# Contribution à la topologie des ensembles dénombrables.

Par

S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński (Warszawa).

Le but de ce Mémoire est de déterminer la puissance de deux classes de types topologiques[1]) dénombrables: de celle des types dénombrables fermés et de celle des types clairsemés. Nous démontrerons que la puissance de la première de ces classes est $\aleph_1$ et que la seconde classe est de puissance du continu.

Soit $P$ un ensemble de points borné, fermé et dénombrable dans l'espace euclidien à $m$ dimensions. Désignons, comme d'usage, par $P^{(\xi)}$ le dérivé d'ordre $\xi$ de $P$ (où $P^{(0)}=P$). On a évidemment pour tout nombre ordinal $\lambda$

$$P=\sum_{\xi<\lambda}(P^{(\xi)}-P^{(\xi+1)})+P^{\lambda}.$$

Nous en concluons, en particulier, que $P$ contient l'ensemble

$$\sum_{\xi<\Omega}(P^{(\xi)}-P^{(\xi+1)})$$

où $\Omega$ est le plus petit nombre de troisième classe. Donc, $P$ étant dénombrable, il est impossible que chacun des ensembles $P^{(\xi)}-P^{(\xi+1)}$ (où $\xi<\Omega$) contienne des points, ces ensembles étant évidemment sans point commun deux à deux;

---

[1]) La notion de *type topologique* se dégage de la considération des ensembles homéomorphes, comme la notion de type d'ordre se dégage de la considération des ensembles ordonnés semblables.

il existe donc un nombre ordinal $\beta<\Omega$ tel que l'ensemble $P^{(\beta)}-P^{(\beta+1)}$ est vide; $P^{(\beta+1)}$ étant, comme on sait, contenu dans $P^{(\beta)}$, nous avons donc

$$P^{(\beta)}=P^{(\beta+1)},$$

ce qui montre que l'ensemble $P^{(\beta)}$ est parfait ou vide. Or, l'ensemble $P^{(\beta)}$ est contenu dans l'ensemble dénombrable $P$ et par suite ne peut être parfait. $P^{(\beta)}$ est donc vide.

Nous avons ainsi établi l'existence d'un nombre ordinal $\beta<\Omega$ tel que l'ensemble $P^{(\beta)}$ est vide.

Soit $\beta$ le plus petit nombre ordinal jouissant de cette propriété. On voit sans peine que $\beta$ ne peut être un nombre de deuxième espèce, puisque tout ensemble $P^{(\xi)}$ où $\xi<\beta$ serait alors non vide. Or, d'après la définition de l'ensemble dérivé dont l'ordre est un nombre de deuxième espèce, $P^{(\beta)}$ est l'ensemble de tous les points communs aux ensembles $P^{(\xi)}$ où $\xi<\beta$; ces ensembles étant fermés et non vides, $P^{(\beta)}$ serait également non vide (d'après un théorème connu), contrairement à la définition du nombre $\beta$.

Le nombre $\beta$ est donc de première espèce et nous pouvons poser $\beta=\alpha+1$. En vertu de la définition du nombre $\beta$, l'ensemble $P^{(\alpha)}$ n'est pas vide. Or, l'ensemble $P^{(\alpha)}$ ne peut être infini, puisque dans ce cas l'ensemble $P^{(\beta)}=P^{(\alpha+1)}$, comme dérivé d'un ensemble borné ($P$ étant borné), ne pourrait être vide.

Nous avons ainsi démontré que, pour tout ensemble borné, fermé et dénombrable $P$, il existe un nombre ordinal $\alpha<\Omega$ (évidemment unique) tel que l'ensemble $P^{(\alpha)}$ est fini (non vide).

***Définition.*** Soit $n$ le nombre de points de l'ensemble $P^{(\alpha)}$. Nous appelons le système $(\alpha, n)$ *système caractéristique* de l'ensemble $P$.

Nous allons démontrer à présent que *si* $(\alpha, n)$ *est le système caractéristique d'un ensemble borné, fermé et dénombrable* $P$, *cet ensemble est homéomorphe à un ensemble bien ordonné du type* $\omega^\alpha\cdot n+1$.

On voit sans peine que ce théorème est vrai pour le système $(1,1)$, c. à. d. pour un ensemble borné, fermé et ne contenant qu'un seul point d'accumulation). En l'admettant pour le système $(\alpha,1)$ où $\alpha$ est un nombre ordinal arbitraire $<\Omega$, nous allons le déduire pour les systèmes $(\alpha,n)$ où $n$ est un nombre naturel quelconque. Pour fixer les idées, nous donnerons la démonstration pour l'espace à 3 dimensions.

Soit $P$ un ensemble (borné, dénombrable et fermé) dont le système caractéristique est $(\alpha,n)$ où $n>1$. L'ensemble $P^{(\alpha)}$ contient donc $n$ points: désignons les par $p_1,p_2,\ldots,p_n$. L'ensemble $P$ étant dénombrable, il existe $n-1$ plans parallèles dépourvus des points de $P$ et qui divisent l'espace en $n$ domaines $D_1,D_2,\ldots,D_n$ dont chacun contient un et un seul des points $p_1,p_2,\ldots,p_n$. Soient $P_1,P_2,\ldots,P_n$ les parties de $P$ contenues respectivement dans $D_1,D_2,\ldots,D_n$. On voit sans peine que ce sont des ensembles fermés sans points communs deux à deux et que $P_k^{(\alpha)}$ est la partie de $P^{(\alpha)}$ contenue dans $D_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. L'ensemble $P_k^{(\alpha)}$ contient donc un seul point, à savoir le point $p_k$; le système caractéristique de l'ensemble $P_k$ est donc $(\alpha,1)$. Notre théorème étant, par hypothèse, vrai pour le système $(\alpha,1)$, l'ensemble $P_k$ est homéomorphe à un ensemble bien ordonné $G_k$ du type $\omega^\alpha+1$. L'ensemble $P_k$ étant borné et fermé, il en est de même de $G_k$ (qui possède donc un dernier élément). Or, on peut évidemment supposer que les ensembles bien ordonnés $G_1,G_2,\ldots,G_n$ sont situés sur une même droite et que, pour $l>k$, tout point de $G_l$ est postérieur à tous les points de $G_k$. Les ensembles $P_1,P_2,\ldots,P_n$, fermés et sans point commun, étant respectivement homéomorphes aux ensembles $G_1,G_2,\ldots,G_n$, nous concluons que l'ensemble $P=P_1+P_2+\ldots+P_n$ est homéomorphe à l'ensemble $G=G_1+G_2+\ldots+G_n$, qui est évidemment bien ordonné du type

$$(\omega^\alpha+1)\cdot n=\omega^\alpha\cdot n+1.$$

Il est ainsi démontré que si notre théorème est vrai pour le système $(\alpha,1)$, il l'est encore pour les systèmes $(\alpha,n)$ où $n$ est un nombre naturel quelconque.

Soit maintenant $\alpha_0 > 1$ un nombre ordinal fixé arbitrairement, $\alpha < \Omega$, et admettons que notre théorème est vrai pour tous les systèmes $(\alpha, n)$ où $\alpha < \alpha_0$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$. Soit $P$ un ensemble dont le système caractéristique est $(\alpha_0, 1)$. L'ensemble $P^{(\alpha_0)}$ contient donc un seul point; désignons le par $p_0$. Comme $p_0$ appartient à $P^{(\alpha_0)}$ et $\alpha_0 > 1$, nous concluons que $p_0$ appartient en tout cas à $P''$, c. à. d. qu'il est un point d'accumulation de $P'$. Il existe donc une suite infinie $p_1, p_2, \ldots$ de points de $P'$, telle que les distances $\overline{p_1, p_0}$, $\overline{p_2, p_0}$, ... décroissent indéfiniment. L'ensemble $P$ étant dénombrable, il existe, comme on voit sans peine, une suite infinie de nombres positifs décroissants $r_1, r_2, \ldots$, convergente vers 0, telle qu'aucune sphère de centre $p_0$ et de rayon $r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ne contienne à sa surface de points de $P$ et que l'on ait de plus l'inégalité $r_{k-1} > \overline{p_k p_0} > r_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$ (dont la partie gauche peut être rejetée pour $k = 1$). Il est évident que ces sphères divisent l'espace en une infinité dénombrable de domaines $D_1, D_2, \ldots$, convergents vers le point $p_0$ et tels que $D_k$ contient à son intérieur le point $p_k$, donc une infinité de points de $P$ (puisque $p_k$ est un point de $P'$, c. à. d. un point d'accumulation de $P$).

Soit $P_k$ la partie de $P$ contenue dans $D_k$; c'est, comme on voit aisément, un ensemble borné, dénombrable et fermé, ayant pour dérivé d'ordre $\alpha_0$ la partie de $P^{(\alpha_0)}$ contenue dans $D_k$. Le dérivé $P_k^{(\alpha_0)}$ est donc vide (puisque $p_0$, l'unique point de $P^{(\alpha_0)}$, est à une distance positive $r_k$ de $D_k$). Par conséquent, en désignant par $(\alpha_k, n_k)$ le système caractéristique de l'ensemble $P_k$, nous aurons $\alpha_k < \alpha_0$. Notre théorème étant supposé vrai pour les systèmes $(\alpha, n)$ où $\alpha < \alpha_0$, nous concluons que l'ensemble $P_k$ est homéomorphe à un ensemble bien ordonné $G_k$ du type $\omega^{\alpha_k} \cdot n_k + 1$.

Les ensembles $G_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ peuvent être supposés situés sur un même segment fini d'une droite, p. ex. l'ensemble $G_k$ à l'intérieur de l'intervalle $\langle k - 1/k, k/k + 1 \rangle$.

Désignons par $P_0$ l'ensemble formé d'un seul point $p_0$ et par $G_0$ celui formé d'un seul point d'abscisse 1. Nous aurons évidemment

(1) $$P=(P_1+P_2+P_3+\ldots)+P_0.$$

Posons encore

(2) $$G=(G_1+G_2+G_3+\ldots)+G_0;$$

c'est évidemment un ensemble bien ordonné du type

(3) $$\tau=[(\omega^{\alpha_1}\cdot n_1+1)+(\omega^{\alpha_2}\cdot n_2+1)+(\omega^{\alpha_3}\cdot n_3+1)+\ldots]+1.$$

Comme $\alpha_k<\alpha_0$ pour $k=1,2,\ldots$, on déduit de la formule (3) que

$$\tau\leqslant\omega^{\alpha_0}+1.$$

Or, on démontre aisément que les ensembles (1) et (2) sont homéomorphes. L'ensemble $P$ est donc homéomorphe à un ensemble bien ordonné du type $\tau\leqslant\omega^{\alpha_0}+1$. Or, on ne peut pas avoir $\tau<\omega^{\alpha_0}+1$, puisque, $P$ étant fermé, nous aurions alors $\tau<\omega^{\alpha_0}$, ce qui est impossible, car le dérivé d'ordre $\alpha_0$ d'un ensemble bien ordonné du type $<\omega^{\alpha_0}$ est toujours vide[1]), tandis que $P^{(\alpha_0)}$ n'est pas vide. On a donc $\tau=\omega^{\alpha_0}+1$.

Il est ainsi démontré que si notre théorème est vrai pour tous les systèmes $(\alpha,n)$ où $\alpha<\alpha_0$ et $n=1,2,\ldots$, il l'est encore pour le système $(\alpha_0,1)$, ce qui entraîne — comme nous l'avons vu plus haut — qu'il est aussi vrai pour les systèmes $(\alpha_0,n)$ où $n=1,2,\ldots$. Notre théorème étant vrai pour le système $(1,1)$, nous en concluons par l'induction transfinie qu'il est vrai pour tous les systèmes $(\alpha,n)$ où $\alpha$ est un nombre ordinal $<\Omega$ et $n$ un nombre naturel. Nous avons donc démontré le suivant

***Théorème 1***[2]). *Tout ensemble de points $P$ borné, fermé et dénombrable* (situé dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions) *est homéomorphe à un ensemble bien ordonné.*

*De plus, si $P^{(\alpha)}$ est le dernier dérivé non vide de $P$ et se compose de $n$ points, l'ensemble $P$ est homéomorphe à un ensemble bien ordonné du type $\omega^{\alpha}\cdot n+1$.*

---

[1]) En effet, on montre facilement par l'induction transfinie que le dérivé d'ordre $\alpha_0$ d'un ensemble bien ordonné (fermé) se compose (s'il n'est pas vide) de points dont le rang (dans l'ensemble considéré) est $\omega^{\alpha_0}\cdot\gamma$ où $\gamma$ est un nombre ordinal $\geqslant 1$.

[2]) Cf. P. Mahlo, Leipz. Berichte 63 (1911), p. 331, Satz 10.

Nous allons voir que c'est en même temps le plus petit type bien ordonné, auquel $P$ est homéomorphe. Nous allons voir, d'autre part, que $P$ est encore homéomorphe à tout ensemble bien ordonné du type $\omega^{\alpha}\cdot n+\gamma$, où $\gamma$ est un nombre de première espèce $<\omega^{\alpha}$, et que tout ensemble bien ordonné, homéomorphe à $P$, doit avoir un tel type.

Deux ensembles bien ordonnés fermés du même type sont, en effet, homéomorphes (l'application semblable de l'un de ces ensembles sur l'autre détermine en même temps une correspondance biunivoque et bicontinue entre leurs éléments). Il s'en suit donc immédiatement du th. 1 et de la définition des systèmes caractéristiques que deux ensembles bornés, fermés et dénombrables qui ont le même système caractéristique, sont homéomorphes.

D'autre part, deux ensembles dénombrables, bornés, fermés et homéomorphes ont le même système caractéristique, puisque, pour les ensembles bornés et fermés homéomorphes, les dérivés d'ordre égal sont toujours homéomorphes. Donc, si l'on divise tous les ensembles bornés, fermés et dénombrables en classes, en rangeant deux ensembles dans une même classe, lorsqu'ils sont homéomorphes—à toute classe ou, comme nous voulons dire, à tout *type topologique* borné, fermé et dénombrable, vient correspondre un système caractéristique $(\alpha, n)$ bien déterminé. Réciproquement, on voit sans peine que tout système $(\alpha, n)$, où $\alpha$ est un nombre ordinal $<\Omega$ et $n$ un nombre naturel, détermine un type topologique borné, fermé et dénombrable, notamment la classe de tous les ensembles homéomorphes à l'ensemble fermé, bien ordonné du type $\omega^{\alpha}\cdot n+1$. Ainsi, l'ensemble de tous les types topologiques bornés, fermés et dénombrables a la même puissance que l'ensemble de tous les systèmes $(\alpha, n)$ en question. Ce dernier ayant évidemment la puissance $\aleph_1$, nous parvenons au suivant

***Théorème 2.*** *L'ensemble de tous les types topologiques bornés, fermés et dénombrables est de puissance* $\aleph_1$.

Quant aux ensembles fermés dénombrables non bornés, on démontre facilement que chacun d'eux est homéomorphe à un ensemble qui s'obtient en enlevant d'un ensemble fermé dénombrable et borné un de ses points d'accumulation. Il en résulte en vertu du th. 2 que *l'ensemble de tous les types topologiques non bornés, fermés et dénombrables est de puissance* $\aleph_1$.

Tout ensemble fermé dénombrable est *clairsemé*, c. à. d. ne contient aucun ensemble dense en soi. La question s'impose: *quelle est la puissance de l'ensemble de tous les types topologiques clairsemés?*

Nous allons démontrer que c'est la puissance du continu.

Tout ensemble clairsemé étant dénombrable et l'ensemble de tous les types topologiques dénombrables ayant une puissance non supérieure à celle du continu (puisque l'ensemble de tous les sous-ensembles dénombrables du continu a la puissance du continu), il suffit évidemment de montrer que l'ensemble de tous les types topologiques clairsemés contient un sous-ensemble de puissance du continu. Deux lemmes précèderont notre démonstration.

Soit $P$ un ensemble de points (dans l'espace à $m$ dimensions). Posons $P_0 = P$ et supposons que nous avons déjà défini les ensembles $P_\xi$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$ où $\alpha$ est un nombre ordinal donné. Désignons par $P_\alpha$ l'ensemble de tous les points qui sont à la fois des points et des points d'accumulation de tout ensemble $P_\xi$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$. Les ensembles $P_\alpha$ sont ainsi définis, par l'induction transfinie, pour tout nombre ordinal $\alpha$[1]).

Soit $p$ un point d'accumulation de $P$ n'appartenant pas à $P$; étant donné un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, nous dirons que $p$ est une *lacune d'ordre* $\alpha$ de l'ensemble $P$, si $p$ est un point d'accumulation de tout ensemble $P_\xi$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$, sans être un point d'accumulation de l'ensemble $P_\alpha$. Lorsque $p$ est un point d'accumulation de tout ensemble $P_\xi$ pour $0 \leqslant \xi < \Omega$ (donc aussi, comme on peut le démontrer, un point d'accumulation de $P_\Omega$), sans être un point de $P$, nous dirons que $p$ est une *lacune d'ordre* $\Omega$ de l'ensemble $P$.

---

[1]) Les ensembles $P_\alpha$ coïncident avec les *cohérences* de Cantor. On démontre que l'ensemble $P_\Omega$— dit le *noyau* de l'ensemble $P$— s'il n'est pas vide, est dense en soi; on a donc en tout cas $P_\Omega \subset P_{\Omega+1}$, donc aussi $P_\alpha \subset P_\Omega$ pour $\alpha > \Omega$. On montre aussi que si $P_\Omega$ est vide, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ tel que l'ensemble $P_\alpha$ est vide. Il suffirait d'ailleurs, à notre but, de considérer seulement les ensembles $P_\alpha$ d'indice $\alpha$ fini.

*Lemme 1. Si un ensemble borné $P$ admet une lacune d'ordre $\alpha<\Omega$, tout ensemble borné $Q$ qui est homéomorphe à $P$ admet au moins une lacune d'ordre $\geqslant\alpha$*[1]).

Le lemme est vrai pour $\alpha=1$: cela résulte immédiatement du fait que tout ensemble qui est homéomorphe à un ensemble borné sans lacune (c. à. d. fermé) jouit de la même propriété.

Soient maintenant: $\alpha$ un nombre ordinal donné, $\alpha>1$, $p$ une lacune d'ordre $\alpha$ de l'ensemble borné $P$ et $Q$ un ensemble homéomorphe à $P$. Il existe toujours, comme on sait, pour $1<\alpha<\Omega$, une suite infinie non décroissante de nombres ordinaux $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, telle que $\alpha$ est le plus petit nombre ordinal supérieur à tous les nombres de cette suite[2]). Soit $n$ un nombre naturel donné quelconque; donc $\alpha_n<\alpha$. Comme le point $p$ est une lacune d'ordre $\alpha$ de l'ensemble $P$ et $\alpha_n<\alpha$, $p$ est un point d'accumulation de l'ensemble $P_{\alpha_n}$. Il existe donc un point $p_n$ de $P_{\alpha_n}$ tel que la distance $\overline{p_n p}$ est $<1/n$. Soit $q_n$ l'image de $p_n$ dans $Q$. L'ensemble $Q$ étant borné, il en est de même de la suite infinie $q_1, q_2, \ldots$. D'après un théorème connu, il existe donc une suite croissante d'indices $n_1, n_2, \ldots$ telle que la suite $q_{n_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ converge. Posons $q=\lim\limits_{k=\infty} q_{n_k}$. Nous allons montrer que $q$ est une lacune d'ordre $\geqslant\alpha$ de l'ensemble $Q$.

Remarquons d'abord que $q$ n'appartient pas à $Q$. En effet, la correspondance entre $P$ et $Q$ étant biunivoque et bicontinue, si $p$ appartenait à $Q$, la suite $p_{n_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ de points correspondant respectivement aux points $q_{n_k}$ convergerait vers un point de $P$ dont l'image dans $Q$ est $q$. Or c'est impossible, puisque nous avons $\lim\limits_{k=\infty} p_{n_k}=p$ (car la distance $\overline{p_{n_k} p}$ est $<1/n_k$), et $p$ n'appartient pas à $P$.

---

[1]) On pourrait démontrer encore (en adoptant la définition de la lacune d'ordre $\Omega$, donnée plus haut) que le lemme 1 reste vrai pour $\alpha=\Omega$; cela résulte du fait qu'un ensemble ne possédant aucune lacune d'ordre $\Omega$ a le noyau fermé ou vide et réciproquement, et que le noyau d'un ensemble est un invariant topologique.

[2]) Pour nos fins, nous n'avons besoin que du cas où $\alpha$ est fini; dans ce cas nous pourrions poser $\alpha_n=\alpha-1$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$. Or, le lemme étant intéressant par lui-même, nous en donnons une démonstration générale; pour $\alpha$ fini, elle pourrait être un peu abrégée.

On voit sans peine que, si $Q$ est une image biunivoque et bicontinue de $P$, $Q_\xi$ en est une de $P_\xi$ pour tout nombre ordinal $\xi$. Donc $p_n$ étant un point de $P_{\alpha_n}$, $q_n$ en est un de $Q_{\alpha_n}$. Soit $\xi$ un nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $0 \leqslant \xi < \alpha$. Comme $\alpha$ est par définition le plus petit nombre ordinal tel que $\alpha > \alpha_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, nous concluons de $\xi < \alpha$ que l'on a pour $n$ suffisamment grands $\xi < \alpha_n$. Il en résulte que, pour $n > \mu$, l'ensemble $Q_{\alpha_n}$, donc aussi le point $q_n$, est contenu dans $Q_\xi$. Le point $q = \lim\limits_{n=\infty} q_n$ (n'appartenant pas à $Q$) est donc un point d'accumulation de tout ensemble $Q_\xi$ pour $0 \leqslant \xi < \alpha$: c'est donc une lacune d'ordre $\geqslant \alpha$ de l'ensemble $Q$, ce qui achève la démonstration du lemme[1]).

*Lemme 2. Soient: $p$ un point de l'ensemble $P$, $Q$ un ensemble homéomorphe à $P$ et $q$ l'image de $p$ dans $Q$.*

*Si, dans tout entourage de $p$, il existe des lacunes d'ordre $\alpha$ de $P$, sans qu'il en soit de même des lacunes d'ordre $> \alpha$ de $P$, tout entourage de $q$ admet des lacunes d'ordre $\alpha$ de $Q$, sans qu'il en soit de même des lacunes d'ordre $> \alpha$ de $Q$.*

Soit $\varepsilon$ un nombre positif donné. $Q$ étant homéomorphe à $P$, il existe un nombre positif $\delta$ tel qu'en désignant par $U$ l'ensemble des points de $P$ situés à la distance $< \delta$ de $p$ et par $V$ l'image de $U$ dans $Q$, $q$ appartient à $V$ et tous les points de $V$ se trouvent situés à la distance $< \varepsilon$ de $q$. Tout entourage de $p$ contenant par hypothèse une lacune de $P$ d'ordre $\alpha$, il existe dans $U$ une lacune $l$ de $P$ d'ordre $\alpha$ et, par suite, la distance $\overline{lp}$ est $< \varepsilon$. L'ensemble $V$ étant homéomorphe à $U$ et les deux ensembles étant par définition bornés, il existe en vertu du lemme 1 au moins une lacune d'ordre $\geqslant \alpha$ de $V$ et on voit sans peine que c'est en même temps une lacune d'ordre $\geqslant \alpha$ de $Q$. Il est ainsi démontré que tout entourage du point $q$ admet une lacune d'ordre $\geqslant \alpha$ de $Q$.

Supposons maintenant que tout entourage de $q$ admette une lacune d'ordre $> \alpha$ de $Q$. En raisonnant comme plus haut, on montre qu'il existerait alors dans tout entourage de $p$ une

[1]) Notons que, si un ensemble borné $P$ possède une lacune d'ordre $\alpha$, l'ensemble borné $Q$ homéomorphe à $P$ peut ne posséder aucune lacune d'ordre $\alpha$ et que le nombre des lacunes de $Q$ d'ordre $\geqslant \alpha$ peut différer de celui des lacunes de $P$ d'ordre $\geqslant \alpha$.

lacune d'ordre $>\alpha$ de $P$, contrairement à l'hypothèse qu'il n'en est pas ainsi. Or, nous avons démontré que tout entourage de $q$ admet une lacune d'ordre $\geqslant\alpha$ de $Q$; nous en concluons donc que tout entourage de $q$ admet une lacune d'ordre $\alpha$ de $Q$, sans que tout entourage de $q$ en admette d'ordre $>\alpha$, c. q. f. d.

Ceci établi, soit

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

une suite infinie donnée, formée de nombres 0 et 1.

Soient $k$ et $n$ deux nombres naturels. Plaçons à l'intérieur de l'intervalle $\left\langle k-\frac{1}{n}, k-\frac{1}{n+1}\right\rangle$ un ensemble bien ordonné fermé du type $\omega^{2k+a_k}+1$ et enlevons en le dernier élément. Nous obtiendrons ainsi un ensemble bien ordonné $G_{k,n}$, du type $\omega^{2k+a_k}$, possédant une lacune unique, et on voit sans peine que ce sera une lacune d'ordre $2k+a_k$.

Soient: $p_k$ le point d'abscisse $k$ et $G_{k,\omega}$ l'ensemble contenant un seul élément $p_k$. Désignons maintenant par $G=G(a_1, a_2, \dots)$ l'ensemble bien ordonné

$$\begin{aligned} & G_{1,1}+G_{1,2}+G_{1,3}+\dots+G_{1,\omega}+ \\ & +G_{2,1}+G_{2,2}+G_{2,3}+\dots+G_{2,\omega}+ \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & +G_{k,1}+G_{k,2}+G_{k,3}+\dots+G_{k,\omega}+ \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

On voit sans peine que seuls les points $p_1, p_2, p_3, \dots$ de l'ensemble $G$ sont des points d'accumulation de lacunes de cet ensemble et que tout entourage de $p_k$ contient une lacune de $G$ d'ordre $2k+a_k$, sans qu'il en soit ainsi des lacunes d'ordre $>2k+a_k$.

Soient maintenant

(1) $$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

(2) $$b_1, b_2, b_3, \dots$$

deux suites infinies distinctes composées de nombres 0 et 1. Nous allons montrer que les ensembles $G=G(a_1, a_2, \dots)$ et $\Gamma=G(b_1, b_2, \dots)$ ne sont pas homéomorphes.

En effet, soient $a_r$ et $b_r$ deux termes différents des suites (1) et (2). Dans tout entourage du point $p_r$ de $G$, il existe une lacune de $G$ d'ordre $2r+a_r$, mais il n'en est pas de même des lacunes d'ordre $>2r+a_r$.

D'après le lemme 2, il existerait donc dans l'ensemble $\Gamma$, supposé homéomorphe à $G$, un point $q$ (image de $p_r$) dont tout entourage contient une lacune de $\Gamma$ d'ordre $2r+a_r$, sans que tout entourage de $q$ en contienne d'ordre $>2r+a_r$.

Or, on voit sans peine qu'en désignant convenablement par $q_1, q_2, q_3, \dots$ les points d'accumulation de lacunes de l'ensemble $\Gamma$, nous pouvons supposer que tout entourage du point $q_k$ contient une lacune de $\Gamma$ d'ordre $2k+b_k$, mais qu'il existe des entourages de $q_k$ sans lacunes de $\Gamma$ d'ordre $>2k+b_k$.

Nous avons donc, pour un indice $s$:

$$q=q_s \quad \text{et} \quad 2r+a_r=2s+b_s.$$

La différence $a_r-b_s=2(s-r)$ étant $\leqslant 1$ en valeur absolue (puisque $a_r$ et $b_s$ sont des nombres 0 ou 1), nous en concluons que $s=r$ et $a_r=b_s$, ce qui donne $a_r=b_r$, contrairement à l'hypothèse que $a_r$ et $b_r$ sont deux termes différents des suites (1) et (2). Les ensembles $G$ et $\Gamma$ ne sont donc pas homéomorphes.

Deux ensembles $G(a_1, a_2, a_3, \dots)$ et $G(b_1, b_2, b_3, \dots)$ correspondant aux suites (1) et (2) différentes (formées des nombres 0 et 1) appartiennent donc toujours à des types topologiques différents. Tout ensemble $G$ étant évidemment clairsemé (comme un ensemble bien ordonné)[1], on a le

***Théorème 3.*** *L'ensemble de tous les types topologiques clairsemés est de puissance du continu.*

Ajoutons qu'on peut démontrer aussi que *l'ensemble de tous les types topologiques fermés est de puissance du continu.*

---

[1]) Tout ensemble $G$ est même *réductible*, puisque le dérivé $G^{(\omega^\omega)}$ est vide. (On appelle réductible tout ensemble dont le dérivé d'ordre $\Omega$ est vide. La réductibilité d'un ensemble n'est pas un invariant topologique).