# Sur les continus indécomposables.

Par

S. Janiszewski et C. Kuratowski (Warszawa).

Un continu est *indécomposable* [1]), lorsqu'il n'est pas une somme de deux vrais sous-continus (c. à d. de deux continus différents de lui).

Les continus indécomposables jouent un grand rôle dans les recherches topologiques. Beaucoup de théorèmes [2]) ne sont vrais que pour les continus qui ne contiennent aucun sous-continu irréductible entre deux quelconques de trois points situés sur ce sous-continu. Comme il résulte de la Note de M. Mazurkiewicz, publiée dans ce volume [3]), la notion de continu irréductible entre deux quelconques de trois points donnés coïncide avec celle de continu indécomposable.

Le but de ce Mémoire est d'établir certaines conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un continu donné soit indécomposable et d'en signaler quelques propriétés singulières.

---

[1]) Les premiers exemples des continus indécomposables ont été publiés par M. L. E. J. Brouwer dans sa Note *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68 (1910), p. 426. Il y était question de démontrer qu'une courbe fermée au sens de M. A. Schönflies pouvait être un continu indécomposable. Si on ne demande pas que le continu soit une courbe fermée, ces exemples peuvent être simplifiés (voir S. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Thèse, Paris 1911; paru aussi dans le Journal de l'Ecole Polytechnique, II Série, 16-ème Cahier (1912), pp. 79—170).

[2]) Voir S. Janiszewski, C. R. Paris t. 151 (1911) ou Thèse, l. c., Chap. VII et VIII.

[3]) S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les continus indécomposables*, p. 35—39.

Parmi les théorèmes qui seront démontrés ici, le théorème II est dû entièrement à M. Janiszewski; les autres sont dus aux deux auteurs ou bien trouvés indépendamment par M. Janiszewski ou par M. Kuratowski en collaboration avec M. B. Knaster.

## I.

Nous précédons la théorie des continus indécomposables par un théorème qui peut être traité sans avoir recours à cette théorie.

***Théorème I.*** *Si la somme et le produit de deux ensembles fermés $A$ et $B$ sont des continus, $A$ et $B$ sont aussi des continus.*

Soient $A$ et $B$ deux ensembles fermés,

(1) $$A+B \text{ un continu,}$$

(2) $$AB \text{ un continu.}$$

Les hypothèses étant symétriques, il suffit de montrer que $A$ est un continu.

Supposons que $A$ ne le soit pas; il existe alors deux ensembles fermés $M$ et $N$ tels que:

(3) $$A = M + N,$$

(4) $$MN = 0,$$

(5) $$M \neq 0, \quad N \neq 0.$$

Il résulte de (3) que

(6) $$A+B = M+N+B,$$

où les ensembles $M$, $N$ et $B$ sont fermés par hypothèse. Si l'on suppose donc que $MB=0$ ou que $NB=0$, la formule (6) représente, en vertu de (4), une décomposition du continu $(A+B)$ en deux ensembles fermés non vides $M$ et $(N+B)$ ou $N$ et $(M+B)$ sans point commun, ce qui est impossible.

Donc

(7) $$MB \neq 0 \quad \text{et} \quad NB \neq 0.$$

En multipliant par $B$ les deux membres de (3), on obtient

(8) $$AB = MB + NB,$$

où les sommandes $MB$ et $NB$ sont des ensembles fermés, non vides (d'après (7)) et sans point commun, car d'après (4)

$$(MB)\cdot(NB)\subset MN=0.$$

La décomposition (8) est donc en contradiction avec (2). Il s'ensuit que $A$ est un continu, c. q. f. d.

Un ensemble $A$ est dit selon M. Hausdorff[1]) *ensemble frontière*, s'il ne contient aucun point intérieur; en désignant l'espace par $E$, cette condition peut s'exprimer par l'inclusion

$$A\subset\overline{E-A} \quad {}^{2}). \tag{9}$$

De même, un ensemble $A$ est dit *ensemble frontière par rapport à $M$*, lorsque

$$A\subset\overline{M-A}.$$

Un ensemble frontière fermé s'appelle *non-dense*.

Un sous-continu $K$ d'un continu $C$ est dit son *continu de condensation*[3]), lorsque

$$K\subset\overline{C-K}. \tag{10}$$

Il est évident que les propositions: „$K$ est un sous-continu de *condensation* du continu $C$“ et „$K$ est un sous-continu *non-dense* par rapport à $C$“ sont équivalentes.

On voit aussi que la formule (10) peut être remplacée par l'identité

$$\overline{C-K}=C. \tag{11}$$

***Théorème II.*** *Pour qu'un continu $C$ soit indécomposable, il faut et il suffit que chaque vrai sous-continu de $C$ en soit un continu de condensation.*

---

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 215 („Randmenge“).

[2]) $M$ étant un ensemble quelconque, nous désignons par $\overline{M}$ la somme de $M$ et de son ensemble dérivé.

[3]) S. Janiszewski, Thèse, p. 24.

1. La condition est nécessaire. Autrement dit: si le continu $C$ est décomposable, il contient un sous-continu qui n'en est pas un continu de condensation. Soit

$$C=C_1+C_2 \tag{12}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des vrais sous-continus de $C$.

On a d'après (12):

$$C-C_1\subset C_2 \qquad \text{et} \qquad \overline{C-C_1}\subset C_2 \neq C,$$

c. à d. $\overline{C-C_1}\neq C$, ce qui signifie d'après (11) que $C_1$ n'est pas un continu de condensation de $C$.

2. La condition est suffisante. Il s'agit de montrer que, $K$ étant un vrai sous-continu de $C$ qui n'en est pas un continu de condensation, le continu $C$ est décomposable. On a par hypothèse:

$$K\neq C, \tag{13}$$

$$\overline{C-K}\neq C. \tag{14}$$

Deux cas peuvent se présenter:

*a*) $\overline{C-K}$ est un continu. Comme

$$C=K+(C-K)=K+\overline{C-K},$$

$C$ peut être décomposé en deux vrais sous-continus de $C$, à savoir $K$ et $\overline{C-K}$.

*b*) $\overline{C-K}$ n'est pas un continu. Il existe alors deux ensembles fermés $E_1$ et $E_2$ tels que:

$$\overline{C-K}=E_1+E_2, \tag{15}$$

$$E_1E_2=0, \tag{16}$$

$$E_1\neq 0, \quad E_2\neq 0. \tag{17}$$

Posons:

$$A=K+E_1 \qquad \text{et} \qquad B=K+E_2. \tag{18}$$

Nous allons montrer que les ensembles fermés $A$ et $B$ satisfont aux conditions du th. I. En effet,

$$C=K+\overline{C-K}=K+E_1+E_2=A+B, \tag{19}$$

de sorte que la somme de $A$ et $B$ est un continu. En même temps,

$$AB=(K+E_1)\cdot(K+E_2)=K+E_1E_2$$

et d'après (16)

$$AB=K,$$

ce qui montre que le produit de $A$ et $B$ est aussi un continu.

Ainsi, la somme $A+B$ et le produit $AB$ étant des continus, les ensembles $A$ et $B$ le sont aussi en vertu du th. I.

On a selon (19)

$$C=A+B. \tag{20}$$

Nous allons montrer que ni $A$ ni $B$ n'est identique à $C$.

Supposons, en effet, que $A=C$; d'après (18), on aurait alors $K+E_1=C$, d'où $C-K\subset E_1$ et par suite

$$\overline{C-K}\subset E_1. \tag{21}$$

On conclut de (15) et (21) que $E_2\subset E_1$, contrairement à (16) et (17).

Donc $A\neq C$ et, par raison de symétrie, $B\neq C$.

Ainsi, l'identité (20) représente une décomposition du continu $C$ en deux vrais sous-continus, c. q. f. d.

Un sous-continu de condensation d'un continu quelconque $C$ est — comme nous l'avons dit — un ensemble non-dense par rapport à $C$. Par conséquent, une somme d'une infinité dénombrable de continus de condensation est un ensemble de première catégorie au sens de M. Baire par rapport à $C$. D'après un théorème de M. Baire[1]), un ensemble de première catégorie par rapport à un ensemble fermé quelconque ne lui est jamais identique. En vertu du th. II, il en résulte le théorème suivant:

***Théorème III.*** *Un continu indécomposable n'est pas somme d'un ensemble fini ou dénombrable de ses vrais sous-continus.*

[1]) Voir p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 327.

## II.

$a$ étant un point d'un continu quelconque $C$, nous désignons par $\mathfrak{P}(a, C)$ l'ensemble de tous les points que l'on peut unir au point $a$ par un vrai sous-continu de $C$.

$C - \mathfrak{P}(a, C)$ est par conséquent l'ensemble des points $x$ tels que $C$ est un continu irréductible entre $a$ et $x$. La condition pour que $C$ soit irréductible entre $a$ et un autre point peut donc s'exprimer par l'inégalité $\mathfrak{P}(a, C) \neq C$.

M. Mazurkiewicz a démontré dans sa Note citée des théorèmes que l'on peut énoncer de la manière suivante:

($\alpha$) $a$ étant un point d'un continu indécomposable $C$, l'ensemble $\mathfrak{P}(a, C)$ est de première catégorie par rapport à $C$.

Ce théorème implique — comme l'a indiqué M. Mazurkiewicz — que

($\beta$) $a$ étant un point quelconque d'un continu indécomposable $C$, l'ensemble $\mathfrak{P}(a, C)$ est un ensemble frontière par rapport à $C$, c. à d.

$$\mathfrak{P}(a, C) \subset \overline{C - \mathfrak{P}(a, C)};$$

($\gamma$) $C$ étant un continu indécomposable, il existe trois points tels que $C$ est irréductible entre deux quelconques de ces points.

A l'aide de ces théorèmes, nous allons établir le suivant

***Théorème IV.*** *Chacune des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'un continu $C$ soit indécomposable:*

(I) *$a$ étant un point quelconque de $C$, il existe un point $x$ tel que $C$ est irréductible entre $a$ et $x$, c. à d.*

$$\mathfrak{P}(a, C) \neq C;$$

(II) *il existe un point $a$ de $C$ tel que $\mathfrak{P}(a, C)$ est un ensemble frontière par rapport à $C$, c. à d. tel que*

$$\mathfrak{P}(a, C) \subset \overline{C - \mathfrak{P}(a, C)};$$

(III) *il existe dans $C$ trois points tels que $C$ est irréductible entre deux quelconques de ces points.*

Il résulte immédiatement des théorèmes ($\alpha$), ($\beta$) et ($\gamma$) que toutes les conditions (I)—(III) sont nécessaires. Nous allons montrer que chacune d'elles est suffisante, notamment qu'aucune de ces conditions n'est vérifiée, lorsque $C$ est un continu décomposable. Posons donc

$$C = C_1 + C_2, \tag{1}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des continus, et soit:

$$C_1 \neq C, \qquad C_2 \neq C. \tag{2}$$

1° $C$ étant un continu, on a d'après (1) et (2)

$$C_1 C_2 \neq 0.$$

Soit $a$ un point appartenant à ce produit. En vertu de la formule (2), on a selon la définition de $\mathfrak{P}(a, C)$:

$$C_1 \subset \mathfrak{P}(a, C) \qquad \text{et} \qquad C_2 \subset \mathfrak{P}(a, C);$$

par suite

$$C_1 + C_2 \subset \mathfrak{P}(a, C),$$

d'où selon (1)

$$C = \mathfrak{P}(a, C).$$

Donc, la condition (I) n'est pas vérifiée.

2° Soit $a$ un point quelconque de $C$. En vertu de (1), ce point appartient à $C_1$ ou à $C_2$. Nous pouvons admettre par raison de symétrie que $a$ appartient à $C_1$. On a d'après (2)

$$C_1 \subset \mathfrak{P}(a, C), \tag{3}$$

d'où, suivant (1),

$$C - \mathfrak{P}(a, C) \subset C - C_1 \subset C_2$$

et par conséquent

$$\overline{C - \mathfrak{P}(a, C)} \subset C_2. \tag{4}$$

Or, si la condition (II) était vérifiée, on aurait d'après (3) et (4)

$$C_1 \subset \mathfrak{P}(a, C) \subset \overline{C - \mathfrak{P}(a, C)} \subset C_2$$

et par suite

$$C_1 \subset C_2,$$

d'où, selon (1), $C_2 = C$, contrairement à (2).

Donc, la condition (II) n'est vérifiée non plus.

3° Soient $a, b$ et $c$ trois points quelconques de $C$. En vertu de l'égalité (1), deux au moins de ces points appartiennent à l'un des continus $C_1$ et $C_2$. Par raison de symétrie, nous pouvons admettre que $a$ et $b$ appartiennent à $C_1$. Or, d'après (2), $C$ n'est pas irréductible entre $a$ et $b$.

Ainsi, il n'existe pas sur $C$ trois points $a$, $b$ et $c$ tels que $C$ soit irréductible à la fois entre $a$ et $b$, $b$ et $c$, $a$ et $c$. Donc la condition (III) n'est pas vérifiée, elle aussi, c. q. f. d.

Le théorème ($\beta$) permet d'établir une propriété singulière des continus indécomposables qui concerne la notion d'*oscillation* [1]) de ces continus. D'ailleurs — comme on le verra aisément — cette propriété n'est pas suffisante pour qu'un continu soit indécomposable.

***Théorème V.*** *Si le continu $C$ est indécomposable, l'oscillation de $C$ dans chacun de ses points est constante et égale au diamètre de $C$.*

Soit $a$ un point quelconque du continu indécomposable $C$. D'après le théorème ($\beta$), on trouve sur $C$ à une distance de $a$ aussi petite que l'on veut des points qui ne peuvent être joints à $a$ par aucun vrai sous-continu de $C$. Par conséquent, l'oscillation de $C$ dans $a$ est égale au diamètre de $C$, c. q. f. d.

## III.

***Théorème VI.*** *Les points $a$ et $b$ étant situés sur un continu indécomposable $C$, on a*

$$(\omega) \qquad \textit{soit} \quad \mathfrak{P}(a, C) = \mathfrak{P}(b, C), \qquad \textit{soit} \quad \mathfrak{P}(a, C) \cdot \mathfrak{P}(b, C) = 0.$$

Nous allons démontrer que, la condition ($\omega$) n'etant pas vérifiée, le continu $C$ est décomposable. Admettons donc que

$$\mathfrak{P}(a, C) \neq \mathfrak{P}(b, C)$$

et que $c$ est un point de $\mathfrak{P}(a, C)$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{P}(b, C)$; par suite, il existe un sous-continu $C_1$ de $C$, contenant $a$ et $c$ et tel que

$$(1) \qquad C_1 \neq C.$$

[1]) Voir S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, ce volume, p. 170.

Admettons que l'on a en même temps

$$\mathfrak{P}(a, C) \cdot \mathfrak{P}(b, C) \neq 0.$$

Soit $d$ un point appartenant à ce produit. Il existe donc dans $C$ un vrai sous-continu $C_2$ contenant $a$ et $d$ et un vrai sous-continu $C_3$ contenant $b$ et $d$:

$$C_2 \neq C, \tag{2}$$

$$C_3 \neq C. \tag{3}$$

Or, $a$ étant un point de $C_1$ et $C_2$ et $d$ un point de $C_2$ et $C_3$, la somme $C_1 + C_2 + C_3$ est un continu. Ce continu contient les points $b$ et $c$; d'autre part, comme $c$ n'appartient pas à $\mathfrak{P}(b, C)$, le continu $C$ est irréductible entre $b$ et $c$. Donc

$$C = C_1 + C_2 + C_3. \tag{4}$$

Deux cas peuvent se présenter, suivant que l'identité

$$C = C_1 + C_2 \tag{5}$$

est vraie ou non.

Si elle est vraie, elle représente une décomposition de $C$ en deux vrais sous-continus en vertu des inégalités (1) et (2). Dans le cas contraire, l'égalité (4) fournit une décomposition de $C$ en deux vrais sous-continus, à savoir $(C_1 + C_2)$ et $C_3$ (en vertu de l'inégalité (3)).

Donc, si la condition $(\omega)$ n'est pas vérifiée, le continu $C$ est décomposable, c. q. f. d.

Lorsque tout couple de points $a, b$ d'un continu quelconque $C$ satisfait à la condition $(\omega)$, nous appelons, pour chaque point $x$ appartenant à $C$, l'ensemble $\mathfrak{P}(x, C)$ le *composant de $x$ dans $C$*. On voit aisément que tout continu $C$ qui ne contient aucun couple de points entre lesquels il est irréductible satisfait à la condition $(\omega)$ et par conséquent est lui même son propre et unique composant. D'autre part, on peut trouver facilement des continus pour lesquels la condition $(\omega)$ n'est pas vérifiée. $C$ désignant p. ex. un segment de droite et $a, b$ ses extrémités, on a $\mathfrak{P}(a, C) = C - (b)$ et $\mathfrak{P}(b, C) = C - (a)$, de sorte que la condition $(\omega)$ est en défaut.

D'après le th. VI, chaque continu indécomposable peut être regardé comme une somme de tous ses composants n'ayant deux à deux aucun point commun. Toutefois, ce théorème ne donne aucun moyen d'apprendre si un tel continu peut se réduire à un seul composant ou non. La solution de cette question résulte immédiatement du théorème ($\alpha$) de M. Mazurkiewicz. En effet, un composant du continu indécomposable étant par rapport à lui un ensemble de première catégorie, il n'est jamais identique à ce continu; pour la même raison, un continu ne peut être somme d'une infinité dénombrable d'ensembles qui sont de première catégorie par rapport à lui. Donc, les composants d'un continu indécomposable forment un ensemble indénombrable. Il serait intéressant de savoir si cet ensemble est nécessairement de la puissance du continu.

***Théorème VII.*** *Pour qu'un continu soit indécomposable, il faut et il suffit qu'il contienne plus d'un composant.*

Les théorèmes VI et ($\alpha$) montrent que la condition est nécessaire.

Admettons maintenant que le continu $C$ satisfait à la condition ($\omega$) du th. VI et que $\mathfrak{P}(a,C) \neq \mathfrak{P}(b,C)$; supposons en même temps que $C$ soit décomposable.

Il y existe alors deux vrais sous-continus $C_1$ et $C_2$ tels que

$$C = C_1 + C_2. \tag{6}$$

Suivant que $a$ appartient à $C_1$ ou à $C_2$, on a

$$C_1 \subset \mathfrak{P}(a,C) \quad \text{ou bien} \quad C_2 \subset \mathfrak{P}(a,C);$$

par suite, on a en tout cas $C_1 C_2 \subset \mathfrak{P}(a,C)$.

Tout pareillement $C_1 C_2 \subset \mathfrak{P}(b,C)$. Donc,

$$C_1 C_2 \subset \mathfrak{P}(a,C) \cdot \mathfrak{P}(b,C). \tag{7}$$

D'après (6), on a

$$C_1 C_2 \neq 0. \tag{8}$$

En vertu de (7) et (8), on a $\mathfrak{P}(a,C) \cdot \mathfrak{P}(b,C) \neq 0$, contrairement à ($\omega$). Ainsi, la condition ($\omega$) est aussi suffisante pour que $C$ soit indécomposable, c. q. f. d.

Les théorèmes démontrés jusqu'à présent s'appliquent aussi bien aux continus bornés qu'aux non bornés. Par contre, ceux que nous allons démontrer ne sont vrais que pour les continus bornés; ils permettront d'établir une propriété des continus bornés indécomposables plus forte que celle énoncée dans le th. II.

***Lemme.*** *Aucun continu borné ne contient de vrai sous-continu saturé, c. à d.: $K$ étant un vrai sous-continu d'un continu borné $C$, il existe toujours un continu $L$ tel que:*

$$K \subset L \subset C, \tag{9}$$

$$K \neq L \quad \text{et} \quad L \neq C. \tag{10}$$

Soient $a$ un point de $C-K$ et $R$ un cercle (ou, plus généralement, un sphéroïde à $n$ dimensions) contenant $a$ et satisfaisant à l'identité

$$RK = 0. \tag{11}$$

Soit $k$ un point quelconque de $K$. $\mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R})$ désignant le continu saturé contenant $k$ et contenu dans $\overline{C-R}$, on a [1])

$$R\mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R}) \neq 0. \tag{12}$$

Par définition

$$K \subset \mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R}) \subset C; \tag{13}$$

on peut donc substituer $\mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R})$ à $L$ dans la formule (9).

On a d'après (11) et (12)

$$K \neq \mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R});$$

en même temps

$$\mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R}) \neq C,$$

puisque le point $a$ de $C$ n'appartient pas à $\mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R})$.

On peut donc substituer $\mathfrak{C}_s(k, \overline{C-R})$ à $L$ aussi dans la formule (10). On en conclut que $K$ n'est pas un vrai sous-continu saturé de $C$, c. q. f. d.

---

[1]) Pour la démonstration de la formule (12), voir S. Janiszewski, *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*, Bull. Acad. de Sc. de Cracovie, 1912, p. 907.

***Théorème VIII.*** *$C$ étant un continu borné irréductible entre $a$ et $b$,*

1⁰ *l'ensemble $\mathfrak{P}(a, C)$ n'est pas un continu,*

2⁰ $\overline{\mathfrak{P}(a, C)} = C$.

1⁰. Il résulte de la définition de $\mathfrak{P}(a, C)$ qu'il n'existe aucun semi-continu qui soit un vrai sous-ensemble de $C$ et contienne $\mathfrak{P}(a, C)$ sans lui être égal. Donc, si $\mathfrak{P}(a, C)$ était un continu, il serait un vrai sous-continu saturé de $C$. Or, $C$ étant borné, un tel sous-continu n'existe pas en vertu du lemme. Par suite, $\mathfrak{P}(a, C)$ n'est pas un continu.

2⁰. $\mathfrak{P}(a, C)$ étant par définition un semi-continu, $\overline{\mathfrak{P}(a, C)}$ est un continu. Ce continu est identique à $C$. En effet, si $\overline{\mathfrak{P}(a, C)} \neq C$, on aurait $\overline{\mathfrak{P}(a, C)} \subset \mathfrak{P}(a, C)$, c. à d. $\mathfrak{P}(a, C) = \overline{\mathfrak{P}(a, C)}$, de sorte que $\mathfrak{P}(a, C)$ serait un ensemble fermé et par conséquent un continu, contrairement à 1⁰, c. q. f. d.

D'après le théorème ($\beta$), les composants d'un continu indécomposable $C$ sont des ensembles frontières par rapport à $C$. D'autre part, chaque vrai sous-continu de $C$ est situé en vertu du th. VI sur un composant de $C$. Or, nous allons montrer que, $C$ étant borné, chaque vrai sous-continu de $C$ est un ensemble frontière par rapport au composant de $C$ qui le contient et qui est — de sa part — un ensemble frontière par rapport à $C$.

***Théorème IX.*** *$C$ étant un continu indécomposable borné, tout continu $K$ situé sur un composant $S$ de $C$ est un ensemble frontière par rapport à ce composant.*

Il résulte, en effet, du th. VII que $S$ n'est pas le seul composant de $C$; on a donc

$$S \neq C \tag{14}$$

et, à plus forte raison, $K \neq C$. Par conséquent, $K$ est un continu de condensation de $C$ en vertu du th. II. On a par suite

$$K \subset \overline{C - K}. \tag{15}$$

D'après les th. IV(I) et VIII, on a $\overline{S} = C$; en substituant donc $\overline{S}$ à $C$ dans la formule (15), on obtient

$$K \subset \overline{\overline{S} - K}$$

ou encore

(16) $$K \subset \overline{\overline{S} - \overline{K}}.$$

Comme

(17) $$\overline{S} - \overline{K} \subset \overline{S - K} \text{ [1]},$$

on a

(18) $$\overline{S} - \overline{K} \subset \overline{\overline{S - K}} = \overline{S - K}.$$

Il résulte de (16) et (18) que $K \subset \overline{S - K}$, c. q. f. d.

---

[1]) La formule (17) est un cas particulier du théorème général suivant: *$A$ et $B$ étant des ensembles quelconques on a $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$.* La démonstration en est immédiate. En effet, on a pour chaque $A$ et $B$

$$A \subset A + B = (A - B) + B,$$

d'où

$$\overline{A} \subset \overline{A - B} + \overline{B}$$

et par conséquent

$$\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}.$$