Une définition topologique de la ligne de Jordan.

Par
Casimir Kuratowski (Warszawa).

Dans son article intitulé „*Sur les lignes de Jordan*" et qui sera publié dans ce volume, M. S. Mazurkiewicz établit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble continu [1]) soit une ligne de Jordan, c. à d. qu'il soit l'image univoque et continue d'un segment de droite. Cette condition est la suivante:

(1) Pour qu'un continu soit une ligne de Jordan, il faut et il suffit qu'il soit borné et ne contienne que des points de premier genre.

Selon la terminologie de M. Mazurkiewicz:

(2) un point p d'un continu C est de *premier genre*, si chaque cercle K de centre p contient un cercle R concentrique avec lui et tel que tous deux points de $C \cdot R$ puissent être joints par un continu situé dans $C \cdot K$.

Il est évident que la condition (2) est équivalente à la suivante [2]):

(3) Un point p d'un continu C est de *premier genre*, si chaque cercle K de centre p contient un cercle R concentrique avec lui et tel que tout point de $C \cdot R$ puisse être joint au point p par un continu situé dans $C \cdot K$.

---

[1]) Les termes, dont les définitions sont omises (p. ex. ensemble continu, point limite etc.), sont employés ici dans le même sens que leur assigne M. Mazurkiewicz dans son article cité. Le terme „cercle" peut être remplacé dans la Note présente par le terme plus général: „sphéroïde à n dimensions"; tous nos théorèmes restent vrais pour l'espace euclidien à n dimensions ($n \geqslant 2$).

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur une classification des points situés sur un continu arbitraire*, Comptes Rendus de la Societé des Sciences de Varsovie (1916), p. 441.

Le but de cette Note est d'obtenir à l'aide de la condition (1) une définition des lignes de Jordan purement topologique (c. à d. ne contenant que la notion de point limite), basée sur certaines propriétés caractéristiques de ces ensembles.

J'appelle *constituant de* M [1]) l'ensemble de tous les points qu'on peut joindre à un certain point p de M par un continu situé dans M; ce constituant est *déterminé par* p. J'admets que le point p lui-même appartient au constituant qui est déterminé par lui.

L'ensemble M (non vide) étant situé dans un continu C [2]):

1⁰ un point p de M est dit *point intérieur de M par rapport à C*, lorsqu'il n'est pas un point limite de l'ensemble $C-M$;

2⁰ M est dit *domaine (relatif) par rapport à C*, lorsque tous les points de M en sont des points intérieurs par rapport à C;

3⁰ M est dit *domaine connexe par rapport à C*, lorsque M est un domaine par rapport à C et tous deux points de M peuvent être joints par un continu situé entièrement dans M.

Quand on sait duquel continu C il s'agit, nous dirons tout court „point relativement intérieur", „domaine relatif", „domaine relatif connexe".

A présent, nous allons donner une définition topologique des *points de premier genre*. Nous prouverons que

(4) *pour qu'un point p d'un continu C soit de premier genre, il faut et il suffit que, pour chaque domaine relatif M (par rapport à C) contenant p, ce point soit relativement intérieur (par rapport à C) du constituant de M qui est déterminé par p.*

La démonstration se compose de deux parties.

1. Soit p un point de premier genre du continu C et M un domaine relatif contenant p. Soit P le constituant de M déterminé par p. Nous allons montrer que p est un point relativement intérieur de P (par rapport à C).

---

[1]) Selon la terminologie de M. Janiszewski, le *constituant de M determiné par p* est le *semicontinu saturé* contenant p et contenu dans M (il peut se réduire au point p seul). Voir S. Janiszewski, *Sur les coupures du plan faites par des continus*, Prace Matematyczno-Fizyczne XXVI, Varsovie 1913, p. 61.

[2]) Voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 240 (Relativbegriffe).

M étant un domaine relatif par rapport à C et contenant p, il existe un cercle K de centre p, tel que l'ensemble $C \cdot K$ est contenu dans M. Or, le point p étant de premier genre, il existe un cercle R de centre p, tel que tout point de $C \cdot R$ peut être joint à p par un continu situé dans $C \cdot K$. Comme l'ensemble $C \cdot K$ est contenu dans M, on voit, d'après la définition de l'ensemble P, que l'ensemble $C \cdot R$ est contenu dans P. Il en résulte que le point p n'est pas un point limite de l'ensemble $C-P$; donc, p est un point intérieur de P par rapport à C, c. q. f. d.

2. Soit p un point de C qui n'en est pas un point de premier genre. Nous allons construire un domaine relatif M contenant p et tel que p n'est pas un point relativement intérieur du constituant de M déterminé par p.

Suivant (3), il existe un cercle K de centre p et une suite infinie $\{p_n\}$ de points contenus dans $C \cdot K$ tels que:

(α) p est un point limite de la suite $\{p_n\}$,

(β) aucun point p_n ne peut être joint à p par un continu situé dans $C \cdot K$.

Soit M l'ensemble de tous les points de $C \cdot K$ qui ne sont pas situés sur la circonférence du cercle K. M est évidemment un domaine par rapport à C. Soit P le constituant de M qui est déterminé par p. D'après (β), aucun point p_n n'appartient à P; d'autre part, d'après (α), p est un point limite des points p_n. Or, p étant un point limite de $C-P$, il n'est pas un point relativement intérieur de P (par rapport à C), c. q. f. d.

Ainsi le théorème (4) est démontré. Comme on le voit, il peut servir de définition des *points de premier genre*.

Si le continu est composé uniquement de points de premier genre, les constituants de chaque domaine relatif ne contiennent — en vertu du théorème (4) — que des points relativement intérieurs; par suite, ces constituants sont des domaines relatifs. Comme deux points d'un constituant peuvent toujours être joints par un continu situé dans ce constituant, les constituants des domaines relatifs par rapport à un continu C composé de points de premier genre sont des domaines connexes par rapport à C. Du théorème (4) il résulte, d'autre part, que si le continu C contient des points qui ne sont pas de premier genre, il y existe un domaine relatif dont un certain constituant n'est pas un domaine relatif. On a donc le théorème suivant:

(5) Pour qu'un continu C soit composé uniquement de points de premier genre, il faut et il suffit que chaque domaine relatif soit la somme de domaines relatifs connexes.

Ce théorème vient d'être démontré pour chaque continu arbitrairement donné, *borné ou non*. En particulier, si le continu est borné, il résulte de (1) que

(6) *pour qu'un continu borné C soit une ligne de Jordan, il faut et il suffit que chaque domaine relatif (par rapport à C) soit la somme de domaines connexes relatifs (par rapport à C).*

Le théorème (6), qui peut servir de définition topologique de la ligne de Jordan, est celui que nous nous avons proposé d'établir.

Tout en évitant l'application des procédés métriques, on peut déduire du théorème (5) plusieurs propriétés des continus composés de points de premier genre. Nous en signalons les suivantes, sans en donner les démonstrations:

(7) Chaque domaine relatif peut être décomposé *d'une seule* manière en domaines relatifs connexes *n'ayant deux à deux aucun point commun.*

(8) La frontière de chaque constituant d'un domaine relatif est contenue dans la frontière de ce domaine.

(9) M étant un domaine relatif, $C-M$ un continu et P un constituant de M, l'ensemble $C-P$ est lui-même un continu. En d'autres termes: si un domaine relatif M ne coupe pas le continu C, aucun des constituants de M ne coupe C non plus.

(10) Si l'ensemble A est contenu dans C et chaque domaine relatif connexe contenant le point p de C contient un point de A différent de p, le point p est un point limite de A.

L'espace euclidien à n dimensions est un continu composé uniquement de points de premier genre; les théorèmes (7)–(10) ne sont rien d'autre que des généralisations des théorèmes bien connus concernant cet espace.