé* et *unique* du segment défini par chaque e_{λ_k} (ce qui est possible, d'après l'hypothèse) et considérons le tableau à double entrée

$$\begin{array}{l} e'_{\lambda_1},\ e''_{\lambda_1},\ e'''_{\lambda_1},\ldots \\ e'_{\lambda_2},\ e''_{\lambda_2},\ e'''_{\lambda_2},\ldots \\ e'_{\lambda_3},\ e''_{\lambda_3},\ e'''_{\lambda_3},\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ainsi obtenu.

Si nous rangeons les termes de ce tableau dans une suite simple et supprimons les éléments répétés, nous obtiendrons évidemment un numérotage déterminé du segment défini par e_β.

Nous concluons de là qu'on sait un numérotage déterminé du segment de W défini par e_α. c. q. f. d.

Ceci étant établi, revenons au paradoxe du transfini.

La désignation des nombres transfinis *non limites* est évidemment unique, étant de la forme $\alpha + n$. Ce sont les nombres *limites* qui présentent des difficultés pour la notation.

Comme chaque suite fondamentale n'est autre chose qu'un passage à la limite, nous voyons bien que nous avons une désignation *unique* de tous les nombres transfinis qui sont inférieurs à un e_α *dans lequel nous pouvons nommer un point.*

Donc, *le paradoxe du transfini revient à nommer un et un seul point dans chacun des éléments e_α de la totalité W, donc à la réalisation du choix lebesguien (n⁰ 64) dans tous les e_α.*

70. On étend sans aucune difficulté les considérations précédentes au cas du crible quelconque (non canonique).

Soit C un crible quelconque, E un ensemble de points criblé au moyen de C, et $\mathcal{E}$ le complémentaire de E.

D'après les raisonnements du n⁰ 67, nous pouvons écrire

$$\mathcal{E} = e_0 + e_1 + \ldots + e_\omega + \ldots + e_\alpha + \ldots,$$

où tous les R_x sont semblables lorsque x reste dans e_α et ils sont non semblables lorsque x sort de e_α.

Toutes les conclusions restent encore les mêmes; *si nous pouvons nommer un point de e_α* nous savons le construire, à partir d'intervalles (parallélépipèdes). La seule différence que présente le cas général avec le cas précédent consiste précisément en ce que *certains de ces ensembles-réunions e_α peuvent être vides.*

Si l'ensemble donné E est mesurable B, tous les termes de la suite transfinie

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots,\ e_\omega,\ldots,\ e_\alpha,\ldots$$

à partir de certain terme, sont *vides.* Si l'ensemble donné E est non mesurable B, la suite considérée est essentiellement *transfinie.*

Comme la totalite $\mathcal{E}$ est la somme de *tous* les e_α, nous remarquons bien que, *si l'un au moins des termes, de la suite transfinie est un ensemble non dénombrable, il y a un ensemble parfait contenu dans ce terme, donc contenu dans $\mathcal{E}$.*

Donc, *dans ce cas, le complémentaire de E* **a** *la puissance du continu.*

Il n'y a qu'un cas extraordinaire, celui où chaque ensemble e_α est dénombrable ou consiste en un et un seul point.

Alors, le problème se pose de savoir si ce cas extraordinaire est *réellement* possible? C'est *un „problème" sur la puissance des ensembles complémentaires des ensembles analytiques.*

D'après les considérations du numéro précédent, on voit bien que ce „problème" *n'est qu'une des formes du paradoxe du transfini.*

Ces considérations sont intimement liées à la méthode de la diagonale de G. Cantor.

XV — Les ensembles projectifs [1]).

71. C'est M. H. Lebesgue qui a signalé le grand intérêt théorique à étudier *la projection*, comme *une des opérations le plus simples et, en même temps, les plus importantes de Géométrie*, opération permettant de former des ensembles nouveaux *qu'on peut nommer* à partir d'ensembles effectifs déjà connus [2]). C'est suivant cette idée de M. H. Lebesgue qu'on obtient d'abord, à partir des ensembles mesurables B, tous les ensembles *analytiques E*; puis, à partir de leurs complémentaires CE, une classe nouvelle d'ensembles PCE d'une nature tout inconnue mais *qu'on peut nommer*; puis, à partir de leurs complémentaires $CPCE$, les ensembles nouveaux $PCPCE$ *qu'on peut encore nommer*: ce sont les *ensembles projectifs.*

[1]) Je me borne à un exposé bref des propriétés des *ensembles projectifs. Voir* mes Notes dans les *Comptes Rendus* des 4 mai, 25 mai, 15 juin, 13 juillet et 17 août 1925.

[2]) *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1918, p. 242.

Posons la définition de *classe d'un ensemble projectif*. Pour fixer les idées, nous nous bornons au cas des ensembles *linéaires*.

Soit E un ensemble quelconque de points dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ à m dimensions, $m > 1$. Nous désignerons par PE la projection orthogonale de E sur un espace euclidien $\mathcal{E}'$ à $m-1$ dimensions situé dans l'espace $\mathcal{E}$, et par CE le complémentaire de E relativement à $\mathcal{E}$.

Ceci étant établi, nous posons la définition suivante:

Nous dirons qu'un ensemble linéaire est un ensemble projectif de classe n, *s'il peut se mettre sous la forme*

$$PC\ldots PE \text{ ou } CPC\ldots PE,$$

où E est un ensemble mesurable B situé dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions et où la lettre P alternant avec la lettre C est écrite précisément n fois, et si cela est impossible lorsque l'on remplace l'entier positif n par un nombre plus petit.

Cette définition étant posée, on voit immédiatement que tout ensemble analytique, ou son complémentaire, n'est qu'un ensemble *projectif de classe* 1, et *vice versa*; donc la théorie des ensembles analytiques se confond avec la théorie des ensembles projectifs de classe 1. Cette remarque fait comprendre l'intérêt de la notion d'*ensemble projectif*.

72. On démontre d'abord sans peine, en appliquant la diagonale de Cantor, qu'*il existe des ensembles projectifs de toute classe.* D'ailleurs, la somme d'un nombre *fini* d'ensembles projectifs et la partie commune à un nombre *fini* d'ensembles projectifs sont encore des ensembles *projectifs*. Mais une propriété bien plus remarquable et qui est une des plus importantes est la suivante: tous les ensembles non mesurables B qui ont été jusqu'ici, qu'ils se soient présentés „naturellement" ou qu'ils aient été nommés sans l'emploi du raisonnement de M. Zermelo (Axiome du Choix) pour fournir des exemples de toutes espèces, sont tous *projectifs*. Ce résultat, peu surprenant au premier abord, étonnera plus si l'on rapelle qu'il y a, parmi les ensembles non mesurables B *qu'on peut nommer*, des ensembles tels que dans la définition de chacun d'eux devraient intervenir effectivement *tous* les nombres transfinis (Axiome du Partage) et non pas seulement ceux qui sont inférieurs à l'un d'eux fixé d'avance.

La théorie des ensembles projectifs présente de grandes difficultés. Il est vrai que la théorie des ensembles complémentaires des ensembles analytiques présente une difficulté essentielle relative à la puissance d'un tel ensemble, mais les difficultés s'accroissent infiniment lorsqu'il s'agit des ensembles projectifs: on ne sais pas, par exemple, si un ensemble projectif *de classe* 2 a la puissance du continu, s'il a la catégorie déterminée (c'est-à dire. s'il est „un ensemble Z"), ni même s'il est mesurable au sens de M. H. Lebesgue.

Ces difficultés et la facilité même avec laquelle on trouve le transfini toujours exclu, nous amènent à examiner plus attentivement la légitimité de ces ensembles. Les difficultés de la théorie des ensembles projectifs ont leur origine dans ce que l'opération: prendre un complémentaire est une opération *purement négative.*

73. Nous allons citer quelques exemples curieux d'ensembles projectifs.

Premier exemple. — Prenons l'espace euclidien $OXYZ$ et, dans le plan XOZ, un ensemble analytique universel U (nº 63). Soit U' un ensemble mesurable B situé dans le plan YOZ et tel que nous avons en le coupant avec les droites parallèles à l'axe OZ tous les ensembles *parfaits* linéaires non denses possibles. On peut déterminer un tel ensemble U' sans aucune difficulté.

Cela posé, désignons par E un ensemble de points dans l'espace à trois dimensions tels que leurs projections orthogonales sur le plan XOZ appartiennent à U. Soit E' un ensemble analogue relativement à U'

On voit bien que E est un ensemble *analytique* et que E' est *mesurable* B, donc analytique. Nous concluons de là que la partie commune à E et E' est un ensemble analytique; désignons-le par $E.E'$.

Projetons $E.E'$ sur le plan XOY: nous avons un ensemble analytique plan $P(EE')$. Prenons le complémentaire de cet ensemble et projetons-le sur l'axe OX: nous obtenons un *ensemble projectif* linéaire:

$$\pi = PCP(EE').$$

Cela posé, soit U'' un ensemble *mesurable* B situé dans le plan YOZ et tel que nous avons en le coupant avec les droites parallèles à l'axe OZ tous les ensembles *dénombrables* possibles. Soit E'' un ensemble des points dans l'espace à trois dimensions dont les projections sur le plan YOZ appartiennent à U'': c'est un ensemble *mesurable B* Nous concluons de là que la somme $E+E''$ est un ensemble *analytique.*

Prenons le complémentaire de $E+E'$ et projetons-le sur le plan XOY: nous avons un ensemble *projectif* $PC(E+E')$. Prenons son complémentaire et projetons-le sur l'axe OX: nous obtenons un ensemble *projectif* linéaire:

$$\delta = PCPC(E+E').$$

Cela posé, prenons, sur l'axe OX, la somme

$$\pi + \delta$$

et désignons par e le complémentaire de $\pi+\delta$: *c'est* évidemment *un ensemble projectif.*

Cet ensemble projectif e possède cette pr priété intéressante:

Si l'on savait nommer un point de e, on aurait un ensemble analytique linéaire dont le complémentaire est non dénombrable, et en même temps ne contient aucun ensemble parfait.

En effet, si nous déchiffrons le sens des constructions si compliquées des deux ensembles projectifs linéaires π et δ, voici ce que nous trouvons: δ est une collection des points x en lesquels les parallèles à l'axe OZ coupent l'ensemble universel U en les ensembles analytiques *triviaux* dont le complémentaire contient un ensemble parfait; et δ est une collection des points x dont les ensembles analytiques linéaires correspondants ont les complémentaires au plus dénombrables, c'est-à-dire encore *triviaux*. Si nous supprimons dans l'axe OX tous les points de π et de δ, nous trouvons bien entendu les points x qui correspondent aux ensembles analytiques *extraordinaires*.

On ne trouve donc ici qu'une complication logique bien dissimullée sous un appareil *quasi-géométrique.*

Second exemple. — Prenons, dans l'espace $OXYZ$, un ensemble analytique U tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan XOY, nous avons tous les ensembles analytiques plans possibles (n° 63, *Remarque* I).

Soit E une collection des points de l'axe OZ tels que les plans parallèles au plan XOY et menés par ce points coupent U en les ensembles analytiques plans dont les complémentaires sont non dénombrables et ne contiennent aucun ensemble parfait.

D'autre part, soit E' une collection de points de l'axe OZ tels

que les plans parallèles au plan XOY et menés par ces points coupent U en les ensembles analytiques plans dont les complémentaires rencontrent chaque droite parallèle à l'axe OY en un et un seul point.

Les considérations analogues aux précédentes nous montrent que E et E' sont des ensembles linéaires *projectifs*. Donc, la partie commune e à E et E' est encore un ensemble *projectif.*

On voit bien que *la personne qui saurait nommer un point de l'ensemble projectif linéaire e aurait tous les points d'une droite parallèle à l'axe OX numérotés sans ambiguïté au moyen de tous les nombres transfinis de seconde classe* [1]).

Il suffira d'un peu de patience pour décrire une construction donnant les ensembles les plus extravagants; mais cette „construction" renfermerait plusieurs opérations C (prendre le complémentaire) superposées et ne servirait à rien. On peut voir que cette opération C étant *purement négative* introduit des ensembles non définis *réellement* [2]).

Note.

On trouve les résultats principaux sur les ensembles analytiques énoncés sans démonstrations dans deux Notes des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*: M. Souslin. — *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis;* N. Lusin. — *Sur la classification de M. Baire* (séance du 8 janvier 1917)

La mort prématurée de Souslin et les difficultés de la communication internationale ont empêché de publier une exposition détaillée de la théorie des ensembles analytiques. C'est M. W. Sierpiński qui a trouvé d'une manière indépendante les démonstrations de toutes les propositions de cette théorie et les a publiées dans une série de travaux parus notamment dans son journal *Fundamenta Mathematicae.*

La théorie des ensembles projectifs a été le sujet des leçons que j'ai professées en 1924—1925 à l'Université de Moscou; une partie des résultats relatives aux ensembles projectifs a été publiée par moi dans cinq Notes des *Comptes Rendus* (4 mai, 25 mai,

[1]) On ne peut pas dire ni que e est vide, ni que e est non vide, puisque cela dépend du champ des lois.

[2]) *Voir* ma Note dans les *Comptes Rendus: Sur le problème de M. Emile Borel et la méthode des résolvantes,* 17. août 1925.

15 juin, 13 juillet, 17 août 1925). Mais un peu avant M. W. Sierpiński avait signalé, dans un article de *Fundamenta Mathematicae* 1925, les difficultés que soulèvent les ensembles projectifs *de classe 2*.

Table des matières.
