Sur un ensemble G_δ ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Introduction.

1. Si l'on considère les ensembles ponctiformes d'un espace euclidien à plus d'une dimension (d'un R_q où $q>1$, comme nous dirons pour abréger), un problème s'impose qui est fondamental au point de vue de l'Analysis Situs: *existe-t-il dans ces espaces des ensembles ponctiformes qui ne sont homéomorphes à aucun ensemble linéaire?* En d'autres termes: l'espace R_q où $q>1$, contient-il des ensembles ponctiformes d'un *type topologique* essentiellement non linéaire?

2. Il a été démontré par moi et par M. Sierpiński[1]) que l'ensemble des points d'un carré quelconque peut être décomposé en deux ensembles ponctiformes. En appliquant à ces ensembles un critère que j'ai donné en 1918[2]), ou bien le critère qui sera exposé dans la suite, on constate que ces deux ensembles ne peuvent être homéomorphes à un ensemble linéaire. R_2 *contient donc des ensembles ponctiformes d'un type topologique non linéaire.* L'exemple cité est le seul connu à l'heure actuelle (à part ceux que l'on pourrait obtenir en utilisant le théorème de M. Zermelo); d'ailleurs il a été obtenu dans un autre but.

---

[1]) S. Mazurkiewicz, Bull. Acad. Cracovie, Janvier 1913; W. Sierpiński, ibid., Février 1913.

[2]) S. Mazurkiewicz, Wektor VI (1918), p. 42—51 (en polonais).

3. Le problème posé peut être précisé, si l'on ne considère que des ensembles ponctiformes d'une certaine famille, p. ex. les ensembles mesurables B (ensembles de Borel) d'une classe déterminée. Considérons d'abord les ensembles ponctiformes fermés.

Il résulte d'un théorème de M. Brouwer[1]) que tout ensemble ponctiforme fermé est homéomorphe à un ensemble linéaire. On peut démontrer qu'il en est de même des ensembles ponctiformes F_σ (c. à d. ensembles-sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés).

4. Le résultat est différent, si l'on considère les ensembles G_δ (ensembles de Borel au sens strict). Il existe un ensemble G_δ ponctiforme, situé sur le plan et qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire. La construction d'un tel ensemble est le but de cet ouvrage. J'examine d'abord la notion de coupure entre deux points d'un continu quelconque. Ensuite, je donne une condition nécessaire pour qu'un ensemble ponctiforme soit homéomorphe à un ensemble linéaire; cette condition diffère de celle que j'ai donnée en 1918 et elle est plus maniable. Enfin, j'introduis plusieurs ensembles auxiliaires à l'aide desquels je définis l'ensemble cherché.

I. Les coupures irréductibles entre deux points.

5. *Notations.* A désignant un ensemble quelconque d'un R_q, je désignerai par $\mathfrak{B}(A)$ l'ensemble des points intérieurs de A (par rapport à R_q) et par $\mathfrak{F}(A)$ la frontière de A. Je vais employer le calcul symbolique (emprunté à la Logistique)[2]).

6. *Définition.* A désignant un continu situé dans R_q et $a.b$ deux points de A, je dirai que l'ensemble B *coupe* A *entre* a *et* b, ou bien qu'il est une *coupure de* A *entre* a *et* b, si 1) $B \subset A$, 2) B ne contient ni a ni b, 3) B est fermé, 4) B admet un point commun avec tout $\mathfrak{C}(a,b;A)$. Ce dernier symbole désigne un ensemble fermé, bien-enchainé, contenant a et b et contenu dans A. Une coupure de A entre a et b sera désignée par $\mathfrak{S}(a,b;A)$.

---

[1]) L. E. J. Brouwer, Proceed. Acad. Amsterdam XII, 2, p. 788—790.

[2]) S. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Thèse (1911). Chap. I.

7. *Définition.* Un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ irréductible par rapport à la propriété d'être un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ [1]) sera désigné par $\mathfrak{S}_i(a,b;A)$ et *nommé coupure irréductible de A entre a et b.*

8. *Lemme I.* *Prémisses*: 1) $B \subset B_1 \subset A$, 2) *B_1 ne contient ni a ni b,* 3) *B_1 est fermé,* 4) *B est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$.*

Thèse: *B_1 est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$.*

La démonstration est immédiate.

9. *Lemme II.* *Prémisses*: 1) *A_n est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ borné,* $n=1,2,\ldots$, 2) $A_{n+1} \subset A_n$.

Thèse: *$\Pi\{A_n\}$ est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$.*

En suivant la terminologie de M. Brouwer, on peut énoncer ce lemme de la manière suivante: la propriété d'être un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ est *inductive.*

Démonstration. On a évidemment

$$\Pi\{A_n\} \subset A_1. \tag{1}$$

D'après la prémisse 1), A_1 est contenu dans A et ne contient ni a ni b. Donc, en vertu de (1), $\Pi\{A_n\}$ est contenu dans A et ne contient ni a ni b. Les A_n étant fermés, il en est de même de l'ensemble de leurs points communs $\Pi\{A_n\}$ [2]). Enfin, soit C un $\mathfrak{C}(a,b;A)$ quelconque. On a

$$\Pi\{A_n\}\cdot C = \Pi\{A_n \cdot C\}. \tag{2}$$

Les ensembles $A_n . C$ sont fermés, bornés et non vides. On a en vertu de la prémisse [2])

$$A_n \cdot C \supset A_{n+1} \cdot C \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{3}$$

Il en résulte [3]) que l'ensemble (2) n'est pas vide, c. q. f. d.

10. *Théorème I.* *Prémisse*: *B est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ borné.*

Thèse: *Il existe un $\mathfrak{S}_i(a,b;A) \subset B$* [4]).

Démonstration. L'ensemble des hypersphères à q dimensions dont le rayon s'exprime par un nombre rationnel et dont le centre a toutes les coordonnées rationnelles, est dénombrable. Rangeons ces hypersphères en une suite simplement infinie $\{H_n\}$ où $n=1,2,\ldots$ et posons:

---

[1]) S. Janiszewski, l. c., p. 7.

[2]) Voir p. ex. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 225.

[3]) F. Hausdorff, l. c., p. 230.

[4]) Ce théorème rentre comme cas particulier dans un théorème général démontré à l'aide des nombres transfinis par M. L. E. J. Brouwer, Proceed. Acad. Amsterdam XIV (1911), p. 138.

(4) $$B_1 = B,$$

(5) $$B_{n+1} = \begin{cases} B_n - \mathfrak{W}(H_n), & \text{si } B_n - \mathfrak{W}(H_n) \text{ est un } \mathfrak{S}(a,b;A) \\ B_n & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

(6) $$B_0 = \Pi\{B_n\}.$$

On voit immédiatement que tout B_n est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ borné et que $B_{n+1} \subset B_n$. D'après **9**, l'ensemble B_0 est un $\mathfrak{S}(a,b;A)$. Supposons qu'il existe un $\mathfrak{S}(a,b;A)$ — désignons le par $B^{(0)}$ — contenu dans B_0 et tel que

(7) $$B_0 - B^{(0)} \neq 0.$$

Soient: c un point de $B_0 - B^{(0)}$, a un nombre rationnel satisfaisant à l'inégalité

(8) $$0 < a < \varrho(c, B^{(0)})/2$$

et c_1 un point de R_q à coordonnées rationnelles, satisfaisant à l'inégalité

(9) $$\varrho(c, c_1) < a.$$

L'hypersphère de centre c_1 et de rayon a figure dans la suite $\{H_n\}$; soit n_1 son indice dans cette suite. On voit aisément que les inégalités (8) et (9) entraînent:

(10) $$c \subset \mathfrak{W}(H_{n_1}),$$

(11) $$B^{(0)} \cdot \mathfrak{W}(H_{n_1}) = 0.$$

On a d'autre part

(12) $$B^{(0)} \subset B_0 \subset B_{n_1},$$

donc

(13) $$B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1}) = (B_{n_1} + B^{(0)}) - \mathfrak{W}(H_{n_1}) =$$
$$= (B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1})) + (B^{(0)} - \mathfrak{W}(H_{n_1})) =$$
$$= (B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1})) + [B^{(0)} - (B^{(0)} \cdot \mathfrak{W}(H_{n_1}))] = (B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1})) + B^{(0)} \supset B^{(0)}.$$

L'ensemble $B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1})$ est fermé [1]), contenu dans A (puisque B_{n_1} est contenu dans A), ne contient ni a ni b (puisque B_{n_1} ne les contient pas) et contient, d'après (13), un $\mathfrak{S}(a,b;A)$,

[1]) F. Hausdorff, l. c., p. 228.

à savoir $B^{(0)}$. D'après **8**, l'ensemble $B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1})$ est un $\mathfrak{S}(a, b; A)$, donc, en vertu de (5),

(14) $$B_{n_1+1} = B_{n_1} - \mathfrak{W}(H_{n_1}).$$

D'après (10), c n'appartient pas à B_{n_1+1}, donc a fortiori à B_0, contrairement à l'hypothèse. B_0 ne peut donc contenir aucun $\mathfrak{S}(a, b; A)$ différent de B_0 et par suite B_0 est un $\mathfrak{S}_i(a, b; A)$ contenu dans B, c. q. f. d.

11. ***Théorème II.*** *Prémisse: A est un $\mathfrak{S}_i(a, b; R_2)$.*

Thèse: A est un continu.

Démonstration. L'ensemble $R_2 - A$ est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines connexes dont les frontières sont contenues dans la frontière de A [1]). Soit D_1 celui de ces domaines qui contient a. D_1 étant un domaine connexe, s'il contenait b, il contiendrait aussi un continu contenant a et b. Ce continu n'aurait aucun point commun avec A et, contrairement à l'hypothèse, A ne serait pas un $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$. Donc D_1 ne contient pas b. Comme

(15) $$\mathfrak{F}(D_1) \subset \mathfrak{F}(A) \subset A,$$

la frontière de D_1 ne contient b non plus. Par suite, b appartient à l'ensemble $R_2 - [D_1 + \mathfrak{F}(D_1)]$, qui est aussi la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines connexes dont les frontières sont contenues dans celle de l'ensemble $D_1 + \mathfrak{F}(D_1)$, c. à d. dans $\mathfrak{F}(D_1)$. L'ensemble $D_1 + \mathfrak{F}(D_1)$ étant un continu, ces frontières le sont aussi [2]). Soit D_2 celui des domaines connexes formant l'ensemble $R_2 - [D_1 + \mathfrak{F}(D_1)]$ qui contient b. On a, en tenant compte de (15),

(16) $$\mathfrak{F}(D_2) \subset \mathfrak{F}(D_1) \subset A.$$

Comme point de D_1, a n'est pas contenu ni dans $R_2 - [D_1 + \mathfrak{F}(D_1)]$ ni à plus forte raison dans D_2. Comme D_2 contient b, tout $\mathfrak{C}(a + b, R_2)$ a un point commun avec $\mathfrak{F}(D_2)$ [3]). Ce dernier ensemble est, de plus, fermé et ne contient ni a ni b (puisqu'il est contenu dans A).

---

[1]) F. Hausdorff, l. c., p. 330.

[2]) C'est le théorème de Phragmén; voir p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 345.

[3]) Voir p. ex. L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 69, p. 170, th 1.

C'est donc un $\mathfrak{S}(a,b;R_2)$, sous-ensemble de A. Mais A étant un $\mathfrak{S}_i(a,b;R_2)$, on doit avoir

$$A=\mathfrak{F}(D_2). \tag{17}$$

Comme $\mathfrak{F}(D_2)$ est un continu, A l'est également, c. q. f. d.

II. Sur les conditions nécessaires pour qu'un ensemble ponctiforme soit homéomorphe à un ensemble linéaire.

12. Comme je n'ai pas trouvé de conditions suffisantes, assez simples et maniables, je ne considère ici que les conditions nécessaires, qui sont d'ailleurs les seules dont on aura besoin dans la suite.

13. ***Définition.*** *J'appelle séparés deux ensembles A et B assujettis à la condition*

$$A\cdot B=A'\cdot B=A\cdot B'=0. \tag{18}$$

Cette condition est, comme on voit immédiatement, équivalente à la suivante:

$$\bar{A}\cdot B=A\cdot\bar{B}=0. \tag{19}$$

14. ***Lemme III.*** *Prémisses*: 1) $A=A_1+A_2$, 2) $A_1\cdot A_2=0$, 3) A_1 *et* A_2 *sont fermés relativement à* A [1]).
Thèse: A_1 *et* A_2 *sont séparés.*

Démonstration. On a d'après la prémisse 3):

$$\begin{aligned} A_1'\cdot A &\subset A_1, \\ A_2'\cdot A &\subset A_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Il en résulte, en tenant compte des prémisses 1) et 2):

$$\begin{aligned} A_1'\cdot A_2&=(A_1'\cdot A_2)\cdot A_2\subset(A_1'\cdot A)\cdot A_2\subset A_1\cdot A_2=0, \\ A_1\cdot A_2'&=A_1\cdot(A_1\cdot A_2')\subset A_1\cdot(A\cdot A_2')\subset A_1\cdot A_2=0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$A_1\cdot A_2=A_1\cdot A_2'=A_1'\cdot A_2=0, \tag{22}$$ c. q. f. d.

---

[1]) F. Hausdorff, l. c., p. 240.

15. ***Lemme IV.*** *Prémisses:* 1) *A et B sont homéomorphes,* 2) *A_1 est un sous-ensemble de A, fermé relativement à A,* 3) *B_1 est le sous-ensemble de B correspondant à A_1* (suivant la correspondance biunivoque et bicontinue qui établit l'homéomorphie entre A et B).

Thèse: B_1 est fermé relativement à B.

La démonstration est immédiate [1]).

16. ***Théorème III.*** *Prémisse: A est un ensemble ponctiforme situé dans R_q et homéomorphe à un ensemble linéaire.*

Thèse: a_1 et a_2 désignant deux points de A et D un domaine contenant a_1, il existe une décomposition de A en deux ensembles séparés A_1 et A_2, tels que:

(23) $$a_1 \subset A_1, \qquad a_2 \subset A_2, \qquad A_1 \subset D.$$

Démonstration. Soit B un ensemble linéaire (ou, ce qui revient au même, un ensemble de nombres réels) homéomorphe à A. Une correspondance biunivoque et bicontinue étant établie entre A et B, soient α_1 et α_2 les nombres de B qui correspondent respectivement à a_1 et a_2. Le point a_1 appartenant à D, on peut déterminer un nombre $\varepsilon_1 > 0$ de manière que l'inégalité

(24) $$\varrho(t, a_1) \leqslant \varepsilon_1$$

entraîne pour tout point t

(25) $$t \subset D.$$

La correspondance entre A et B est bicontinue; on peut déterminer par suite un nombre $\varepsilon_2 > 0$ de manière que l'inégalité

(26) $$|\alpha_1 - \tau| \leqslant \varepsilon_2,$$

où $\tau \subset B$, entraîne (24) pour le point correspondant t de A. Soit ε_3 le plus petit des deux nombres positifs $|\alpha_1 - \alpha_2|$ et ε_2. Comme ensemble ponctiforme, B ne contient aucun intervalle; on peut donc déterminer deux points β_1 et β_2 n'appartenant pas à B et situés respectivement à l'intérieur des intervalles $\langle \alpha_1 - \varepsilon_3, \alpha_1 \rangle$ et $\langle \alpha_1, \alpha_1 + \varepsilon_3 \rangle$. On a alors

(27) $$\alpha_1 - \varepsilon_3 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_1 + \varepsilon_3.$$

---

[1]) Elle se trouve dans mon mémoire précité de 1918.

Désignons par B_1 l'ensemble des points de B situés dans l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ et posons

(28) $$B_2 = B - B_1.$$

Désignons par A_1 et A_2 les sous-ensembles de A dont les points correspondent à ceux de B_1 et B_2 respectivement. L'égalité (28) entraîne:

(29) $$A_1 + A_2 = A, \qquad A_1 \cdot A_2 = 0.$$

Or, A_1 et A_2 satisfont à la thèse du théorème. En effet, d'après (27), a_1 appartient à B_1, donc

(30) $$a_1 \subset A_1.$$

En vertu de (27) et de la définition de ε_3, on a pour tout $\tau \subset B_1$

(31) $$|\tau - a_1| < \varepsilon_3 \leqslant |a_2 - a_1|.$$

Par conséquent, B_1 ne contient pas a_2; en vertu de (28), a_2 appartient donc à B_2 et par suite

(32) $$a_2 \subset A_2.$$

Soit t un point de A_1; le point correspondant τ de B_1, c. à d. de l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$, satisfait par suite à l'inégalité

(33) $$|\tau - a_1| \leqslant \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2,$$

donc à l'inégalité (26), qui entraîne pour t les formules (24) et (25). Donc

(34) $$A_1 \subset D.$$

Enfin, comme les extrémités β_1, β_2 de l'intervalle $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ n'appartiennent pas à B, l'ensemble B_1 est intérieur et l'ensemble B_2 extérieur à cet intervalle. Il en résulte immédiatement qu'un point de B_1 ne peut pas être point-limite de B_2, ni réciproquement. Les ensembles B_1 et B_2 sont donc fermés relativement à B. D'après **15**, A_1 et A_2 sont fermés relativement à A. Il s'ensuit en vertu de (29) et de **14** que A_1 et A_2 sont séparés. Le théorème est ainsi démontré.

17. ***Théorème IV.*** *Prémisse: A est un ensemble ponctiforme situé dans R_q et homéomorphe à un ensemble linéaire.*

Thèse: a_1 et a_2 étant deux points de A et D un domaine contenant a_1, il existe un $\mathfrak{S}_i(a_1, a_2; R_q)$ contenu dans $D-A$.

Démonstration. Déterminons un nombre $\varepsilon_1>0$ de manière que l'inégalité (24) entraîne (25) et désignons par H l'hypersphère de centre a_1 et de rayon $\varepsilon_1/2$. D'après **16,** on peut décomposer A en deux ensembles séparés A_1 et A_2 satisfaisant aux conditions:

(35) $$a_1 \subset A_1, \qquad a_2 \subset A_2, \qquad A_1 \subset \mathfrak{W}(H).$$

A_1 et A_2 étant séparés, on a

(36) $$A_1 \cdot \bar{A}_2 = 0,$$

donc, pour $t \subset A_1$,

(37) $$\varrho(t, \bar{A}_2) > 0.$$

Soit $\lambda(t)$ le plus grand nombre assujetti aux inégalités:

(38) $$\lambda(t) \leqslant \varepsilon_1/2,$$

(39) $$\lambda(t) \leqslant \varrho(t, \bar{A}_2)/2.$$

Désignons par $H(t)$ l'hypersphère de centre t et de rayon $\lambda(t)$. Posons

(40) $$D_1 = \sum_{t \subset A_1} \{\mathfrak{W}[H(t)]\}.$$

D_1 est évidemment un domaine et on a

(41) $$a_1 \subset A_1 \subset D_1.$$

Soit u un point arbitraire de D_1; il existe alors un point t de A_1 tel que:

(42) $$u \subset \mathfrak{W}[H(t)],$$

(43) $$\varrho(u, t) < \lambda(t) \leqslant \varepsilon_1/2,$$

(44) $$\varrho(u, a_1) \leqslant \varrho(u, t) + \varrho(t, a_1) \leqslant (\varepsilon_1/2) + (\varepsilon_1/2) = \varepsilon_1,$$

puisque d'après (35)

(45) $$t \subset A_1 \subset H.$$

Un point v de $\mathfrak{F}(D_1)$ est point-limite des points u de D_1, donc des points u satisfaisant à (44). Il s'ensuit, la distance étant une fonction continue, que

$$(46) \qquad \varrho(v, a_1) \leqslant \varepsilon_1 \qquad \text{pour tout} \quad v \subset \mathfrak{F}(D_1).$$

Par conséquent:

$$(47) \qquad \mathfrak{F}(D_1) \quad \text{est borné,}$$

$$(48) \qquad \mathfrak{F}(D_1) \subset D,$$

puisque (24) entraîne (25). Un domaine n'ayant par définition aucun point commun avec sa frontière, on a selon (41)

$$(49) \qquad A_1 \cdot \mathfrak{F}(D_1) = 0.$$

Pour un point quelconque u de D_1, il existe un point $t \subset A_1$ tel que l'on a (42), donc, en vertu de (39):

$$(50) \qquad \varrho(u,t) < \lambda(t) \leqslant \tfrac{1}{2}\varrho(t, \bar{A}_2) \leqslant \tfrac{1}{2}[\varrho(t,u) + \varrho(u, \bar{A}_2)],$$

$$(51) \qquad \varrho(u,t) < \varrho(u, \bar{A}_2),$$

$$(52) \qquad \varrho(u, \bar{A}_1) \leqslant \varrho(u,t) \leqslant \varrho(u, \bar{A}_2)$$

et tout point de $\mathfrak{F}(D_1)$, comme point-limite des points de D_1, doit satisfaire encore à la même inégalité. En résumé, la relation $u \subset D_1 + \mathfrak{F}(D_1)$ entraîne

$$(53) \qquad \varrho(u, \bar{A}_1) \leqslant \varrho(u, \bar{A}_2).$$

Supposons maintenant qu'un point u de $D_1 + \mathfrak{F}(D_1)$ appartienne à A_2; on aurait alors

$$(54) \qquad \varrho(u, \bar{A}_2) = 0,$$

d'où, en vertu de (53):

$$(55) \qquad \varrho(u, \bar{A}_1) = 0,$$

$$(56) \qquad u \subset \bar{A}_1,$$

$$(57) \qquad u \subset \bar{A}_1 \cdot A_2,$$

$$(58) \qquad \bar{A}_1 \cdot A_2 \neq 0,$$

ce qui est impossible, A_1 et A_2 étant séparés. Donc, aucun point de $D_1+\mathfrak{F}(D_1)$ ne peut appartenir à A_2, de sorte que:

(59) $$A_2\cdot D_1=0,$$

(60) $$A_2\cdot\mathfrak{F}(D_1)=0.$$

Les relations (49), (60) et (48) entraînent:

(61) $$A\cdot\mathfrak{F}(D_1)=0,$$

(62) $$\mathfrak{F}(D_1)\subset D-A.$$

D'après (41), a_1 est un point de D_1; d'après (35), (59) et (60), a_2 est extérieur à ce domaine; donc tout $\mathfrak{C}(a_1+a_2, R_q)$ admet un point commun avec $\mathfrak{F}(D_1)$. Comme $\mathfrak{F}(D_1)$ est selon (47) borné, fermé et ne contient selon (61) ni a_1 ni a_2, il est un $\mathfrak{S}(a_1, a_2; R_q)$ borné; il contient donc, d'après **10**, un $\mathfrak{S}_i(a_1, a_2; R_q)$ qui est d'après (62) contenu dans $D-A$, c. q. f. d.

III. Définitions et propriétés de quelques ensembles auxiliaires.

18. ***Notations.*** Étant donné dans R_2 un système de coordonnées rectangulaires ξ, η, le symbole (α,β) désignera le point à coordonnées $\xi=\alpha$ et $\eta=\beta$.

Le carré aux sommets opposés $(0,0)$ et $(1,1)$ sera désigné par Q.

Pour $0\leqslant\alpha\leqslant1$, on désignera respectivement par $K(\alpha)$ et $L(\alpha)$ les segments de droite aux extrémités $(\alpha,0)$, $(\alpha,1)$ et $(0,\alpha)$, $(1,\alpha)$.

A étant un sous-ensemble de Q, $K(A)$ et $L(A)$ désigneront respectivement l'ensemble-somme de tous les $K(\alpha)$ et l'ensemble-somme de tous les $L(\alpha)$ satisfaisant aux conditions:

(63) $$K(\alpha)\cdot A\neq0,$$

(64) $$L(\alpha)\cdot A\neq0.$$

19. ***Définitions.*** Les nombres α et ε satisfaisant aux inégalités:

(65) $$0<\alpha<1,$$

(66) $$0<\varepsilon<1-\alpha,$$

nous poserons:

$$(67)\qquad G_1(a,\varepsilon)=\Sigma\{K(a+\varepsilon/i)\}\qquad\text{pour}\quad i=1,2,\ldots,$$

$$(68)\qquad H_1(a,\varepsilon)=\Sigma\{L(a+\varepsilon/i)\}$$

$$(69)\qquad G_2(a,\varepsilon)=K(a)+G_1(a,\varepsilon),$$

$$(70)\qquad H_2(a,\varepsilon)=L(a)+H_1(a,\varepsilon).$$

Étant donné un ensemble A fermé, au plus dénombrable et assujetti aux conditions:

$$(71)\qquad A\subset K(a),\qquad A\supset(a,0),\qquad A\supset(a,1),$$

$G_3(a,A)$ désignera l'ensemble-somme de tous les cercles ayant pour diamètre un intervalle de $K(a)$ contigu à A.

De même, étant donné un ensemble A fermé, au plus dénombrable et assujetti aux conditions:

$$(72)\qquad A\subset L(a),\qquad A\supset(0,a),\qquad A\supset(1,a),$$

$H_3(a,A)$ désignera l'ensemble-somme de tous les cercles ayant pour diamètre un intervalle de $L(a)$, contigu à A.

Enfin, nous poserons:

$$(73)\qquad G_4(a,\varepsilon,A)=G_1(a,\varepsilon)\cdot G_3(a,A),$$

$$(74)\qquad H_4(a,\varepsilon,A)=H_1(a,\varepsilon)\cdot H_3(a,A),$$

$$(75)\qquad G_5(a,\varepsilon,A)=G_4(a,\varepsilon,A)+A,$$

$$(76)\qquad H_5(a,\varepsilon,A)=H_4(a,\varepsilon,A)+A.$$

Je vais indiquer maintenant plusieurs propriétés de ces ensembles auxiliaires, en omettant les démonstrations, qui ne présentent aucune difficulté.

20. *Lemme V. Les ensembles $G_4(a,\varepsilon,A)$ et $H_4(a,\varepsilon,A)$ sont des ensembles-sommes d'une infinité dénombrable de segments de droites (n'ayant deux-à-deux aucun point commun) et d'un ensemble au plus dénombrable.*

21. ***Lemme VI.*** *Les ensembles $G_5(a,\varepsilon,A)$ et $H_5(a,\varepsilon,A)$ sont des F_σ.*

22. ***Lemme VII.*** *On a:*

$$G_5(a,\varepsilon,A)\subset Q, \qquad H_5(a,\varepsilon,A)\subset Q. \tag{77}$$

23. ***Lemme VIII.*** *On a:*

$$G_4(a,\varepsilon,A)\cdot L(A)=0, \qquad H_4(a,\varepsilon,A)\cdot K(A)=0. \tag{78}$$

24. ***Lemme IX.*** 1^0 *Prémisse: C est un continu tel que:*

$$C\subset Q, \qquad C\supset(\xi_1,\eta_1), \qquad C\supset(\xi_2,\eta_2), \tag{79}$$

$$\xi_1<a<\xi_2. \tag{80}$$

Thèse: $C\cdot G_5(a,\varepsilon,A)\neq 0$.

2^0 *Prémisse: C est un continu tel que l'on a* (79) *et*

$$\eta_1<a<\eta_2. \tag{81}$$

Thèse: $C+H_5(a,\varepsilon,A)\neq 0$.

Démonstration. Il suffit évidemment d'établir 1^0. Deux cas sont possibles. Dans le cas où

$$C\cdot A\neq 0, \tag{82}$$

la thèse est vraie, puisqu'on a d'après (75)

$$A\subset G_5(a,\varepsilon,A). \tag{83}$$

Dans le cas contraire, c. à d. lorsque

$$C\cdot A=0, \tag{84}$$

le nombre $\varrho(C,A)$ est positif, car les ensembles C et A sont fermés. On peut donc déterminer un entier m tel que:

$$\varepsilon/m<\xi_2-a, \tag{85}$$

$$\varepsilon/m<\varrho(A,C)/2. \tag{86}$$

On voit immédiatement que

$$C\cdot K\left(a+\frac{\varepsilon}{m}\right)\neq 0. \tag{87}$$

Soit $\left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)$ un point arbitraire de l'ensemble $C\cdot K\left(a+\frac{\varepsilon}{m}\right)$; en désignant par K_1 l'intervalle de $K(a)$ aux extrémités $\left(a, \eta_3-\frac{\varepsilon}{m}\right)$ et $\left(a, \eta_3+\frac{\varepsilon}{m}\right)$, on a pour chaque point (a, η) de K_1

$$\begin{aligned}\varrho[(a,\eta), C] &\leqslant \varrho\left[(a,\eta), \left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)\right]= \\ &=\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m^2}+(\eta-\eta_3)^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{m}\sqrt{2}<\varrho(A,C);\end{aligned} \tag{88}$$

donc (a,η) n'appartient pas à A. Par conséquent

$$K_1\cdot A=0, \tag{89}$$

de sorte que K_1 est situé dans l'un des intervalles contigus à A. Soit K_2 cet intervalle. Désignons par M_1 et M_2 les cercles de diamètre K_1 et K_2 respectivement. On vérifie facilement que

$$\left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)\subset M_1\subset M_2. \tag{90}$$

D'autre part, d'après la définition de $G_3(a, A)$,

$$M_2\subset G_3(a,A) \tag{91}$$

et, en vertu de (67),

$$\left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)\subset K\left(a+\frac{\varepsilon}{m}\right)\subset G_1(a, \varepsilon). \tag{92}$$

Les relations (90), (91), (92) et (73) entraînent

$$\left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)\subset G_4(a,\varepsilon,A)\subset G_5(a,\varepsilon,A). \tag{93}$$

Mais, d'après la définition du point $\left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)$,

$$\left(a+\frac{\varepsilon}{m}, \eta_3\right)\subset C\cdot K\left(a+\frac{\varepsilon}{m}\right)\subset C, \tag{94}$$

donc:

$$C\cdot G_5(a,\varepsilon,A)\supset\left(a+\frac{\varepsilon}{m},\ \eta_3\right), \tag{95}$$

$$C\cdot G_5(a,\varepsilon,A)\neq 0, \tag{96}$$

c. q. f. d.

IV. Construction de l'ensemble G_δ cherché.

25. *Définition de l'ensemble Γ.* Rangeons les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ en une suite infinie

$$\{a_k\} \qquad \text{où} \qquad k=1,2,... \tag{97}$$

et formons trois suites: $\{\beta_m\}$, $\{\varepsilon_m\}$ et $\{A_m\}$, où β_m et ε_m sont des nombres réels assujettis aux conditions:

$$0<\beta_m<1, \tag{C_1}$$

$$0<\varepsilon_m<1-\beta_m \tag{C_2}$$

et A_m des ensembles assujettis aux conditions:

(C_3) A_m est fermé et au plus dénombrable,

$$A_m\subset\begin{cases} K(\beta_m) & \text{pour } m \text{ impair} \\ L(\beta_m) & \text{pour } m \text{ pair,}\end{cases} \tag{C_4}$$

$$A_m\supset\begin{cases} (\beta_m,0) \text{ et } (\beta_m,1) & \text{pour } m \text{ impair} \\ (0,\beta_m) \text{ et } (1,\beta_m) & \text{pour } m \text{ pair.}\end{cases} \tag{C_5}$$

Les suites en question seront déterminées par les trois conventions suivantes:

I. $\beta_1=a_1$; ε_1 est le premier nombre de la suite (97) inférieur à $1-\beta_1$; A_1 est l'ensemble composé de deux points $(\beta_1,0)$ et $(\beta_1,1)$.

II. β_m,ε_m et A_m étant définis pour $m=1,2,...,n$ conformément aux conditions $(C_1)-(C_5)$, nous distinguerons deux cas:

1⁰ $n+1$ est pair. Alors, soient: $\beta_{n+1}=\beta_n$, $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n$ et A_{n+1} l'ensemble des points:

$$(0,\beta_{n+1}),\quad (1,\beta_{n+1}),\quad (\beta_{2k-1},\beta_{n+1}),\quad \left(\beta_{2k-1}+\frac{\varepsilon_{2k-1}}{i},\beta_{n+1}\right), \tag{98}$$

$$\text{où}\quad k=1,2,...,(n+1)/2 \quad\text{et}\quad i=1,2,...$$

2° $n+1$ est impair. β_{n+1} est alors le premier nombre de la suite (97) qui diffère de tous les nombres:

$$(99) \quad \beta_m \quad \text{et} \quad \beta_m+\frac{\varepsilon_m}{i} \quad \text{où} \quad m=1,2,\dots,n \quad \text{et} \quad i=1,2,\dots$$

et qui satisfait à l'inégalité

$$(100) \qquad |\alpha_{\frac{n}{2}+1}-\beta_{n+1}|\leqslant 1/(n+1).$$

Un tel nombre existe évidemment, car l'ensemble (97) est dense dans $\langle 0,1\rangle$ et l'ensemble des points (99) est réductible, de sorte que tout intervalle contenu dans $\langle 0,1\rangle$ contient des points de (97) différents de tous les points (99).

Ensuite, ε_{n+1} est le premier nombre de la suite (97) inférieur à la fois à $1-\beta_{n+1}$ et au plus petit des nombres:

$$(101) \quad |\beta_m-\beta_{n+1}| \text{ et } \left|\beta_m+\frac{\varepsilon_m}{i}-\beta_{n+1}\right| \text{ où } m=1,2,\dots,n \text{ et } i=1,2,\dots$$

Le plus petit de ces nombres existe, car l'ensemble des points (101) est fermé; comme les nombres (101) sont positifs, car β_{n+1} diffère de tous les points (99), leur minimum est aussi positif; donc ε_{n+1} existe également.

Enfin, A_{n+1} est l'ensemble des points:

$$(102) \quad (\beta_{n+1},0), \quad (\beta_{n+1},1), \quad (\beta_{n+1},\beta_{2k}), \quad \left(\beta_{n+1},\ \beta_{2k}+\frac{\varepsilon_{2k}}{i}\right),$$
$$\text{où} \quad k=1,2,\dots\ n/2 \quad \text{et} \quad i=1,2,\dots$$

On voit que cette définition de β_{n+1}, ε_{n+1} et A_{n+1} réalise les conditions $(C_1)-(C_5)$ pour $m=n+1$, si elles sont remplies pour $m=1$. Il en résulte que les conventions I, II, 1° et II, 2° déterminent les suites $\{\beta_m\}$, $\{\varepsilon_m\}$ et $\{A_m\}$ pour tous les m, conformément aux conditions $(C_1)-(C_5)$.

Posons maintenant:

$$(103) \qquad B_m=G_5(\beta_m,\varepsilon_m,A_m) \qquad \text{pour} \quad m=2k-1,$$
$$(104) \qquad B_m=H_5(\beta_m,\varepsilon_m,A_m) \qquad \text{pour} \quad m=2k.$$

Ces définitions ont un sens, comme on voit immédiatement, en tenant compte des conditions $(C_1)-(C_5)$ et de **19**.

Ceci établi, soit

(105) $$\Gamma = Q - \sum\{B_m\}.$$

26. ***Démonstration que l'ensemble Γ est un G_δ.*** D'après **22**, on a pour $m=1,2,\dots$:

(106) $$B_m \subset Q,$$

(107) $$Q = \Gamma + \sum\{B_m\};$$

par conséquent Γ est le complémentaire de $\sum\{B_m\}$ par rapport à Q. D'après **21**, B_m est un F_σ. Or, l'ensemble-somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F_σ étant un F_σ, l'ensemble $\sum\{B_m\}$ est un F_σ et, l'ensemble complémentaire d'un F_σ relativement à un ensemble fermé étant un G_δ, l'ensemble Γ est un G_δ, c. q. f. d.

27. ***Démonstration que l'ensemble Γ est ponctiforme.*** Supposons, par contre, que Γ contienne un continu C; soit (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) un couple de points de C. On a l'une au moins des inégalités:

(108) $$\xi_1 \neq \xi_2,$$

(109) $$\eta_1 \neq \eta_2.$$

Supposons d'abord que c'est (108) qui se présente. On peut admettre alors que $\xi_1 < \xi_2$. D'après (105),

(110) $$C \subset \Gamma \subset Q.$$

Soit N un entier positif tel que

(111) $$N < 3/(\xi_2 - \xi_1).$$

L'intervalle $\left\langle \frac{2\,\xi_1 + \xi_2}{3}, \frac{\xi_1 + 2\,\xi_2}{3} \right\rangle$, contenu d'après (110) dans $\langle 0,1 \rangle$, contient une infinité de nombres rationnels, c. à d. de nombres de la suite (97). Soit α_p le premier nombre de cette suite qui est contenu dans ledit intervalle et pour lequel $p \geqslant N+1$. On a d'après **25**, II, 2⁰ et (100) pour $n+1 = 2p-1$:

(112) $$|\alpha_p - \beta_{2p-1}| \leqslant 1/(2p-1) < 1/p < 1/N < (\xi_2 - \xi_1)/3,$$

(113) $$\alpha_p-(\xi_2-\xi_1)/3<\beta_{2p-1}<\alpha_p+(\xi_2-\xi_1)/3$$

et comme

(114) $$\frac{2\,\xi_1+\xi_2}{3}\leqslant\alpha_p\leqslant\frac{\xi_1+2\,\xi_2}{3},$$

il vient

(115) $$\xi_1<\beta_{2p-1}<\xi_2.$$

D'après **24** (Lemme IX, 1^0), les relations (110) et (115) entraînent:

(116) $$C\cdot G_5(\beta_{2p-1},\varepsilon_{2p-1},A_{2p-1})=C\cdot B_{2p-1}\neq 0,$$

(117) $$C\cdot\sum\{B_m\}\neq 0,$$

de sorte que C ne serait pas contenu dans Γ, contrairement à (110). On démontre pareillement, en s'appuyant sur **24** (Lemme IX, 2^0), que (109) implique aussi une contradiction. Donc, Γ est ponctiforme, c. q. f. d.

28. ***Démonstration que Γ n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire.*** On voit des définitions **19** que:

(118) $$B_{2k-1}\subset G_2(\beta_{2k-1},\varepsilon_{2k-1})=\sum_i\left\{K\left(\beta_{2k-1}+\frac{\varepsilon_{2k-1}}{i}\right)\right\}+K(\beta_{2k-1}),$$

(119) $$B_{2k}\subset H_2(\beta_{2k},\varepsilon_{2k})=\sum_i\left\{L\left(\beta_{2k}+\frac{\varepsilon_{2k}}{i}\right)\right\}+L(\beta_{2k}).$$

Considérons deux ensembles B_{2k-1} et B_{2l-1} où $k<l$. Supposons que ces ensembles aient un point commun (ξ,η); en vertu de (118), ξ est à la fois un des nombres:

(120) $$\beta_{2k-1},\quad \beta_{2k-1}+\frac{\varepsilon_{2k-1}}{i},$$

et un des nombres

(121) $$\beta_{2l-1},\quad \beta_{2l-1}+\frac{\varepsilon_{2l-1}}{i}$$

où $i=1,2,\ldots$

On a par suite $\beta_{2l-1}\leqslant\xi\leqslant\beta_{2l-1}+\varepsilon_{2l-1}$, c. à d.

(122) $$\varepsilon_{2l-1}\geqslant|\xi-\beta_{2l-1}|.$$

Par conséquent, comme ξ appartient à l'ensemble (120), ε_{2l-1} doit égaler ou surpasser le minimum des nombres:

$$(123)\qquad |\beta_{2k-1}-\beta_{2l-1}|,\quad \left|\beta_{2k-1}+\frac{\varepsilon_{2k-1}}{i}-\beta_{2l-1}\right| \quad \text{où} \quad i=1,2,\ldots$$

et a fortiori le minimum des nombres:

$$(124)\quad |\beta_m-\beta_{2l-1}|, \left|\beta_m+\frac{\varepsilon_m}{i}-\beta_{2l-1}\right| \text{ où } m=1,2,\ldots,2l-2 \text{ et } i=1,2,\ldots,$$

puisque $2k-1<2l-1$.

Mais en s'appuyant sur **25**, II, 2[0] et en posant $n+1=2l-1$ (ce qui est légitime, puisque $2l-1>2k-1\geqslant 1$), on voit que ε_{2l-1} est inférieur au minimum de ces nombres. Donc, l'hypothèse que B_{2k-1} et B_{2l-1} ont un point commun conduit à une contradiction et on doit avoir en conséquence

$$(125)\qquad B_{2k-1}\cdot B_{2l-1}=0 \qquad \text{pour tout} \quad k<l.$$

Considérons à présent deux ensembles B_{2k} et B_{2l} où $k<l$. Supposons encore que ces ensembles aient un point (ξ,η) en commun. D'après (119) et **25**, II, 1[0], η appartiendrait donc aux ensembles (120) et (121) à la fois. On a vu que c'est impossible, donc

$$(126)\qquad B_{2k}\cdot B_{2l}=0 \qquad \text{pour tout} \quad k<l.$$

Considérons enfin l'ensemble $G_4(\beta_{n+1},\varepsilon_{n+1},A_{n+1})$ pour $n+1$ impair. On a d'après **23**

$$(127)\qquad G_4(\beta_{n+1},\varepsilon_{n+1},A_{n+1})\cdot L(A_{n+1})=0.$$

A_{n+1} étant l'ensemble (102), on voit immédiatement que

$$(128)\quad L(A_{n+1})=L(0)+L(1)+\sum\left\{L(\beta_{2k})+\sum\left\{L\left(\beta_{2k}+\frac{\varepsilon_{2k}}{i}\right)\right\}\right\}$$

$$\text{pour} \quad k=1,2,\ldots,n/2 \quad \text{et} \quad i=1,2,\ldots,$$

d'où en vertu de (119)

$$(129)\quad L(A_{n+1})\supset\sum\{H_2(\beta_{2k},\varepsilon_{2k})\}\supset\sum\{B_{2k}\} \quad \text{pour } k=1,2,\ldots,n/2.$$

Les relations (127) et (129) entraînent

(130) $$G_4(\beta_{n+1}, \varepsilon_{n+1}, A_{n+1}) \cdot B_{2k} = 0 \quad \text{pour} \quad 2k < n+1.$$

On montre d'une manière analogue que l'on a pour $n+1$ pair

(131) $$H_4(\beta_{n+1}, \varepsilon_{n+1}, A_{n+1}) \cdot B_{2k-1} = 0 \quad \text{pour} \quad 2k-1 < n+1.$$

En posant

(132) $$D_m = \begin{cases} G_4(\beta_m, \varepsilon_m, A_m) & \text{pour } m \text{ impair} \\ H_4(\beta_m, \varepsilon_m, A_m) & \text{pour } m \text{ pair,} \end{cases}$$

on tire facilement de (125), (126), (130) et (131) la relation

(133) $$D_{m_1} \cdot D_{m_2} = 0 \quad \text{pour} \quad m_1 \neq m_2.$$

On a d'autre part d'après **20**

(134) $$D_m = \sum_k \{I_k^{(m)}\} + E_m \quad \text{pour tout } m,$$

où les $I_k^{(m)}$ sont des segments de droite n'ayant deux à deux aucun point commun et E_m est un ensemble au plus dénombrable. Par conséquent:

(135) $$B_m = \sum_k \{I_k^{(m)}\} + (A_m + E_m),$$

(136) $$\sum_m \{B_m\} = \sum_{k,m} \{I_k^{(m)}\} + \sum_m \{A_m + E_m\} = \sum_{k,m} \{I_k^{(m)}\} + E = \\ = \sum_{k,m} \{I_k^{(m)}\} + [E - \sum_{k,m} \{I_k^{(m)}\}],$$

l'ensemble E étant dénombrable. On a d'après (133)

(137) $$I_k^{(m)} \cdot I_{k_1}^{(m_1)} = 0,$$

si l'une au moins des inégalités $m \neq m_1$ et $k \neq k_1$ a lieu. Nous pouvons donc écrire finalement (136) sous la forme

(138) $$\sum \{B_m\} = \sum \{S_n\},$$

où S_n est un segment de droite ou un point et

(139) $$S_{n_1} \cdot S_{n_2} = 0.$$

L'égalité (138) montre que l'ensemble $\sum \{B_m\}$ est de première catégorie sur Q; par conséquent Γ est dense dans Q [1]).

[1]) F. Hausdorff, l. c., p. 327 et 328.

Soient a, b deux points de Γ dont le premier est intérieur à Q.

Supposons que Γ soit homéomorphe à un ensemble linéaire. D'après **17**, il existerait alors un $\mathfrak{S}_i(a, b; R_2)$ contenu dans $\mathfrak{W}(Q)-\Gamma$. Désignons-le par C. D'après **11**, l'ensemble C est un continu. De plus, en vertu de (105) et (138),

$$C \subset \mathfrak{W}(Q)-\Gamma \subset Q-\Gamma=\Sigma\{S_n\}, \tag{140}$$

$$C=\Sigma\{C\cdot S_n\}. \tag{141}$$

Les ensembles $C\cdot S_n$ sont fermés et on a d'après (139)

$$(C\cdot S_{n_1})\cdot(C\cdot S_{n_2})=0. \tag{142}$$

En outre, C est borné en vertu de (140). D'après un théorème de M. Sierpiński[1]), un continu borné ne peut pas être décomposé en une infinité dénombrable ou un nombre fini >1 d'ensembles fermés, non vides et n'ayant deux à deux aucun point commun. Donc, tous les ensembles $C\cdot S_n$ sauf un (on peut toujours supposer que c'est l'ensemble $C\cdot S_1$) sont vides et par conséquent:

$$C=C\cdot S_1, \tag{143}$$

d'où

$$C \subset S_1 \tag{144}$$

Ainsi C est un continu contenu dans le segment de droite S_1. Donc C est un segment de droite. Il existerait par suite un segment de droite qui est un $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$. Cette conséquence, évidemment absurde, montre que Γ ne peut pas être homéomorphe à un ensemble linéaire, c q. f. d.

La circonstance que Γ est dense dans Q ne paraît pas essentielle. Une légère modification de notre procédé permettrait d'obtenir un ensemble non-dense jouissant des autres propriétés de Γ. A cet effet, les segments $K\left(a+\frac{\varepsilon}{i}\right)$ et $L\left(a+\frac{\varepsilon}{i}\right)$ sont à remplacer dans les définitions (67) et (68) par des rectangles de hauteur suffisamment petite et ayant pour base les segments en question.

Il est d'ailleurs probable que tout ensemble situé dans R_2 et ne contenant aucun domaine est homéomorphe à un ensemble plan non-dense.

---

[1]) W. Sierpiński, Tôhoku Math. Journal, 13 (1918), p. 300.