Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette note est de démontrer le suivant

Théorème[1]. *Tous les ensembles dénombrables denses en soi* (situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions) *sont homéomorphes.*

Démonstration. Soient E et E' deux ensembles dénombrables et denses en soi. Comme tout ensemble de points de l'espace à m dimensions peut être regardé comme un ensemble de points de l'espace à $n>m$ dimensions, on peut admettre que les ensembles E et E' appartiennent au même espace à n dimensions. Pour abréger l'écriture, nous donnerons la démonstration pour $n=2$, mais notre raisonnement sera valable (avec des modifications évidentes) pour un nombre quelconque de dimensions. Enfin, tout ensemble de points étant évidemment homéomorphe à un ensemble borné, nous pouvons admettre que les ensembles E et E' sont bornés.

Soit R un rectangle aux côtés parallèles à l'axes de coordonnées et tel que l'ensemble E est intérieur à R. L'ensemble E étant dénombrable, nous concluons sans peine qu'il existe un ensemble dense formé de parallèles à l'axe d'abscisses et dont aucune ne contient de points de E.

[1] J'ai signalé déjà ce théorème dans la note *L'homéomorphisme des espaces rationnels*, Wektor 1915.

Soient:

$$(1) \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

un ensemble dense et dénombrable de telles parallèles à l'axe d'abscisses et

$$(2) \qquad \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$$

un ensemble analogue (dense et ne contenant de points de E) de parallèles à l'axe d'ordonnées.

Je dis qu'il existe dans la suite infinie

$$(3) \qquad \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3, \dots$$

au moins une droite λ qui divise le rectangle R en deux rectangles dont chacun contient des points de E.

Soient, en effet, q_1 et q_2 deux points de E. Si la droite $q_1 q_2$ n'est pas parallèle à l'axe d'abscisses, les points q_1 et q_2 ont des ordonnées différentes et il existe évidemment dans la suite (1) au moins une droite μ telle que les points q_1 et q_2 se trouvent dans des parties différentes en lesquelles la droite μ coupe le plan. Comme parallèle à l'un des côtés de R, la droite μ divise R en deux rectangles désirés. Si la droite $q_1 q_2$ est parallèle à l'axe d'abscisses, elle ne l'est pas à l'axe d'ordonnées et le même raisonnement s'applique à la suite (2).

Soit

$$(4) \qquad q_1, q_2, q_3, \dots$$

une suite infinie contenant tous les points de l'ensemble E.

Posons $p_0 = q_1$ et soit λ la première droite de la suite (3) qui divise le rectangle R en deux rectangles dont chacun contient des points de E. Désignons par R_0 celui d'entre eux qui contient le point p_0; l'autre sera désigné par R_1.

p_0 est évidemment le premier point de la suite (4) contenu dans R_0; soit p_1 le premier point de la suite (4) contenu dans R_1.

E_0 et E_1 désignant les parties de E contenues respectivement dans R_0 et R_1, on voit sans peine que chacun des ensembles E_0 et E_1 est dénombrable dense en soi et que $E = E_0 + E_1$.

En raisonnant sur R_0 et E_0 comme plus haut sur R et E, on voit qu'il existe dans la suite (3) au moins une droite — soit λ_0 la première d'entre elles — qui divise le rectangle R_0

en deux rectangles dont chacun contient des points de E_0, donc aussi de E. Désignons en par R_{00} celui qui contient le point $p_{00}=p_0$; l'autre sera désigné par R_{01}. Soit p_{01} le premier point de la suite (4) contenu dans R_{01}. Nous définissons d'une façon analogue les rectangles R_{10} et R_{11} et les points $p_{10}=p_1$ et p_{11}.

D'une façon générale, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ étant des nombres 0 ou 1, nous pouvons considérer les rectangles $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$, les ensembles $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ et les points $p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$. Tout rectangle $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ aura des côtés parallèles aux axes de coordonnées et ne contiendra sur son contour aucun point de E; $p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ sera le premier point de la suite (4) intérieur à $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$. Si l'on désigne par $\lambda_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ la première droite de la suite (3) qui divise le rectangle $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ en deux rectangles dont chacun contient des points de E, $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n0}$ sera celui d'entre eux qui contient le point $p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$; l'autre sera désigné par $R_{\alpha_1\alpha_1\dots\alpha_n1}$. $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ désignera la partie de E, contenue dans $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$: c'est un ensemble dénombrable, dense en soi.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ une suite infinie donnée de nombres 0 et 1. Je dis que le diamètre de $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ tend vers 0 avec $n\to\infty$.

Dans le cas contraire, il existerait, en effet, un nombre positif δ et une suite infinie croissante d'indices $n_1, n_2, n_3, \dots$ tels que le diamètre de $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_k}}$ dépasserait δ pour $k=1,2,3,\dots$ Il s'en suit qu'il existe dans $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_k}}$ deux points, soit u_k et v_k avec la distance u_kv_k dépassant δ. L'ensemble E étant borné et u_k, v_k appartenant évidemment à E, il en résulte, comme on sait, l'existence d'une suite infinie croissante d'indices $k_1, k_2, \dots$ pour laquelle les suites des points u_{k_s} et v_{k_s} $(s=1,2,\dots)$ sont convergentes. Posons:

$$(5) \qquad \lim_{s=\infty} u_{k_s}=u, \qquad \lim_{s=\infty} v_{k_s}=v.$$

Les distances $u_{k_s}v_{k_s}$ dépassant δ (pour $s=1,2,\dots$), il résulte de (5) que la distance uv n'est pas inférieure à δ. Par conséquent, il existe dans la suite (3) une droite λ qui coupe le plan entre les points u et v. Je dis que la droite λ divise chaque rectangle $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ $(n=1,2,\dots)$ en deux rectangles dont chacun contient des points de E. En effet, l'ensemble $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ contenant toujours l'ensemble $E_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\alpha_{n+1}}$, on voit sans peine que, pour n donné et s suffisamment grand, les points u_{k_s} et v_{k_s}

appartiennent tous les deux à $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$; s'ils étaient tous (pour s suffisamment grands) dans une même partie du plan par rapport à λ, il résulte de (5) que les points u et v ne pourraient être situés de deux côtés différents de la droite λ, contrairement à la définition de cette droite. Soit r le (plus petit) numéro de la droite λ dans la suite (3). Soit, d'une façon générale, r_n le (plus petit) numéro de la droite extraite de la suite (3) qui divise le rectangle $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ en rectangles $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0}$ et $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1}$. En vertu de la définition des ces rectangles, la suite $r_1, r_2, r_3,\ldots$ est croissante et il existerait donc un indice n tel que $r_n > r$.

Or, c'est impossible, car alors le r_n-ième terme de la suite (3) ne serait pas la première droite de cette suite qui divise $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ en deux rectangles dont chacun contient des points de E (puisque le r-ième terme de la suite (3) jouit de la même propriété). Il est ainsi démontré que (pour toute suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ donnée) le diamètre de $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ tend vers 0 avec $n \to \infty$.

Nous allons démontrer maintenant que tout point de E est un $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.

En effet, soit p un point de E. Soit R_{α_1} celui des deux rectangles R_0 et R_1 qui contient p. Soit $R_{\alpha_1\alpha_2}$ celui des deux rectangles $R_{\alpha_1 0}$ et $R_{\alpha_1 1}$ qui contient p, et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à une suite infinie de rectangles

$$R_{\alpha_1},\quad R_{\alpha_1\alpha_2},\quad R_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad \ldots$$

dont chacun contient le point p; ce dernier appartient donc aussi à chacun des ensembles $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ $(n=1,2,\ldots)$. Comme un point de E, p est un terme de la suite (4); soit p. ex. $p=q_m$. Or, il résulte sans peine de la définition des points $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ que si p est un point de $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, l'indice de $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ dans la suite (4) n'est pas supérieur à celui de p dans cette suite. Donc, comme $p=q_m$, tout terme de la suite

$$p_{\alpha_1},\quad p_{\alpha_1\alpha_2},\quad p_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad \ldots \tag{6}$$

a dans (4) un indice $\leqslant m$. Par conséquent, un au moins des points de la suite (6), soit q, figure dans la suite (6) une infinité de fois. Il en résulte sans peine que q appartient à chacun des ensembles E_{α_1}, $E_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots$ (puisque, chacun d'eux contenant tous les suivants, $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ contient les points $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}, \ldots$). Chacun des ensembles $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ contient donc les points p et q et, par suite, est de diamètre non inférieur à la distance entre p et q, ce qui n'est possible que dans le cas où $p=q$ (puisque, comme nous avons démontré plus haut, le diamètre de $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ tend vers 0 avec $n\to\infty$). Nous avons donc démontré que $p=q$, c. à. d. que p est un terme de la suite (6). Ainsi, l'ensemble de tous les points $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant des 0 ou 1) constitue l'ensemble E.

On voit sans peine que deux points $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ et $p_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}$ (où $m\geqslant n$) coïncident dans le cas où $\alpha_i=\beta_i$ pour $i=1,2,\ldots n$ et $\beta_i=0$ pour $i=n+1,\ n+2,\ldots$ — et dans ce cas seulement.

Soit maintenant E' un autre ensemble dénombrable et dense en soi. En opérant sur E' comme sur E, nous obtenons pour E' les rectangles $R'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, les ensembles $E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ et les points $p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.

Faisons correspondre à tout point $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ de E le point $p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ de E'. On voit aisément que c'est une correspondance biunivoque entre les points de E et ceux de E'. Je dis que cette correspondance est bicontinue.

En effet, soit $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ un point de E et ε un nombre positif donné. Chacun des ensembles

$$E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},\qquad E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0},\qquad E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 00},\qquad E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 000},\qquad \ldots$$

contient le point $p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0}=p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 00}=\ldots$ et le diamètre de ces ensembles tend vers 0. Soit $E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0\ldots 0}$ l'un d'eux (à $n+k$ indices) de diamètre $<\varepsilon$. Le point $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ est évidemment intérieur au rectangle $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0\ldots 0}$ (à $n+k$ indices). Soit p un point quelconque de E, intérieur au même rectangle. C'est évidemment un point de $E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0\ldots 0}$ et son image p' appartient par conséquent à $E'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0\ldots 0}$; elle est donc à une distance de $p'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ inférieure à ε. Nous avons ainsi démontré que, pour tout point $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ de E et pour tout nombre positif ε, il existe un rectangle contenant $p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ et tel que l'image de tout point de E intérieur à ce rectangle se trouve à une distance moindre que ε de l'image $p'_{a_1 a_2 \dots a_n}$ de $p_{a_1 a_2 \dots a_n}$. Cela prouve que, dans notre correspondance, E' est une image continue de E. On démontre de même que, dans cette correspondance, E est une image continue de E'. La correspondance entre E et E' est donc biunivoque et bicontinue, c. à. d. que E et E' sont homéomorphes.

Les points p_0 et p'_0 étant par hypothèse deux points quelconques de E et E', nous avons démontré en même temps qu'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre E et E' transformant un point quelconque de E en un point quelconque de E'. Autrement dit, *tout ensemble dénombrable dense en soi est topologiquement homogène.*

Notre théorème permet aussi de démontrer sans peine que *tout ensemble dénombrable dans l'espace à m dimensions est homéomorphe à un ensemble de nombres rationnels (donc à un ensemble linéaire).*

Soit, en effet, E un ensemble dénombrable dans l'espace euclidien à m dimensions. Soit R_m l'ensemble des points de cet espace dont toutes les coordonnées sont rationnelles; R_m est donc dénombrable dense en soi et il en est de même de $P = R_m + E$. D'après notre théorème, P est homéomorphe à R_1. Par conséquent, le sous-ensemble E de P est homéomorphe à un sous-ensemble de R_1, c. q. f. d.

Un des cas particuliers les plus intéressants de notre théorème est celui d'après lequel l'ensemble de tous les nombres rationnels et l'ensemble de tous les points du plan aux coordonnées rationnelles sont homéomorphes. Ce théorème a été démontré par moi sur une autre voie dans ma note citée.

En voici encore un autre cas particulier intéressant. Soit P un ensemble parfait linéaire non-dense, E l'ensemble de toutes les extrémités gauches des intervalles contigus à P. L'ensemble E est évidemment dénombrable et dense en soi, donc, d'après notre théorème, homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres rationnels. Ce résultat est remarquable, puisque tout point de E n'en est un point d'accumulation que du côté droit, tandis que tout point de R_1 en est un des deux côtés.