Sur la décomposition des ensembles de points en parties homogènes.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Dans un Mémoire important sur divers théorèmes de la Théorie des ensembles de points, publié dans *Acta Mathematica* VII (1885), p. 105—124, G. Cantor s'occupe entre autres d'une décomposition des ensembles de points en parties homogènes. Dans le § 3 de ce Mémoire (p. 118), il écrit: „Der Inbegriff aller Punkte β^{ter} Ordnung von V, falls solche überhaupt vorhanden sind, bildet, wie leicht zu sehen, eine *homogene Punktmenge* β^{ter} *Ordnung und Mächtigkeit*". Or, c'est inexact, p. ex. pour $\beta=\omega$. Ainsi le théorème sur la décomposition d'un ensemble dense en soi en parties homogènes ne peut être regardé comme rigoureusement démontré. Cela m'engage à reprendre ici l'étude d'une telle décomposition.

1. Soit P un ensemble de points dans l'espace euclidien à m dimensions, p un point de P. On dit que *p est un point de puissance* $\mathfrak{m}$, lorsqu'il existe un nombre positif δ tel que pour toute sphère S de rayon $<\delta$ et de centre p la partie de P contenue dans S a la puissance $\mathfrak{m}$. On démontre, en s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo, que tout point non isolé d'un ensemble P est d'une puissance déterminée $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ où α est un nombre ordinal $\geqslant 0$ [1]).

Un ensemble dont tous les points sont de même puissance est appelé par G. Cantor *homogène*.

[1]) Dans l'hypothèse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, nous aurions seulement deux cas: $\alpha=0$ et $\alpha=1$.

Théorème 1. *Tout ensemble de points P* (d'un espace euclidien à m dimensions) *est une somme (disjointe) d'un ensemble clairsemé (ou vide) et d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles homogènes*[1]).

Nous démontrerons notre théorème par l'induction transfinie. Soit $\aleph_\alpha$ la puissance de l'ensemble P. Pour $\alpha=0$, le théorème est vrai, puisque 1⁰ d'après un théorème connu, tout ensemble de points est une somme (disjointe) d'un ensemble clairsemé ou vide (*partie séparée* de P) et d'un ensemble dense en soi ou vide (*noyau* de P) et 2⁰ tout ensemble dénombrable dense en soi est évidemment homogène (chacun de ses points étant de puissance $\aleph_0$). Il nous reste donc à montrer que, si le théorème est vrai pour les nombres $\xi<\alpha$, il l'est aussi pour le nombre α.

2. ***Lemme.*** *Si P est un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$, où α est un nombre ordinal positif non confinal avec ω* (c. à. d. qui n'est pas limite d'une suite dénombrable de nombres inférieurs), *l'ensemble Q de tous les points de P qui ne sont pas de puissance $\aleph_\alpha$ est d'une puissance inférieure à $\aleph_\alpha$ et l'ensemble $P-Q$ est homogène.*

Démonstration. Soit p un point de P qui n'est pas de puissance $\aleph_\alpha$. Il existe donc une sphère S entourant p et telle que la partie de P contenue dans S est de puissance $\neq\aleph_\alpha$, donc de puissance $<\aleph_\alpha$ (puisque P est de puissance $\aleph_\alpha$). Il en résulte sans peine qu'il existe aussi une sphère S entourant p, dont le centre a des coordonnées rationnelles, dont le rayon est rationnel et dont la partie commune avec P est de puissance $<\aleph_\alpha$. L'ensemble E de toutes les sphères S dont les centres ont des coordonnées rationnelles et dont les rayons sont rationnels étant, comme on sait, dénombrable, il en est de même de l'ensemble E_1 de toutes les sphères S appartenant à E et telles que la partie de P contenue dans S

[1]) Si la puissance du continu était $\aleph_1$, nous aurions (comme l'a démontré G. Cantor, l. c.), pour tout ensemble de points P, une décomposition $P=A+U+V$, où A est un ensemble vide ou clairsemé, U un ensemble vide ou homogène dénombrable et V un ensemble vide ou homogène de puissance du continu.

est de puissance $<\aleph_\alpha$. Or, l'ensemble Q de tous les points de P qui ne sont pas de puissance $\aleph_\alpha$ est évidemment contenu dans la somme $S_1+S_2+S_3+\ldots$ de toutes les sphères constituant E. Soit $\aleph_{\alpha_n}$ la puissance de la partie de P contenue dans la sphère S_n; l'ensemble Q est donc de puissance $\leqslant \aleph_{\alpha_1}+\aleph_{\alpha_2}+\ldots$ et, par suite, de puissance $<\aleph_\alpha$, puisque $\aleph_{\alpha_n}<\aleph_\alpha$ pour $n=1,2,\ldots$ où le nombre α n'est pas confinal avec ω.

Soient: p un point de l'ensemble $P-Q$ et S une sphère quelconque entourant p. La sphère S contient donc une partie de P de puissance $\aleph_\alpha$ (puisque, autrement, p serait un point de Q). L'ensemble de tous les points de Q contenus dans S étant (comme sous-ensemble de Q) de puissance $<\aleph_\alpha$, il en résulte que la sphère S contient une partie de $P-Q$ de puissance $\aleph_\alpha$. Le point p est donc un point de l'ensemble $P-Q$ de puissance $\aleph_\alpha$. Cela étant vrai pour tout point p de $P-Q$, nous en concluons que l'ensemble $P-Q$ est homogène. Notre lemme est ainsi démontré.

Remarquons que si α est un nombre confinal avec ω et $\aleph_\alpha<2^{\aleph_0}$, un ensemble P de puissance $\aleph_\alpha$ peut ne contenir aucun point de puissance $\aleph_\alpha$. Tel est p. ex. l'ensemble linéaire $P=P_1+P_2+P_3\ldots$, où P_n est un ensemble de puissance $\aleph_n$ contenu dans l'intervalle $\langle 1/(n+1),\ 1/n\rangle$. L'ensemble P est alors de puissance $\aleph_\omega$ et ne contient aucun point de cette puissance.

Passons à la démonstration du th. 1. Soit $\alpha>0$ un nombre ordinal donné et admettons que le théorème est vrai pour tous les nombres ordinaux $\xi<\alpha$. Soit P un ensemble de points de puissance $\aleph_\alpha$. Nous distinguerons deux cas:

1) Le nombre α est non confinal avec ω. Désignons par Q l'ensemble de tous les points de P qui ne sont pas de puissance $\aleph_\alpha$. D'après notre lemme, l'ensemble Q est de puissance $<\aleph_\alpha$ et l'ensemble $R=P-Q$ est homogène. Soit $\aleph_\beta$ la puissance de Q. On a donc $\beta<\alpha$ et notre théorème étant, par hypothèse, vrai pour les nombres $\xi<\alpha$, l'ensemble Q est une somme (disjointe) d'un ensemble clairsemé (ou vide) et d'une infinité dénombrable d'ensembles homogènes (ou vides). L'ensemble R étant homogène et sans points communs avec Q, on en conclut sans peine que le théorème est vrai pour l'ensemble $P=Q+R$.

2) Le nombre a est confinal avec ω. Le nombre a peut donc être regardé comme limite d'une suite dénombrable a_n $(n=1,2,\ldots)$ de nombres ordinaux inférieurs à a et nous avons $\aleph_a=\aleph_{a_1}+\aleph_{a_2}+\ldots$, où $\aleph_{a_n}<\aleph_a$ (pour $n=1,2,\ldots$). Il en résulte que l'ensemble P peut être regardé comme la somme $P=P_1+P_2+\ldots$ d'une infinité dénombrable d'ensembles P_n $(n=1,2,\ldots)$ sans points communs deux à deux, où P_n est un ensemble de puissance $\aleph_{a_n}$. Notre théorème étant vrai, par hypothèse, pour les nombres ordinaux $<a$, nous pouvons écrire $P_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}E_{n,k}$, où les ensembles $E_{n,0}$ $(n=1,2,\ldots)$ sont clairsemés ou vides et les ensembles $E_{n,k}$ $(n=1,2,\ldots;\ k=1,2,\ldots)$ sont homogènes ou vides, tous les termes $E_{n,k}$ de la somme P_n étant sans points communs deux à deux. Posons $E_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_{n,0}$. C'est un ensemble au plus dénombrable (comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles clairsemés ou vides). Or, le théorème étant vrai pour les ensembles dénombrables, nous pouvons poser $E_0=C+H$ où C est un ensemble clairsemé ou vide et H un ensemble homogène (dénombrable) ou vide.

En résumé, nous pouvons écrire $P=C+H+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}E_{n,k}$, ce qui montre que P est une somme (disjointe) d'un ensemble clairsemé ou vide et d'une infinité dénombrable d'ensembles homogènes ou vides. Le théorème est ainsi établi.

Remarquons qu'on peut supposer dans le th. 1 que les parties homogènes en lesquelles se décompose l'ensemble P ont des puissances distinctes deux à deux, puisque la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles homogènes de puissances égales est, comme on voit sans peine, un ensemble homogène (de même puissance). Il résulte de notre démonstration que ces parties peuvent être supposées de puissances $\aleph_\xi$ où ξ sont des nombres ordinaux non confinaux avec ω.

Il importe de remarquer aussi qu'un ensemble de puissance $\geqslant\aleph_\Omega$, où Ω est le plus petit nombre de la troisième classe (si un tel ensemble de points existe) peut être décomposé en une somme d'un ensemble clairsemé ou vide et d'une infinité indénombrable d'ensembles homogènes de puissances distinctes et sans points communs deux à deux.

Remarquons enfin qu'en modifiant légèrement notre démonstration, on pourrait démontrer le théorème suivant:

Tout ensemble dense en soi est la somme d'une série finie ou dénombrable d'ensembles homogènes sans points communs deux à deux.

3. ***Théorème 2.*** *L'ensemble E de toutes les puissances différentes qui correspondent aux points d'un ensemble de points est au plus dénombrable.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous pouvons, comme on sait, ranger dans une suite infinie

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots \tag{1}$$

toutes les sphères (de l'espace considéré) dont les centres ont des coordonnées rationnelles et dont les rayons sont rationnels. Soit P un ensemble donné de points. Or, on voit sans peine que s'il existe dans P des points de puissance $\mathfrak{m}$, il existe dans la suite (1) des sphères S telles que la partie de P contenue dans S est de puissance $\mathfrak{m}$; soit S_n la première sphère de la suite (1) jouissant de cette propriété. Ainsi, à tout nombre cardinal $\mathfrak{m}$ appartenant à l'ensemble E, correspond un nombre naturel $n = n(\mathfrak{m})$. On voit aussi qu'aux nombres cardinaux distincts $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ de E correspondent des nombres $n(\mathfrak{m})$ et $n(\mathfrak{m}')$ différents. En effet, si l'on avait $n(\mathfrak{m}) = n(\mathfrak{m}') = n$, la partie de P contenue dans la sphère S_n serait en même temps de puissance $\mathfrak{m}$ et de puissance $\mathfrak{m}'$, ce qui est impossible pour $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$. Il en résulte immédiatement que l'ensemble E est fini ou effectivement énumérable. Notre théorème est donc démontré.

4. ***Théorème 3.*** *Si P est un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$ et $\xi \leqslant \alpha$ est un nombre ordinal positif non confinal avec ω, l'ensemble de tous les points de P de puissance $\aleph_\xi$ est homogène* (de puissance $\aleph_\xi$) *ou vide.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit M l'ensemble de tous les points de P qui sont de puissance $\aleph_\xi$. Soit p un point quelconque de M. Il existe donc un nombre positif δ tel que pour toute sphère S donnée de rayon $<\delta$, ayant p pour centre, la partie Q de P, intérieure à S, est de puissance $\aleph_\xi$. D'après le lemme du § 2 (le nombre ξ etant, par hypothèse, non confinal avec ω), l'ensemble H de tous les points de Q qui sont de puissance $\aleph_\xi$ relativement à Q est de puissance $\aleph_\xi$. Or, tout point de P qui est de puissance $\aleph_\xi$ relativement à Q est de puissance $\geqslant\aleph_\xi$ relativement à P (puisque $Q\subset P$). D'autre part, les points de Q ne peuvent être de puissance $>\aleph_\xi$ relativement à P, puisque l'ensemble Q est intérieur à la sphère S. Tout point de H est donc de puissance $\aleph_\xi$ relativement à P; il en résulte que H est un sous-ensemble de M. Nous avons ainsi démontré que toute sphère S de rayon $<\delta$ et de centre p contient à son intérieur un sous-ensemble de M de puissance $\aleph_\xi$. Il en résulte tout de suite que p est un point de puissance $\aleph_\xi$ relativement à M. Cela étant vrai pour tout point p de M, nous concluons que l'ensemble M est homogène.

Quant à la puissance d'un ensemble homogène, on peut prouver sans peine qu'un ensemble homogène M dont tous les points sont de puissance $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ est lui-même de puissance $\mathfrak{m}$ (ce théorème a été déjà signalé par G. Cantor, l. c., p. 110). En effet, tout point de M, comme point de puissance $\mathfrak{m}$, peut être entouré par une sphère S de la suite (1), telle que la partie de M contenue dans S ait la puissance $\mathfrak{m}$. L'ensemble M est donc contenu dans la somme de telles sphères. Nous en concluons tout de suite que M est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de puissance $\mathfrak{m}$, donc que sa puissance est aussi $\mathfrak{m}$, c. q. f. d.

5. *Théorème 4.* *Soit*

$$P=C+H_1+H_2+\dots \tag{2}$$

une décomposition de l'ensemble P en une somme d'un ensemble clairsemé ou vide et d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles homogènes. S'il existe un point de P de puissance $\aleph_\xi$, où ξ est un nombre ordinal positif non confinal avec ω, il existe aussi un terme H_n de la somme (2) *de puissance $\aleph_\xi$.*

Démonstration. Soit M l'ensemble de tous les points de P de puissance $\aleph_\xi$. D'après le th. 3 (ξ étant positif et non confinal avec ω), l'ensemble M, s'il n'est pas vide, est homogène de puissance $\aleph_\xi$. Désignons par U la somme de tous les termes de la série (2) dont les puissances sont $<\aleph_\xi$ et par V

la somme de tous les termes de (2) dont les puissances sont $>\aleph_\xi$. Aucun point de M ne peut appartenir à la somme V, puisque — comme on voit sans peine — il serait alors un point de P de puissance $>\aleph_\xi$, contrairement à la définition de M. Or, il est impossible que tout point de M appartienne à la somme U, puisque M est de puissance $\aleph_\xi$ et l'ensemble U, en tant que somme d'un ensemble au plus dénombrable d'ensembles de puissances inférieures à $\aleph_\xi$, est lui-même un ensemble de puissance $<\aleph_\xi$ (puisque ξ est positif et non confinal avec ω). Nous en concluons qu'il existe des points de P n'appartenant ni à U ni à V. Cela prouve qu'il existe un terme de la somme (2) qui est un ensemble de puissance $\aleph_\xi$, c. q. f. d.

Remarquons que la démonstration est valable aussi dans le cas où les termes de la somme (2) ont des points communs.

Remarquons aussi que l'on peut établir, pour tout ensemble de points P, l'existence d'une décomposition (2) en ensembles homogènes dont les puissances ne sont choisies que parmi celles des points de P.