Un théorème sur les continus indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

1. ***Définition.*** J'appelle *indécomposable* un continu A, si tout sous-continu de A qui diffère de A est un continu de condensation [1]) de A [2]).

2. Les premiers exemples des continus indécomposables ont été donnés par M. Brouwer [3]), un exemple un peu simplifié est dû à M. Janiszewski [4]).

3. M. M. Janiszewski, Knaster et Kuratowski ont posé le problème suivant, suggéré par ces exemples: A désignant un continu indécomposable, peut-on déterminer sur A deux points, de manière que A soit un continu irréductible entre ces points? La solution de ce problème constitue le but de cette Note.

4. Je ne considère que des continus bornés situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

---

[1]) S. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Thèse (1911), Ch. I, VI, p. 24.

[2]) On voit immédiatement qu'un continu indécomposable A ne peut pas être décomposé en deux sous-continus différant tous les deux de A. La réciproque est vraie, ce qui résulte des recherches de M. M. Janiszewski, Knaster et Kuratowski (cf. ce volume, p. 212, th. II). Cette circonstance justifie l'emploi du terme *indécomposable*.

[3]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 68, p. 422—434, Proceed. Acad. Amsterdam XIV, p. 139—145.

[4]) S. Janiszewski, l. c., p. 36.

5. Lemme. *Prémisses: A est un continu indécomposable, a un point de A. Thèse: l'ensemble B de tous les points b de A tels que A n'est pas irréductible entre a et b est de première catégorie par rapport à A.*

Un système de coordonnées cartésiennes étant supposé fixé dans l'espace euclidien contenant A, considérons l'ensemble de toutes les sphères de cet espace, assujetties aux quatre conditions suivantes: 1) les coordonnées de leurs centres sont rationnelles, 2) leurs rayons sont rationnels, 3) elles contiennent à l'intérieur au moins un point de A, 4) elles ne contiennent pas le point a.

L'ensemble de ces sphères étant évidemment dénombrable, rangeons les en une suite simplement infinie $\{S_n\}$ où $n=1,2,\ldots$ et désignons par W_n l'intérieur de S_n. Posons

$$B_n=\mathfrak{C}_s(a, A-W_n), \tag{1}$$

où $\mathfrak{C}_s(a, A-W_n)$ désigne le plus grand continu contenant a et contenu dans $A-W_n$ [1]. Un tel continu existe; en effet, a est contenu dans A, mais n'est pas contenu dans S_n, donc a fortiori dans W_n. Par conséquent

$$a \subset A-W_n. \tag{2}$$

De plus, l'ensemble $A-W_n$ est fermé [2]. D'après la définition de B_n,

$$B_n \subset A-W_n \subset A, \tag{3}$$

d'où

$$B_n \cdot W_n=0. \tag{4}$$

D'autre part, la troisième condition à laquelle nous avons assujetti les sphères S_n entraîne

$$A \cdot W_n \neq 0, \tag{5}$$

d'où selon (4)

$$A \neq B_n. \tag{6}$$

---

[1] S. Janiszewski, l. c., p. 20.
[2] S. Janiszewski, l. c., p. 21.

Deux cas peuvent se présenter a priori: 1° B_n se réduit à un point [1]); c'est alors un ensemble non-dense dans A, 2° B_n est un sous-continu de A différent de A, donc un continu de condensation de A, puisque A est un continu indécomposable. On a par suite [2])

$$\overline{A - B_n} = A. \tag{7}$$

B_n étant fermé, (7) exprime que B_n est non-dense dans A [3]). On voit donc que, dans tous les cas, B_n est non-dense dans A. L'ensemble-somme $\sum_n B_n$ de tous les B_n est par suite de première catégorie par rapport à A. Evidemment, il en est de même de tout sous-ensemble de $\sum_n B_n$. Pour démontrer notre théorème, il suffit donc d'établir la relation [4])

$$B \subset \sum_n B_n, \tag{8}$$

c. à d. que, b étant un point quelconque de B, on a

$$b \subset B_n \tag{9}$$

pour au moins une valeur de n.

Remarquons à cet effet que, d'après la définition de B, si b est un point de B, le continu A n'est pas irréductible entre a et b. Si $a = b$, il est aisé de voir que b appartient à tous les B_n. Dans le cas contraire, A contient un continu A_1 contenant a et b et tel que

$$A_1 \neq A. \tag{10}$$

Il existe d'après (10) un point c de $A - A_1$. On peut évidemment déterminer un point c_1 à coordonnées rationnelles et un nombre rationnel τ de manière que l'on ait:

$$0 < \tau < \tfrac{1}{3}\varrho(c, A_1), \tag{11}$$

$$\varrho(c, c_1) < \tau, \tag{12}$$

où ϱ désigne la distance.

---

[1]) On pourrait écarter cette hypothèse par un simple raisonnement, qui serait d'ailleurs sans intérêt pour notre démonstration.

[2]) S. Janiszewski, l. c., p. 24.

[3]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 251—253.

[4]) On pourrait démontrer facilement que $B = \sum_n B_n$, mais la relation (8) nous suffit.

Désignons par S la sphère de centre c_1 et de rayon r. Son centre a donc des coordonnées rationnelles, son rayon est rationnel, elle contient à l'intérieur le point c de A, enfin, elle ne contient pas le point a, car a appartient à A_1 et

$$(13) \qquad S \cdot A_1 = 0,$$

puisque si $S \cdot A_1$ contenait un point p, on aurait d'après (11)

$$(14) \qquad \varrho(c, A_1) \leqslant \varrho(c, p) \leqslant \varrho(c, c_1) + \varrho(c_1, p) \leqslant 2r < \tfrac{2}{3}\varrho(c, A_1)$$

— conséquence absurde.

On voit donc que S est une sphère de la suite $\{S_n\}$. Soit n_1 son indice dans cette suite. On a en vertu de (13):

$$(15) \qquad W_{n_1} \cdot A_1 \subset S_{n_1} \cdot A_1 = S \cdot A_1 = 0,$$

$$(16) \qquad A_1 \subset A - W_{n_1}.$$

Or, A_1 est un continu contenant a et contenu dans $A - W_{n_1}$; donc A_1 est contenu dans l'ensemble (1). Le point b appartenant à A_1, il vient $b \subset B_{n_1}$, c. q. f. d.

6. *Corollaire.* *Prémisses*: *A est un continu indécomposable, a un point de A.* *Thèse*: *L'ensemble C de tous les points c de A tels que A est irréductible entre a et c est dense dans A et sa puissance est celle du continu.*

En effet, on a évidemment

$$(18) \qquad C = A - B$$

et B est en vertu du lemme de première catégorie par rapport à A, ce qui entraîne notre corollaire [1]).

7. *Théorème.* *Prémisse*: *A est un continu indécomposable.* *Thèse*: *Il existe trois points de A tels que A est irréductible entre deux quelconques de ces points.*

Soient: a un point arbitraire de A, B l'ensemble des points b de A tels que A n'est pas irréductible entre a et b, a_1 un point de $A - B$, enfin B_1 l'ensemble des points b_1 de A tels que A n'est pas irréductible entre a_1 et b_1.

---

[1]) F. Hausdorff, l. c., p. 327—328.

B et B_1 étant, en vertu du lemme, de première catégorie par rapport à A, il en est de même de leur somme $B+B_1$. Donc, l'ensemble

$$A-(B+B_1) \tag{19}$$

n'est pas vide. Soit a_2 un point de cet ensemble. A est irréductible entre a et a_1 et, de même, entre a et a_2, puisque a_1 et a_2 n'appartiennent pas à B. A est irréductible aussi entre a_1 et a_2, puisque a_2 n'appartient pas à B_1. Le théorème est ainsi démontré.
