Sur les lignes de Jordan.

Par
Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Ce Mémoire contient un exposé systématique des résultats dont la plupart a été publiée par moi dans trois Notes présentées à la Société des Sciences de Varsovie [1]).

I. Diamètre d'un ensemble de points.

1. Je ne considère dans ce Mémoire que des *ensembles de points d'un* R_n, c. à d. d'un espace euclidien à n dimensions, n étant un entier positif arbitraire. Dans la plupart des raisonnements, on pourrait d'ailleurs, mutatis mutandis, substituer à R_n un ensemble abstrait jouissant des propriétés convenables.

2. ***Définition.*** J'appelle *diamètre d'un ensemble* A la borne supérieure des distances entre les points de cet ensemble. Je désigne ce nombre par $\delta(A)$.

3. ***Définition*** Un ensemble A est dit *borné*, si $\delta(A)$ est un nombre fini. Il est dit *non borné*, si

$$\delta(A) = \infty . \tag{1}$$

[1]) *O arytmetyzacji kontinuów*, C. R. Soc. Sc. Varsovie VI (1913), p. 305; *O arytmetyzacji kontinuów II*, ibid. VI (1913), p. 941 et *O pewnej klasyfikacji punktów leżących na kontinuach dowolnych*, ibid. IX, (1916). Des résultats analogues ont été obtenus par M. Hahn, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 23 (1914), p. 318 et Sitzungsber. Akad. Wien CXXIII, Abt. IIa (1914), p. 2433.

4. ***Lemme I.*** *Prémisse:*

$$A_1 \cdot A_2 \neq 0. \tag{2}$$

Thèse:

$$\delta(A_1+A_2) \leqslant \delta(A_1) + \delta(A_2). \tag{3}$$

Démonstration. L'inégalité (3) est évidente (même sans tenir compte de (2)), si A_1 et A_2 ne sont pas bornés tous les deux. Supposons donc A_1 et A_2 bornés. D'après la définition **2**, il suffit de montrer que l'inégalité

$$\varrho(x,y) \leqslant \delta(A_1) + \delta(A_2) \tag{4}$$

est remplie par tout couple de points x,y de A_1+A_2. Le diamètre d'un ensemble étant non négatif par définition, on a

$$\delta(A_1) + \delta(A_2) \geqslant \begin{cases} \delta(A_1) \\ \delta(A_2), \end{cases} \tag{5}$$

d'où il s'ensuit immédiatement que l'inégalité (4) se présente en tout cas, si x et y appartiennent soit tous les deux à A_1, soit tous les deux à A_2. Dans le cas contraire, on peut supposer toujours que $x \in A_1$ et $y \in A_2$. On aura alors, a désignant un point arbitraire de l'ensemble $A_1 \cdot A_2$,

$$\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,a) + \varrho(a,y) \leqslant \delta(A_1) + \delta(A_2), \qquad \text{c. q. f. d.} \tag{6}$$

II. Distance relative.

5. Les deux définitions du terme *bien enchaîné* — celle de G. Cantor[1]) et celle de C. Jordan[2]) — ne sont équivalentes que dans le cas des ensembles bornés. Un *continu* étant défini comme un ensemble fermé, bien enchaîné et contenant plus d'un point, on a deux définitions du continu — celle de Cantor et celle de Jordan — suivant le sens que l'on attribue au terme *bien enchaîné*. Elles ne sont équivalentes que pour les continus bornés. Ainsi p. ex. l'ensemble formé d'une hyperbole et de ses asymptotes est un continu suivant la définition de Cantor et n'en est pas un suivant celle de Jordan.

Convenons d'employer ici les termes *bien enchaîné* et *continu* dans le sens de Jordan.

---

[1]) G. Cantor, Math. Ann. 21, p. 575-576.

[2]) C. Jordan, Cours d'Analyse I (2-me éd.), p. 25.

6. Etant donnés deux points x et y d'un continu A, je désignerai par $\mathcal{C}(x+y, A)$ tout sous-ensemble de A qui est fermé, bien enchaîné et contient x et y [1]).

7. $\mathcal{C}(x+y, A)$ est un continu, s'il ne se réduit pas au seul point x, ce qui ne peut arriver que dans le cas où $x = y$.

8. ***Définition.*** A étant un continu et contenant les points x et y, j'appelle *distance entre x et y relative au continu A* la borne inférieure des nombres $\delta[\mathcal{C}(x+y, A)]$. Je désignerai ce nombre par $\varrho_A(x, y)$.

On peut remplacer cette définition par la suivante: si aucun $\mathcal{C}(x+y, A)$ n'est borné, on a

$$\varrho_A(x, y) = \infty; \tag{7}$$

s'il existe au moins un $\mathcal{C}(x+y, A)$ borné, $\varrho_A(x, y)$ est le nombre défini par les conditions:

I. On a pour tout $\mathcal{C}(x+y, A)$

$$\varrho_A(x, y) \leqslant \delta[\mathcal{C}(x+y, A)]; \tag{8}$$

II. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\mathcal{C}(x+y, A)$ tel que

$$\varrho_A(x, y) + \varepsilon > \delta[\mathcal{C}(x+y, A)]. \tag{9}$$

9. ***Propriétés de la distance relative.*** La distance relative possède les propriétés suivantes:

$$\varrho_A(x, y) = \varrho_A(y, x), \tag{10}$$

$$\varrho_A(x, y) \geqslant \varrho(x, y), \tag{11}$$

$$\varrho_A(x, y) \begin{cases} > 0 & \text{pour } x \neq y \\ = 0 & \text{pour } x = y, \end{cases} \tag{12}$$

$$\varrho_A(x, z) \leqslant \varrho_A(x, y) + \varrho_A(y, z). \tag{13}$$

Les relations (10), (12) et (13) sont analogues aux propriétés caractéristiques de la distance $\varrho(x, y)$ et justifient la dénomination de $\varrho_A(x, y)$.

---

[1]) Cf. S. Janiszewski, Thèse, p. 20 et suivantes.

10. ***Démonstration des propriétés* (10)-(13).** L'égalité (10) est une conséquence immédiate du fait que tout $\mathcal{C}(x+y,A)$ est en même temps un $\mathcal{C}(y+x,A)$.

La relation (11) est évidente, lorsqu'on est dans le cas (7). Dans le cas contraire, $\varepsilon>0$ étant donné, il existe d'après **8**, II un $\mathcal{C}(x+y,A)$ — désignons-le par $\mathcal{C}_1(x+y,A)$ — tel que

$$\varrho_A(x,y)+\varepsilon>\delta[\mathcal{C}_1(x+y,A)]. \tag{14}$$

$\mathcal{C}_1(x+y,A)$ contenant x et y, on a d'après la définition **2**

$$\delta[\mathcal{C}_1(x+y,A)]\geqslant\varrho(x,y). \tag{15}$$

Les formules (14) et (15) entraînent $\varrho_A(x,y)+\varepsilon\geqslant\varrho(x,y)$, d'où la relation (11), ε étant arbitraire.

La première des relations (12) est une conséquence immédiate de (11); la seconde résulte du fait que, d'après (11), on a toujours $\varrho_A(x,y)\geqslant 0$ et que, pour $x=y$, il existe un $\mathcal{C}(x+y,A)$ de diamètre nul (à savoir celui qui se réduit au seul point x).

L'inégalité (13) est évidente, si l'une au moins des distances $\varrho_A(x,y)$, $\varrho_A(y,z)$ est infinie. Dans le cas contraire, $\varepsilon>0$ étant donné, il existe d'après **8**, II un $\mathcal{C}(x+y,A)$ et un $\mathcal{C}(y+z,A)$ — désignons-les respectivement par $\mathcal{C}_1(x+y,A)$ et $\mathcal{C}_1(y+z,A)$ — tels que:

$$\delta[\mathcal{C}_1(x+y,A)]<\varrho_A(x,y)+\varepsilon/2, \tag{16}$$

$$\delta[\mathcal{C}_1(y+z,A)]<\varrho_A(y,z)+\varepsilon/2. \tag{17}$$

L'ensemble $\mathcal{C}_1(x+y,A)\cdot\mathcal{C}_1(y+z,A)$ n'est pas vide, puisqu'il contient y. Il en résulte que:

1) l'on peut appliquer le lemme I (voir **4**) aux ensembles $\mathcal{C}_1(x+y,A)$ et $\mathcal{C}_1(y+z,A)$, ce qui donne en vertu de (16) et (17)

$$\begin{aligned}\delta[\mathcal{C}_1(x+y,A)+\mathcal{C}_1(y+z,A)]&\leqslant\\ \leqslant\delta[\mathcal{C}_1(x+y,A)]+\delta[\mathcal{C}_1(y+z,A)]&<\varrho_A(x,y)+\varrho_A(y,z)+\varepsilon;\end{aligned} \tag{18}$$

2) l'ensemble $\mathcal{C}_1(x+y,A)+\mathcal{C}_1(y+z,A)$ est un $\mathcal{C}(x+z,A)$; en appliquant donc à cet ensemble l'inégalité (8), on a en vertu de (18)

$$\varrho_A(x,z)\leqslant\varrho_A(x,y)+\varrho_A(y,z)+\varepsilon, \tag{19}$$

ce qui entraîne la relation (13), ε étant arbitraire.

III. Genre d'un point.

11. ***Définition.*** A étant un continu et a un point de A, j'appelle *oscillation du continu A au point a* le nombre [1])

$$\sigma_A(a) = \overline{\lim_{x,y \to a}} \varrho_A(x,y). \tag{20}$$

12. On a en vertu de (12)

$$\sigma_A(a) \geqslant 0. \tag{21}$$

13. ***Définition.*** Un point a d'un continu A est de *premier genre*, si

$$\sigma_A(a) = 0; \tag{22}$$

il est de *second genre*, si

$$\sigma_A(a) > 0. \tag{23}$$

Cette définition établit une classification dichotomique des points d'un continu arbitraire.

14. ***Théorème I.*** *Le genre d'un point est un invariant de l'Analysis Situs.*

Autrement dit: A et A_1 étant deux continus homéomorphes, si on établit entre leurs points une correspondance biunivoque et bicontinue, tout point de A_1 est de même genre que le point correspondant de A.

Démonstration. Les lettres a, x, y etc. désignant des points de A, désignons par $\bar{a}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ etc. les points correspondants de A_1. Il s'agit de démontrer que les relations:

$$\sigma_A(a) = 0, \tag{24}$$

$$\sigma_{A_1}(\bar{a}) = 0 \tag{25}$$

s'entraînent mutuellement; l'homéomorphie étant une relation symétrique, il suffit de montrer que (24) entraîne (25).

---

[1]) Dans ma Note de 1916, j'appelais *oscillation* le nombre $\omega_A(a) = \overline{\lim_{x \to a}} \varrho_A(x,a)$. La définition du texte, due à M. Z. Zalcwasser, me semble préférable. Les relations $\omega_A(a) = 0$ et $\sigma_A(a) = 0$ s'entraînant mutuellement, la notion de *genre d'un point* n'est pas altérée par ce changement de définition.

A cet effet, considérons un nombre $\varepsilon_1 > 0$. La correspondance entre A et A_1 étant bicontinue, on peut déterminer un $\varepsilon_2 > 0$ de manière que pour tout point x de A l'inégalité

$$\varrho(x,a) \leqslant \varepsilon_2 \tag{26}$$

entraîne

$$\varrho(\bar{x},\bar{a}) \leqslant \varepsilon_1/2. \tag{27}$$

La relation (24) supposée remplie, on peut déterminer un nombre $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tout couple de points x, y de A les inégalités:

$$\begin{gathered} \varrho(x,a) \leqslant \varepsilon_3, \\ \varrho(y,a) \leqslant \varepsilon_3 \end{gathered} \tag{28}$$

entraînent

$$\varrho_A(x,y) \leqslant \varepsilon_2/3. \tag{29}$$

On peut évidemment assujettir ε_3 à la condition supplémentaire

$$\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2/3. \tag{30}$$

L'inégalité (29) entraîne, d'après **8**. II, l'existence d'un $\mathcal{C}(x+y,A)$ — désignons-le par $\mathcal{C}_1(x+y,A)$ — tel que

$$\delta[\mathcal{C}_1(x+y,A)] \leqslant \varrho_A(x,y) + \frac{\varepsilon_2}{3} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_2. \tag{31}$$

Enfin, la correspondance entre A et A_1 étant bicontinue, il existe un $\varepsilon_4 > 0$ tel que pour tout $\bar{x}$ de A_1 l'inégalité

$$\varrho(\bar{x},\bar{a}) \leqslant \varepsilon_4 \tag{32}$$

entraîne

$$\varrho(x,a) \leqslant \varepsilon_3. \tag{33}$$

Considérons maintenant deux points arbitraires $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ de A_1 assujettis à la condition (32). Les points correspondants x_1 et x_2 de A remplissent donc l'inégalité (33). Il existe par conséquent un $\mathcal{C}_1(x_1+x_2,A)$ satisfaisant à l'inégalité (31) pour $x=x_1$ et $y=x_2$. Le sous-ensemble de A_1 qui vient correspondre à $\mathcal{C}_1(x_1+x_2,A)$ est en vertu de la bicontinuité un $\mathcal{C}(\bar{x}_1+\bar{x}_2,A_1)$; désignons-le par $C_1(\bar{x}_1+\bar{x}_2,A_1)$ et soit $\bar{z}$ un point de cet ensemble.

Le point correspondant z appartient à $\mathfrak{C}_1(x_1+x_2, A)$. En posant donc $x=x_1$ et $y=x_2$ dans la formule (31), en même temps que $x=x_1$ dans la formule (33), ces formules donnent en vertu de (30)

$$\varrho(z,a) \leqslant \varrho(x_1,z)+\varrho(x_1,a) \leqslant \\ \leqslant \delta[\mathfrak{C}_1(x_1+x_2,A)]+\varepsilon_3 \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_2}{3}=\varepsilon_2 \tag{34}$$

et, puisque (26) entraîne (27),

$$\varrho(\bar{z},\bar{a}) \leqslant \varepsilon_1/2. \tag{35}$$

On a pour tout couple $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ de points $\bar{z}$ de $\mathfrak{C}_1(\bar{x}_1+\bar{x}_2, A_1)$ satisfaisant à (35):

$$\varrho(\bar{z}_1,\bar{z}_2) \leqslant \varrho(\bar{z}_1,\bar{a})+\varrho(\bar{z}_2,\bar{a}) \leqslant \varepsilon_1, \qquad \bar{z}_1,\bar{z}_2 \subset \mathfrak{C}_1(\bar{x}_1+\bar{x}_2,A_1), \tag{36}$$

d'où

$$\delta[\mathfrak{C}_1(\bar{x}_1+\bar{x}_2,A_1)] = \text{borne sup}\ \varrho(\bar{z}_1,\bar{z}_2) \leqslant \varepsilon_1. \tag{37}$$

Or, en vertu de **8.** I,

$$\varrho_{A_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \leqslant \varepsilon_1. \tag{38}$$

Les points x_1 et x_2 de A_1, assujettis à (32), étant arbitraires, on conclut de (38) que

$$\lim_{\bar{x},\bar{y}\to\bar{a}} \varrho_{A_1}(\bar{x},\bar{y}) = \sigma_{A_1}(\bar{a}) \leqslant \varepsilon_1. \tag{39}$$

Le nombre ε_1 étant arbitraire, il en résulte (25), c. q. f. d.

15. ***Théorème II.*** *Prémisses: A est un continu; B est un sous-ensemble de A, fermé, borné et tel que*

$$\sigma_A(x) \leqslant a \tag{40}$$

pour tout point x de l'ensemble B.

Thèse: A tout nombre $\varepsilon>0$, on peut faire correspondre un nombre $\varepsilon_1>0$ tel que l'inégalité

$$\varrho(y,z) \leqslant \varepsilon_1 \tag{41}$$

entraîne l'inégalité

$$\varrho_A(y,z) \leqslant a+\varepsilon \tag{42}$$

pour tout couple de points y, z de B.

Démonstration. Pour tout point x de B, il existe en vertu de (40) un nombre $\lambda(x)>0$ tel que, pour tout couple y,z de points de A, les inégalités:

$$(43) \qquad \varrho(y,x) \leqslant \lambda(x), \qquad \varrho(z,x) \leqslant \lambda(x)$$

entraînent

$$(44) \qquad \varrho_A(y,z) \leqslant a+\varepsilon.$$

Désignons par $S(x)$ la sphère de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\lambda(x)$. Tout point de B est donc intérieur à l'une au moins des sphères $S(x)$. L'ensemble B étant borné et fermé, il existe d'après le théorème de Heine-Borel un nombre fini de ces sphères:

$$(45) \qquad S(x_1), S(x_2), \ldots, S(x_k)$$

telles que tout point de B soit encore intérieur à l'une au moins des sphères (45). Désignons par ε_1 le plus petit des k nombres positifs $\frac{1}{2}\lambda(x_1), \frac{1}{2}\lambda(x_2), \ldots, \frac{1}{2}\lambda(x_k)$ et considérons deux points y, z de l'ensemble B satisfaisant à l'inégalité (41). Le point y est intérieur à l'une des sphères (45); on peut toujours supposer que c'est la première, donc

$$(46) \qquad \varrho(y,x_1) \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda(x_1) < \lambda(x_1).$$

La définition de ε_1 entraîne $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}\lambda(x_1)$, d'où en vertu de (41) et (46):

$$(47) \qquad \begin{aligned} \varrho(z,x_1) &\leqslant \varrho(z,y)+\varrho(y,x_1) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon_1+\tfrac{1}{2}\lambda(x_1) \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda(x_1)+\tfrac{1}{2}\lambda(x_1)=\lambda(x_1). \end{aligned}$$

(43) entraînant (44) pour tous trois points x,y,z dont x est contenu dans B et y,z dans A, les inégalités (46) et (47) entraînent (44), c. q. f. d.

16. ***Corollaires du théorème II.*** Considérons le cas particulier où $a=0$. Nous obtenons l'énoncé suivant:

I. *B étant un sous-ensemble borné et fermé du continu A, si B ne contient que des points de premier genre de A, il existe, quel que soit $\varepsilon>0$, un nombre $\varepsilon_1>0$ tel que l'inégalité*

$$(48) \qquad \varrho(x,y) \leqslant \varepsilon_1$$

entraîne, pour tout couple x,y de points de B, l'inégalité

$$(49) \qquad \varrho_A(x,y) \leqslant \varepsilon.$$

Si A est borné, on peut poser $B=A$ et on obtient l'enoncé plus particulier:

II. *A étant un continu borné dont tous les points sont de premier genre, il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\varepsilon_1>0$ tel que* (48) *entraîne* (49) *pour tout couple de points x, y de A.*

17. ***Théorème III.*** *Prémisses: A est un continu et on a pour tout point x de A*

(50) $$\sigma_A(x) \leqslant a.$$

Thèse: $\varrho_A(x,y)$ est un nombre fini pour tout couple x,y de points de A.

Démonstration. Désignons pour $k=1,2,\ldots$ par S_k l'ensemble des points z de A tels que

(51) $$\varrho_A(z,x) \leqslant k$$

et posons:

(52) $$A_1=\sum\{S_k\},$$

(53) $$A_2=A-A_1.$$

L'ensemble A_1 n'est pas vide, puisqu'il contient évidemment le point x. Je dis que A_2 est vide.

Dans le cas contraire, les ensembles $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ étant fermés et A étant un continu, on aurait

(54) $$\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \neq 0.$$

Soit z_0 un point de $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$. La relation (50) est vérifiée pour le point z_0; il existe donc un nombre $\varepsilon>0$ tel que les inégalités:

(55) $$\varrho(z_1,z_0) \leqslant \varepsilon, \qquad \varrho(z_2,z_0) \leqslant \varepsilon$$

entraînent pour tout couple de points z_1, z_2 de A l'inégalité

(56) $$\varrho_A(z_1,z_2) \leqslant a+1.$$

Comme z_0 appartient par définition à $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$, on peut prendre pour z_1 un point de A_1 et pour z_2 un point de A_2.

D'après (52), le point z_1 est contenu dans l'un des ensembles S_k; soit S_{k_1} cet ensemble. On a donc

(57) $$\varrho_A(x, z_1) \leqslant k_1.$$

En vertu de (13) et (57),

(58) $$\varrho_A(x, z_2) \leqslant \varrho_A(x, z_1) + \varrho_A(z_1, z_2) \leqslant k_1 + a + 1,$$

d'où, en vertu de la définition de S_k,

(59) $$z_2 \subset S_{k_1+E(a)+2} \subset A_1,$$

$E(a)$ désignant le plus grand entier $\leqslant a$. Or, c'est en contradiction avec (53), puisque z_2 appartient à A_2 par hypothèse. Par suite, A_2 est vide. Il existe donc, quel que soit le point z de A, un entier k tel que l'on a (51). Le théorème est ainsi démontré.

18. ***Lemme II.*** *Prémisses*: 1) *A est un continu et a un point de A, intérieur à un ensemble fermé et borné B;* 2) $A - B \neq 0$.

Thèse:

(60) $$\mathfrak{C}_s(a, A \cdot B) \cdot \mathfrak{F}(B) \neq 0$$ [1].

Démonstration. Un raisonnement que l'on trouve dans la Thèse de M. Janiszewski [2]) montre qu'il existe un $\mathfrak{C}(a, A \cdot B)$ tel que

(61) $$\mathfrak{C}(a, A \cdot B) \cdot \mathfrak{F}(B) \neq 0;$$

ce $\mathfrak{C}(a, A \cdot B)$ étant contenu dans $\mathfrak{C}_s(a, A \cdot B)$, on a (60), c. q. f. d.

19. ***Lemme III.*** *Prémisses*: *$\{A_n\}$ est une suite de continus et $\delta(A_n) \geqslant a > 0$ pour $n = 1, 2, \dots$*

Thèse: *L'ensemble d'accumulation* [3]) *de la suite $\{A_n\}$ ne se réduit pas à un seul point.*

---

[1]) $\mathfrak{C}_s(a, A \cdot B)$ désigne le continu saturé contenant a et contenu dans $A \cdot B$ (cf. S. Janiszewski, l. c., p. 20). $\mathfrak{F}(B)$ désigne la frontière de B.

[2]) l. c., p. 22, Théorème IV.

[3]) l. c., p. 15.

Démonstration. Soient: A l'ensemble d'accumulation de la suite en question, a un point de A et S la sphère de centre a et de rayon $\alpha/3$.

Il existe une suite infinie d'indices $\{n_k\}$, où $k=1,2,...,$ pour lesquels l'intérieur de S contient un point de A_{n_k}. Soit a_k ce point. Comme

(62) $$\delta(A_{n_k}) \geqslant \alpha > \alpha/3 = \delta(S),$$

A_{n_k} ne peut pas être contenu dans S. Donc $A_{n_k}-S \neq 0$, d'où, en appliquant le lemme précédent,

(63) $$A_{n_k}\cdot\mathfrak{F}(S) \supset \mathfrak{C}_s(a_{n_k}, A_{n_k}\cdot S)\cdot\mathfrak{F}(S) \neq 0.$$

Posons $B_n = A_n\cdot\mathfrak{F}(S)$; la suite $\{B_n\}$ contient d'après (63) une infinité d'ensembles non vides (à savoir tous les B_{n_k}); de plus, les B_n sont contenus dans l'ensemble fermé et borné $\mathfrak{F}(S)$.

L'ensemble d'accumulation de la suite $\{B_n\}$ ne peut donc être vide [1]; cet ensemble est contenu dans $\mathfrak{F}(S)$ et dans A, puisque $B_n \subset A_n$. Par conséquent

(64) $$A\cdot\mathfrak{F}(S) \neq 0.$$

Or, le point a de A n'appartient pas à $\mathfrak{F}(S)$, puisqu'il est situé par définition à l'intérieur de S. L'inégalité (64) prouve donc que A ne se réduit pas au point a, c. q. f. d.

20. *Théorème IV. Prémisse: a est un point de second genre du continu A.*

Thèse: a est un point de seconde espèce [2].

Démonstration. On a par hypothèse

(65) $$\sigma_A(a) > 0.$$

Soit λ un nombre réel tel que $0<\lambda<\sigma_A(a)$. D'après (20), il existe pour tout $\varepsilon>0$ un couple de points x, y de A tel que:

(66) $$\varrho(x,a) < \varepsilon, \qquad \varrho(y,a) < \varepsilon,$$

(67) $$\varrho_A(x,y) \geqslant 2\lambda.$$

[1] S. Janiszewski, l. c., p. 16.

[2] c. à d. situé sur un continu de condensation de A (cf. S. Janiszewski, l. c., p. 24).

La relation (67) entraîne en vertu de (13) l'une au moins des relations:

(68) $$\varrho_A(x,a) \geqslant \lambda, \qquad \varrho_A(y,a) \geqslant \lambda.$$

Donc, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe dans A un point x tel que:

(69) $$\varrho(x,a) \leqslant \varepsilon, \qquad \varrho_A(x,a) \geqslant \lambda.$$

On peut par conséquent déterminer une suite $\{a_n\}$ de points de A assujettie aux conditions:

(70) $$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

(71) $$\varrho_A(a_n,a) \geqslant \lambda.$$

Soit S_n la sphère de centre a_n et de rayon $\lambda/3$. Posons

(72) $$C_n = \mathcal{C}_s(a_n, A\cdot S_n).$$

On a $A - S_n \neq 0$, car on aurait en cas contraire $A \subset S_n$ et

(73) $$\delta(A) \leqslant \delta(S_n) = 2\lambda/3,$$

d'où

(74) $$\varrho_A(a_n,a) \leqslant 2\lambda/3,$$

puisqu'il existe un $\mathcal{C}(a+a_n, A)$ de diamètre $\leqslant 2\lambda/3$, à savoir le continu A lui-même. Or, (74) est incompatible avec (71).

On a donc $A - S_n \neq 0$ et on peut appliquer **18**, lemme II, ce qui donne

(75) $$C_n\cdot\mathfrak{F}(S_n) \neq 0.$$

Le continu C_n contenant d'après (75) un point de la surface de S_n et d'après (72) le centre a_n de S_n, donc deux points de distance $\lambda/3$, on a

(76) $$\delta(C_n) \geqslant \lambda/3.$$

Soit B l'ensemble d'accumulation de la suite $\{C_n\}$. On a par définition

(77) $$B \subset \overline{\sum\{C_n\}}.$$

En vertu de (70), l'ensemble-limite de la suite $\{C_n\}$ contient le point a.

En vertu d'un théorème de M. Janiszewski[1]) et du lemme III, l'ensemble B est donc un continu contenant le point a. En désignant par S la sphère de centre a et de rayon $\lambda/12$, posons

$$C = \mathcal{C}_s(a, B \cdot S). \tag{78}$$

C est un continu[2]). Je dis que

$$C \cdot \{\sum (C_n)\} = 0. \tag{79}$$

En effet, supposons que $C \cdot C_{n_0}$ contienne un point b. Comme $b \subset C_{n_0}$, le continu C_{n_0} est un $\mathcal{C}(a_{n_0} + b, A)$ contenu d'après (72) dans S_{n_0}, d'où

$$\delta(C_{n_0}) \leqslant \delta(S_{n_0}) = 2\lambda/3. \tag{80}$$

Il en résulte que

$$\varrho_A(a_{n_0}, b) \leqslant 2\lambda/3. \tag{81}$$

Or, A est un ensemble fermé contenant tous les C_n, c. à d. $\overline{\Sigma\{C_n\}}$; d'après (77), A contient par conséquent l'ensemble B et enfin le sous-ensemble C de B. Par suite, C serait un $\mathcal{C}(a+b, A)$ contenu dans S, d'où

$$\delta(C) \leqslant \delta(S) = \lambda/6 \tag{82}$$

et par conséquent

$$\varrho_A(a, b) \leqslant \lambda/6. \tag{83}$$

Les relations (81), (83) et (13) entraînent

$$\varrho_A(a, a_{n_0}) \leqslant 5\lambda/6, \tag{84}$$

contrairement à (71).

L'égalité (79) est ainsi démontrée. Il en résulte en vertu de (77) que:

$$C \subset A, \tag{85}$$

$$\begin{aligned} \overline{A - C} = \overline{[A + \sum\{C_n\}] - C} = \overline{(A - C)} + \overline{[\sum\{C_n\} - C]} \supset \\ \supset (A - C) + \overline{\sum\{C_n\}} \supset (A - C) + B \supset (A - C) + C = A. \end{aligned} \tag{86}$$

Les relations (85) et (86) montrent que C est un continu de condensation de A[3]). Comme $a \subset C$, a est de seconde espèce, c. q. f. d.

[1]) l. c., p. 20, Théorème I. [2]) l. c., p. 22. [3]) l. c., p. 24.

IV. Lignes de Jordan.

21. ***Définition***[1]. Soit E un ensemble linéaire fermé. Admettons qu'à toute valeur $t \subset E$ correspond un point $x(t)$ de l'espace R_n et que la fonction $x(t)$ est continue, c. à d. telle que la relation

$$\lim_{i\to\infty} t_i = t_0, \tag{87}$$

où $t_i \subset E$, entraîne

$$\lim_{i\to\infty} x(t_i) = x(t_0). \tag{88}$$

Nous dirons que cette correspondance détermine dans R_n une *courbe* $[x(t), E]$.

22. ***Définition.*** L'ensemble de tous les points de R_n, que la courbe $[x(t), E]$ fait correspondre à ceux de l'ensemble E (en d'autres mots, l'ensemble de tous les $x(t)$ où $t \subset E$) sera appelé l'*image* de cette courbe.

23. ***Définition.*** Etant données deux courbes $[x(t), E]$ et $[x_1(t), E_1]$ telles que:

$$E \supset E_1, \tag{89}$$

$$x_1(t) = x(t) \quad \text{pour } t \subset E_1, \tag{90}$$

nous dirons que la *première courbe contient la seconde*. On voit que dans ce cas l'image de $[x(t), E]$ contient l'image de $[x_1(t), E_1]$.

24. ***Définition.*** Une courbe $[x(t), E]$ sera dite *bornée*, si l'ensemble E est borné. Son image est alors bornée et fermée[2].

25. ***Lemme IV.*** *Prémisse: A est un ensemble fermé et borné de R_n.*

Thèse: A est l'image d'une courbe bornée.

On pourrait donner facilement une démonstration directe de ce lemme, basée p. ex. sur le théorème de Heine-Borel (ce qui serait indispensable, si on opérait dans un espace abstrait).

---

[1] S. Mazurkiewicz, Prace Mat.-Fiz. 26, p. 114 et suivantes; F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 358—369. Le terme *fonction* est employé ici dans le sens que lui attribue M. Hausdorff.

[2] F. Hausdorff, l. c., p. 364, V.

Or, pour en éviter des longueurs, je vais me baser ici sur le fait connu que, Q désignant un cube à n-dimensions et $\overline{\alpha\beta}$ l'intervalle fermé $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, il existe une courbe $[x(t), \overline{01}]$ dont Q est l'image.

A étant borné, il existe un cube Q à n dimensions qui contient A. Soit E l'ensemble de tous les points t de l'intervalle fermé $\overline{01}$ pour lesquels

$$x(t) \subset A. \tag{91}$$

C'est un ensemble fermé[1]) et borné. Evidemment, A est l'image de la courbe bornée $[x(t), E]$ contenue dans $[x(t), \overline{01}]$.

Le lemme est ainsi démontré.

26. ***Définition.*** Une courbe $[x(t), E]$ sera dite *continue*, si E est un intervalle fermé.

27. ***Définition.*** J'appelle *ligne de Jordan* tout ensemble qui est l'image d'une courbe continue. C'est donc un continu borné ou un ensemble composé d'un seul point[2]).

28. ***Lemme V.*** *Prémisses*: *A est une ligne de Jordan, a, b un couple de points de A, $\overline{\alpha\beta}$ un intervalle fermé.*

Thèse: *Il existe une courbe continue $[x(t), \overline{\alpha\beta}]$ dont A est l'image et telle que*:

$$x(\alpha) = a, \qquad x(\beta) = b. \tag{92}$$

Démonstration. La ligne de Jordan A étant l'image d'une certaine courbe continue $[y(t), \overline{\alpha_1\beta_1}]$, l'intervalle $\overline{\alpha_1\beta_1}$ contient deux points t_1, t_2 tels que

$$y(t_1) = a, \qquad y(t_2) = b. \tag{93}$$

En posant respectivement

$$x(t) = \begin{cases} y\left(\dfrac{3(\alpha_1 - t_1)t + 2\alpha t_1 + \beta t_1 - 3\alpha\alpha_1}{\beta - \alpha}\right), \\ y\left(\dfrac{3(\beta_1 - \alpha_1)t + 2(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1) + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1}{\beta - \alpha}\right), \\ y\left(\dfrac{3(t_2 - \beta_1)t - 2\beta t_2 - \alpha t_2 + 3\beta\beta_1}{\beta - \alpha}\right), \end{cases} \tag{94}$$

---

[1]) F. Hausdorff, l. c., p. 361, III.

[2]) ibid., p. 363, IV, p. 364, V et p. 369.

suivant que

$$a \leqslant t \leqslant (2a+\beta)/3, \quad (2a+\beta/3 \leqslant t \leqslant (a+2\beta)/3, \quad \text{ou} \quad (a+2\beta)/3 \leqslant t \leqslant \beta,$$

on vérifie sans peine que la courbe $[x(t), \overline{a\beta}]$ possède les propriétés demandées.

29. ***Lemme VI.*** *Prémisse*: *A est un continu ne contenant que des points de premier genre.*

Thèse: *On peut faire correspondre à tout couple a, b de points de A un $\mathcal{C}(a+b, A)$ qui est une ligne de Jordan $J(a,b)$ telle que*

$$\delta[J(a,b)] \leqslant 3\varrho_A(a,b). \tag{95}$$

Démonstration. Si $a=b$, désignons par $J(a,b)$ l'ensemble formé par le seul point $a=b$. C'est donc une ligne de Jordan satisfaisant à (95).

Si $a \neq b$, le nombre $\varrho_A(x,y)$ est en vertu de **17**, th. III fini, quel que soit le couple x, y de points de A; il existe donc des ensembles $\mathcal{C}(x+y, A)$ assujettis à l'inégalité

$$\delta[\mathcal{C}(x+y, A)] \leqslant 2\varrho_A(x,y). \tag{96}$$

Pour tout couple x, y, choisissons un $\mathcal{C}(x+y, A)$ quelconque parmi ceux qui satisfont à (96)[1]) et désignons-le par $C(x,y)$. On aura

$$\delta[C(x,y)] \leqslant 2\varrho_A(x,y). \tag{97}$$

Soit B l'ensemble des points z de A qui satisfont à l'inégalité

$$\varrho[z, C(a,b)] \leqslant \varrho_A(a,b)/2. \tag{98}$$

B est un ensemble fermé et borné. On voit aisément que

$$\delta(B) \leqslant 3\varrho_A(a,b). \tag{99}$$

D'après **16**, cor. I, on peut déterminer pour tout entier positif k un $\eta_k > 0$ de manière que l'inégalité

$$\varrho(x,y) \leqslant \eta_k \tag{100}$$

entraîne pour tout couple x, y de points de B l'inégalité

$$\varrho_A(x,y) \leqslant \varrho_A(a,b)/2^{k+2} = \varepsilon_k. \tag{101}$$

---

[1]) Il paraît vraisemblable que ce choix peut être rendu effectif.

Formons une suite infinie $M_0, M_1, \dots$ de sous-ensembles finis de A, ordonnés par les conventions suivantes:

(i) M_k et formé de m_k points différents $a_i^{(k)}$ où $i=1,2,\dots m_k$;

(ii) $m_0=2$, $a_1^{(0)}=a$ et $a_2^{(0)}=b$;

(iii) Afin d'obtenir M_{k+1} de M_k, formons pour chaque $i=1,2,\dots,m_k-1$ une suite finie $\{b_r^{(i)}\}$, où $r=1,2,\dots r_i$, contenant au moins un élément et composée de points distincts de l'ensemble $C(a_i^{(k)}, a_{i+1}^{(k)})-M_k$, de façon que l'on ait:

$$(102) \qquad \varrho(b_1^{(i)}, a_i^{(k)}) \leqslant \eta_{k+1}, \qquad \varrho(b_{r_i}^{(i)}, a_{i+1}^{(k)}) \leqslant \eta_{k+1},$$

$$(103) \qquad \varrho(b_r^{(i)}, b_{r+1}^{(i)}) \leqslant \eta_{k+1} \qquad \text{pour } r=1,2,\dots,r_i-1.$$

Une telle suite existe d'après les propriétés fondamentales des continus. Les suites $\{b_r^{(i)}\}$ étant formées, posons:

$$(104) \qquad m_{k+1} = m_k + \sum_{i=1}^{m_k-1} r_i,$$

$$(105) \qquad a_1^{(k+1)} = a_1^{(k)},$$

$$(106) \qquad a_s^{(k+1)} = \begin{cases} a_p^{(k)} & \text{pour } s=p+\sum_{i=1}^{p-1} r_i \text{ et } p=2,\dots,m_k, \\ b_q^{(1)} & \text{pour } s=q+1 \quad \text{et } q=1,\dots,r_1, \end{cases}$$

$$(107) \quad a_s^{k+1}=b_q^{(p)} \text{ pour } s=p+\sum_{i=1}^{p-1} r_i+q,\ p=2,\dots,m_k-1 \text{ et } q=1,\dots,r_p.$$

M_{k+1} est ainsi défini. Remarquons que l'on a pour deux points consécutifs de M_k

$$(108) \qquad \varrho(a_i^{(k)}, a_{i+1}^{(k)}) \leqslant \eta_k \qquad \text{pour } i=1,2,\dots,m_k-1 \text{ et } k=1,2,\dots$$

On voit aussi que

$$(109) \qquad M_k \subset M_{k+p} \qquad \text{pour } k=0,1,2,\dots \quad \text{et} \quad p=0,1,2,\dots$$

et que l'ordre relatif des points de M_k subsiste dans les suites M_{k+p}. Posons:

$$(110) \qquad M = \sum \{M_k\}$$

et ordonnons les points de M comme suit: u précède v — ce que nous écrirons

$$(111) \qquad u \prec v$$

— si u précède v dans le premier M_k contenant u et v, c. à d. si

(112) $$u=a_{i_1}^{(k)}, \quad v=a_{i_2}^{(k)} \quad \text{et} \quad i_1<i_2;$$

comme nous venons de voir, u précède alors v dans tous les M_k qui contiennent u et v.

On vérifie sans peine que la relation $\prec$ ainsi définie est transitive, que a est le premier et b le dernier élément de M, enfin, qu'entre tout couple de points u,v de M il existe un troisième point de M. L'ensemble M étant dénombrable, il s'ensuit que son type d'ordre est celui de l'ensemble R de tous les nombres rationnels de l'intervalle fermé $\overline{01}$ (dans leur ordre naturel), à savoir qu'il existe entre les éléments de R et ceux de M une correspondance biunivoque — nous la désignerons par $y(\tau)$ pour τ appartenant à R et $y(\tau)$ à M — qui conserve l'ordre, c. à d. telle que pour tout couple τ_1, τ_2 d'éléments de R les relations:

(113) $$\tau_1<\tau_2,$$

(114) $$y(\tau_1)\prec y(\tau_2)$$

s'entraînent mutuellement. On a en particulier:

(115) $$y(0)=a \quad \text{et} \quad y(1)=b.$$

Avant d'étudier cette correspondance, nous allons établir quelques inégalités.

I. *Si $M_k \subset B$, on a pour $k \geqslant 1$*

(116) $$\varrho(a_i^{(k+1)}, M_k) \leqslant 2\varepsilon_k.$$

C'est évident, si $a_i^{(k+1)}$ appartient à M_k; dans le cas contraire, on a pour un couple d'entiers p,q:

(117) $$a_i^{(k+1)}=b_q^{(p)} \subset C(a_p^{(k)}, a_{p+1}^{(k)}),$$

(118) $$\varrho(a_i^{(k+1)}, M_k) \leqslant \varrho(a_i^{(k+1)}, a_p^{(k)}) \leqslant \delta[C(a_p^{(k)}, a_{p+1}^{(k)})].$$

Or, (100) entraînant (101) pour tout couple x,y de points de B, et les points $a_p^{(k)}, a_{p+1}^{(k)}$ étant contenus dans B par hypothèse, on a en vertu de (108) et (97)

(119) $$\delta[C(a_p^{(k)}, a_{k+1}^{(k)})] \leqslant 2\varepsilon_k.$$

Les inégalités (118) et (119) entraînent (116), c. q. f. d.

II. *On a l'inégalité*

$$(120)\qquad \varrho[a_i^{(k)}, C(a,b)] \leqslant 2\sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p \quad \textit{pour } i=1,2,\ldots,m_k \textit{ et } k=2,3,\ldots$$

Nous la démontrerons par induction. D'abord, on a d'après la définition de M_1

$$(121)\qquad M_1 \subset C(a,b) \subset B.$$

En vertu de I, l'inégalité (116) est vérifiée pour $k=1$, ce qui entraîne

$$(122)\qquad \varrho[a_i^{(2)}, C(a,b)] \leqslant \varrho[a_i^{(2)}, M_1] \leqslant 2\varepsilon_1,$$

c. à d. que l'inégalité (120) est vérifiée pour $k=2$. Supposons maintenant l'inégalité (120) vérifiée pour un $k \geqslant 2$. On aura pour $i=1,2,\ldots,m_k$, en tenant compte de (101):

$$(123)\qquad \varrho[a_i^{(k)}, C(a,b)] \leqslant 2\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p \leqslant 2\varrho_A(a,b) \sum_{p=1}^{\infty} 1/2^{p+2} = \varrho_A(a,b)/2,$$

donc $M_k \subset B$ (en vertu de la définition de B). Il s'ensuit en vertu de I que

$$(124)\qquad \varrho(a_i^{(k+1)}, M_k) \leqslant 2\varepsilon_k.$$

M_k étant fini, il existe, pour une valeur déterminée de i, un point $a_{p_1}^{(k)}$ tel que

$$(125)\qquad \varrho(a_i^{(k+1)}, a_{p_1}^{(k)}) \leqslant 2\varepsilon_k.$$

L'inégalité (120) étant vérifiée par hypothèse pour $i=1,2,\ldots,m_k$, on a en particulier

$$(126)\qquad \varrho[a_{p_1}^{(k)}, C(a,b)] \leqslant 2\sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p.$$

Les inégalités (125) et (126) donnent

$$(127)\qquad \varrho[a_i^{(k+1)}, C(a,b)] \leqslant 2\sum_{p=1}^{k} \varepsilon_p \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,m^{k+1},$$

c. à d. l'inégalité (120) pour $k+1$, c. q. f. d.

III. *On a l'inégalité*

(128) $$\delta(M) \leqslant \delta[C(a,b)] + 4\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p.$$

En effet, (120) entraîne, comme nous avons vu, l'inégalité

(129) $$\varrho[a_i^{(k)}, C(a,b)] \leqslant 2\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p = \varrho_A(a,b)/2,$$

qui est évidemment satisfaite aussi pour les valeurs $k=0$ et $k=1$. Elle entraîne

(130) $$M_k \subset B \quad \text{pour} \quad k=1,2,...,$$

d'où en vertu de (110)

(131) $$M \subset B,$$

et par conséquent [1]), en vertu de (99), l'inégalité (128), q. f. d.

IV. Etant donnés deux points consécutifs $a_i^{(k)}, a_{i+1}^{(k)}$ de M_k, soit $M_{k,i}$ l'ensemble de tous les points z de M, assujettis à l'une des trois relations:

(132) $$z = a_i^{(k)}, \qquad a_i^{(k)} \prec z \prec a_{i+1}^{(k)}, \qquad z = a_{i+1}^{(k)}.$$

On a alors l'inégalité

(133) $$\delta(M_{k,i} + M_{k,i+1}) \leqslant 4\varepsilon_k + 8\sum_{p=k+1}^{\infty}\varepsilon_p.$$

En effet, (130) entraîne selon (108)

(134) $$\delta[C(a_i^{(k)}, a_{i+1}^{(k)})] \leqslant 2\varepsilon_k \quad \text{pour} \quad i=1,2,...,m_k.$$

D'après la définition des ensembles M_p, $M_{k,i}$ s'obtient en partant de $a_i^{(k)}, a_{i+1}^{(k)}$ de la même manière que M en partant de a,b, la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ étant à remplacer par $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, ...$ et la suite $\eta_1, \eta_2, ...$ par $\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, ...$ Au lieu de (128), on a donc

(135) $$\delta(M_{k,i}) \leqslant \delta[C(a_i^{(k)}, a_{i+1}^{(k)})] + 4\sum_{p=k+1}^{\infty}\varepsilon_p,$$

---

[1]) Nous nous appuyons ici sur l'inégalité facile à vérifier

$$\delta(x,y) \leqslant \varrho(x,A) + \varrho(y,A) + \delta(A),$$

où x,y désignent des points et A un ensemble.

d'où, en vertu de (134),

$$\delta(M_{k,i}) \leqslant 2\varepsilon_k + 4\sum_{p=k+1}^{\infty}\varepsilon_p \tag{136}$$

et finalement, en raison de **4**, l'inégalité (133), q. f. d.

Nous allons étudier à présent la correspondance $y(\tau)$ entre R et M.

Je dis que la fonction $y(\tau)$ est uniformément continue dans l'ensemble R, c. à d. que, pour tout couple τ_s, τ'_s de points de R, la relation

$$\lim_{s\to\infty}|\tau_s - \tau'_s| = 0 \tag{137}$$

entraîne

$$\lim_{s\to\infty}\varrho[y(\tau_s), y(\tau'_s)] = 0. \tag{138}$$

Remarquons en effet que, la série $\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p$ étant convergente, on peut déterminer pour tout $\varepsilon'>0$ un entier q tel que l'on ait

$$4\varepsilon_q + 8\sum_{p=q+1}^{\infty}\varepsilon_p \leqslant \varepsilon'. \tag{139}$$

Désignons, pour $i=1,2,\dots,m_q$, par $\tau^{(i)}$ le point de R qui correspond à $a_i^{(q)}$. On aura $\tau^{(1)}=0$, $\tau^{(m_q)}=1$ et

$$\tau^{(i)} < \tau^{(i+1)}. \tag{140}$$

Soit ε'' le plus petit des nombres $\tau^{(i+1)}-\tau^{(i)}$ où $i=1,2,\dots,m_q-1$. En vertu de (137), il existe un entier k_1 tel que l'inégalité

$$s \geqslant k_1 \tag{141}$$

entraîne

$$|\tau_s - \tau'_s| \leqslant \varepsilon''. \tag{142}$$

D'après (142), il existe pour $s\geqslant k_1$ au plus un $\tau^{(i)}$ compris entre τ_s et τ'_s. A tout $s\geqslant k_1$ on peut donc faire correspondre un indice i_s tel que

$$\tau^{(i_s)} \leqslant \tau_s \leqslant \tau^{(i_s+2)}, \qquad \tau^{(i_s)} \leqslant \tau'_s \leqslant \tau^{(i_s+2)}. \tag{143}$$

Il en résulte que:

(144) $y(\tau_s) \subset M_{q,i_s} + M_{q,i_s+1}, \qquad y(\tau_s') \subset M_{q,i_s} + M_{q,i_s+1},$

d'où en vertu de (133) et (139)

(145) $$\varrho[y(\tau_s), y(\tau_s')] \leqslant \varepsilon' \quad \text{pour} \quad s \geqslant k_1.$$

ε' étant supposé quelconque, (137) entraîne (138), de sorte que la continuité uniformé de la fonction $y(\tau)$ dans R se trouve établie.

Or: R est dense dans le segment $\overline{01}$, ce dernier est compact, la fonction $y(\tau)$ est uniformément continue dans R et les points $y(\tau)$ sont contenus dans B, donc dans un ensemble qui est compact et remplit la condition de Cauchy. Il existe par suite, d'après un théorème de M. Hausdorff [1]), une et une seule fonction $z(\tau)$ définie pour $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, continue, telle que $z(\tau) \subset B$ et que

(146) $$z(\tau) = y(\tau) \quad \text{pour tout } \tau \text{ de } R.$$

Soit $J(a,b)$ l'image de la courbe continue $[z(\tau), \overline{01}]$. C'est une ligne de Jordan qui contient a et b, puisqu'on a (cf. (115)):

(147) $$z(0) = y(0) = a \quad \text{et} \quad z(1) = y(1) = b.$$

Etant donnés deux points x' et x'' de B, on a selon la définition de cet ensemble:

(148) $$\varrho(x'x'') \leqslant \varrho[x', C(a,b)] + \delta[C(a,b)] + \varrho[x'', C(a,b)] \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\varrho_A(a,b) + 2\varrho_A(a,b) + \tfrac{1}{2}\varrho_A(a,b) = 3\varrho_A(a,b),$$

(149) $$\delta(B) \leqslant 3\varrho_A(a,b).$$

Comme $J(a,b) \subset B$, on en tire

(150) $$\delta[J(a,b)] \leqslant \delta(B) \leqslant 3\varrho_A(a,b),$$

ce qui achève la démonstration du lemme VI.

30. ***Lemme VII.*** *Prémisses: A est un continu dont tous les points sont de premier genre; B est un sous-ensemble fermé et borné de A.*

Thèse: Il existe une ligne de Jordan contenant B et contenue dans A.

---

[1]) l. c., p. 367—369.

Démonstration. D'après **25**, l'ensemble B est l'image d'une courbe bornée $[x(t), E]$. Désignons les bornes inférieure et supérieure de E par α et β respectivement. Soit $\{\overline{\alpha_k \beta_k}\}$ la suite des intervalles contigus à E. Posons:

$$a_k = x(\alpha_k) \quad \text{et} \quad b_k = x(\beta_k). \tag{151}$$

D'après **29**, on peut faire correspondre au couple a_k, b_k une ligne de Jordan $J(a_k, b_k)$ contenant ces deux points, contenue dans A et assujettie à la condition

$$\delta[J(a_k, b_k)] \leqslant 3\varrho_A(a_k, b_k). \tag{152}$$

D'après **28**, $J(a_k, b_k)$ est l'image d'une courbe continue $[x_k(t), \overline{\alpha_k \beta_k}]$ telle que

$$x_k(\alpha_k) = a_k = x(\alpha_k) \quad \text{et} \quad x_k(\beta_k) = b_k = x(\beta_k). \tag{153}$$

Définissons la fonction $y(t)$ par les conditions:

$$y(t) = x(t) \qquad \text{pour tout } t \text{ de } E, \tag{154}$$

$$y(t) = x_k(t) \qquad \text{pour } \alpha_k \leqslant t \leqslant \beta_k \text{ et } k = 1, 2, \ldots \tag{155}$$

La fonction $y(t)$ est ainsi déterminée pour $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, l'ambiguité de la définition pour $t = \alpha_k$ et $t = \beta_k$ n'étant qu'apparente en raison des relations (153).

Démontrons la continuité de $y(t)$. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminons (ce qui est possible d'après **16**, I) un $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\varepsilon' \leqslant \varepsilon/3 \tag{156}$$

et que, pour tout couple z', z'' de points de B, l'inégalité

$$\varrho(z' z'') \leqslant \varepsilon' \tag{157}$$

entraîne

$$\varrho_A(z' z'') \leqslant \varepsilon/9. \tag{158}$$

La fonction $x(t)$ étant continue pour tout t de E, on peut trouver un $\eta_0 > 0$, tel que pour tout couple t', t'' de points de E l'inégalité

$$|t' - t''| \leqslant \eta_0 \tag{159}$$

entraîne

$$\varrho[x(t'), x(t'')] \leqslant \varepsilon'. \tag{160}$$

Les intervalles $\overline{\alpha_k \beta_k}$ n'empiétant pas les uns sur les autres, il existe un entier s tel que l'inégalité

$$(161) \qquad k > s$$

entraîne

$$(162) \qquad |\beta_k - \alpha_k| \leqslant \eta_0.$$

Enfin, les fonctions $x_k(t)$ étant continues, il existe, pour tout entier positif k, un nombre η_k tel que, pour deux points quelconques t', t'' du segment $\overline{\alpha_k \beta_k}$, l'inégalité

$$(163) \qquad |t' - t''| \leqslant \eta_k$$

entraîne

$$(164) \qquad \varrho[x_k(t'), x_k(t'')] \leqslant \varepsilon/3.$$

Désignons par η le plus petit des $s+1$ nombres positifs η_k où $k = 0, 1, \ldots, s$. Les relations:

$$(165) \qquad t' \subset \overline{\alpha_k \beta_k}, \quad t'' \subset \overline{\alpha_k \beta_k} \quad \text{et} \quad k > s$$

entraînent:

$$(166) \qquad x_k(t') \subset J(a_k, b_k) \quad \text{et} \quad x_k(t'') \subset J(a_k, b_k),$$

d'où, en vertu de (152),

$$(167) \qquad \varrho[x_k(t'), x_k(t'')] \leqslant \delta[J(a_k, b_k)] \leqslant 3\varrho_A(a_k, b_k).$$

L'inégalité (161), et par suite (162), étant vérifiées, on a, pour $t' = \alpha_k$, $t'' = \beta_k$, $z' = a_k$ et $z'' = b_k$, l'inégalité (159), donc (160), donc (158), de sorte que

$$(168) \qquad \varrho_A(a_k, b_k) \leqslant \varepsilon/9,$$

et d'après (167)

$$(169) \qquad \varrho[x_k(t'), x_k(t'')] \leqslant \varepsilon/3.$$

Nous allons montrer maintenant que, pour tout couple t_1, t_2 de points de $\overline{\alpha\beta}$, l'inégalité

$$(170) \qquad |t_1 - t_2| \leqslant \eta$$

entraîne

$$(171) \qquad \varrho[y(t_1), y(t_2)] \leqslant \varepsilon.$$

Nous distinguerons deux cas:

1⁰ t_1 et t_2 sont contenus dans un même segment $\overline{\alpha_k\beta_k}$. L'inégalité à démontrer devient alors, en vertu de (155),

$$\varrho[x_k(t_1), x_k(t_2)] \leqslant \varepsilon. \tag{172}$$

Or, si $k>s$, on a pour $t'=t_1$ et $t''=t_2$ les relations (165), donc (169) et a fortiori (172); si $k \leqslant s$, on a en vertu de (170) et de la définition de η, pour $t'=t_1$ et $t''=t_2$, l'inégalité (163), donc (164) et a fortiori (172).

2⁰ Dans le cas contraire, nous pouvons supposer que $t_1<t_2$. Posons:

$$\tau_1 = \begin{cases} t_1, & \text{si } t_1 \subset E \\ \beta_k, & \text{si } \alpha_k<t_1<\beta_k, \end{cases} \tag{173}$$

$$\tau_2 = \begin{cases} t_2, & \text{si } t_2 \subset E \\ \alpha_p, & \text{si } \alpha_p<t_2<\beta_p. \end{cases} \tag{174}$$

Il vient

$$\varrho[y(t_1), y(t_2)] \leqslant \varrho[y(t_1), y(\tau_1)] + \varrho[y(\tau_1), y(\tau_2)] + \varrho[y(\tau_2), y(t_2)]. \tag{175}$$

De plus, comme $t_1 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2$, on a en vertu de (170):

$$|\tau_1-\tau_2| \leqslant \eta, \quad |t_1-\tau_1| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad |t_2-\tau_2| \leqslant \eta. \tag{176}$$

L'inégalité (171) sera démontrée dès que les trois inégalités suivantes seront établies:

$$\varrho[y(t_1), y(\tau_1)] \leqslant \varepsilon/3, \quad \varrho[y(\tau_1), y(\tau_2)] \leqslant \varepsilon/3, \quad \varrho[y(\tau_2), y(t_2)] \leqslant \varepsilon/3. \tag{177}$$

Il suffit, bien entendu, d'en démontrer la première et la deuxième. Or, la première est sûrement vraie, si t_1 appartient à E, car alors son membre gauche s'annule. Dans le cas contraire, t_1 et τ_1 appartiennent à $\overline{\alpha_k\beta_k}$ et elle devient

$$\varrho[x_k(t_1), x_k(\tau_1)] \leqslant \varepsilon/3. \tag{178}$$

Si $k>s$, on a pour $t'=t_1$ et $t''=\tau_1$ les relations (165), donc l'inégalité (169), qui devient identique à (178). Si $k \leqslant s$, on a pour $t'=t_1$ et $t''=\tau_1$ (en vertu de (170) et de la définition de η) l'inégalité (163), donc (164), qui devient identique à (178).

Quant à la seconde des inégalités (177), elle devient pour τ_1 et τ_2 de E

$$(179) \qquad \varrho[x(\tau_1), x(\tau_2)] \leqslant \varepsilon/3.$$

Comme (159) entraîne (160), l'inégalité (179) résulte de la première des inégalités (176) en vertu de (156) et de la définition de η.

Il est ainsi démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que (170) entraîne (171). La fonction $y(t)$ est donc continue pour $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Soit J l'image de la courbe continue $[y(t), \overline{\alpha\beta}]$. J contient d'après (154) l'image de $[x(t), E]$, c. à d. B. D'autre part, tout point de J est, d'après (154) et (155), soit un point de B, soit un point d'un certain $J(a_k, b_k)$, donc toujours un point de A. Ainsi, $J \subset A$, c. q. f. d.

31. ***Théorème V.*** *Pour qu'un continu borné A soit une ligne de Jordan, il faut et il suffit que tous les points de A soient de premier genre.*

Démonstration. La condition est suffisante. A étant borné et fermé, on peut poser $B = A$ dans l'énoncé du lemme VII, ce qui donne le résultat suivant: il existe une ligne de Jordan contenant A et contenue dans A, donc identique à A.

La condition est nécessaire. A étant l'image d'une courbe continue $[x(t), \overline{\alpha\beta}]$, supposons que, pour un point a de A,

$$(180) \qquad \sigma_A(a) > 0.$$

Soit $0 < \lambda < \sigma_A(a)$. D'après **11**, on peut trouver dans A deux suites $\{a_k\}$ et $\{a'_k\}$, telles que:

$$(181) \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} a'_k = a,$$

$$(182) \qquad \varrho_A(a_k, a'_k) \geqslant \lambda.$$

Or, (182) entraîne d'après (13) l'une au moins des deux inégalités:

$$(183) \qquad \varrho_A(a_k, a) \geqslant \lambda/2, \qquad \varrho_A(a'_k, a) \geqslant \lambda/2.$$

L'une au moins de ces inégalitès se présentera donc pour une infinité de valeurs $k_1, k_2, \ldots$ de l'indice k; nous pouvons toujours supposer que c'est la première. Posons $b_m = a_{k_m}$; on aura:

(184) $$\lim_{m\to\infty} b_m = a \quad \text{et} \quad \varrho_A(a, b_m) \geqslant \lambda/2.$$

Soient: t_m un point de $\overline{\alpha\beta}$ tel que $x(t_m) = b_m$ et t_0 un point d'accumulation de l'ensemble $\{t_m\}$. La fonction $x(t)$ étant continue, on a

(185) $$x(t_0) = a.$$

Déterminons, d'autre part, $\eta > 0$ de manière que l'inégalité

(186) $$|t' - t''| \leqslant \eta$$

entraîne, pour tout couple t', t'' de points de $\overline{\alpha\beta}$, l'inégalité

(187) $$\varrho[x(t'), x(t'')] \leqslant \lambda/3.$$

Soient: p la première valeur de m telle que

(188) $$|t_0 - t_p| \leqslant \eta$$

et J_0 l'image de la courbe continue $[x(t), \overline{t_0 t_p}]$. C'est un $\mathfrak{C}(a + b_p, A)$, donc

(189) $$\varrho_A(a, b_p) \leqslant \delta(J_0).$$

Etant donnés deux points x' et y' de J_0, l'intervalle $\overline{t_0 t_p}$ contient deux points t' et t'' tels que $x' = x(t')$ et $y' = x(t'')$. On a en vertu de (188) l'inégalité (186), donc (187), c. à d.

(190) $$\varrho(x', y') \leqslant \lambda/3.$$

Il s'ensuit que:

(191) $$\delta(J_0) \leqslant \lambda/3,$$

(192) $$\varrho_A(a, b_p) \leqslant \lambda/3,$$

contrairement à (184). L'inégalité (180) impliquant ainsi une contradiction, on a pour tout point a de A

(193) $$\sigma_A(a) = 0,$$

c. q. f. d.

V. Lignes de Jordan géneralisées.

32. ***Définition.*** J'appelle *courbe continue géneralisée* la courbe $[x(t), E]$, si E est une demi droite.

33. ***Définition.*** J'appelle *ligne de Jordan généralisée* tout continu, borné ou non, formé uniquement de points de premier genre.

34. ***Théorème VI.*** *Prémisse: A est une ligne de Jordan généralisée.*

Thèse: A est l'image d'une courbe continue généralisée.

Démonstration. Soit A_k où $k=1,2,\ldots$ l'ensemble des points z de A assujettis à la condition

$$\varrho(a,z)\leqslant k, \tag{194}$$

où a est un point déterminé de A. Les ensembles A_k sont non vides, bornés et fermés; en outre,

$$A=\Sigma\{A_k\}. \tag{195}$$

D'après **30**, il existe une ligne de Jordan J_k telle que

$$A_k \subset J_k \subset A. \tag{196}$$

Désignons par L_k l'intervalle $k\leqslant t\leqslant k+1$ et par D la demi-droite $t\geqslant 1$. D'après **28**, J_k est l'image d'une courbe continue $[x_k(t), L_k]$ assujettie à la condition

$$x_k(k)=x_k(k+1)=a. \tag{197}$$

Posons

$$x(t)=x_k(t) \quad \text{pour tout} \quad t\subset L_k \quad \text{et} \quad k=1,2,\ldots \tag{198}$$

Ainsi définie, la fonction $x(t)$ est continue pour tout t de D en vertu de (197) et de la continuité des fonctions $x_k(t)$. Soit J l'image de la courbe continue généralisée $[x(t), D]$. On a donc

$$J=\Sigma\{J_k\}, \tag{199}$$

d'où selon (195) et (196):

$$A=\Sigma\{A_k\}\subset\Sigma\{J_k\}=J\subset A, \tag{200}$$

$$A=J, \tag{201}$$

de sorte que A est l'image de la courbe continue généralisée $[x(t), D]$, c. q. f. d.

35. ***Remarque.*** La réciproque du th. VI est en défaut. *Exemples*:

I. Considérons dans R_2 la courbe définie par les équations:

$$\xi = \begin{cases} 0, \\ t-1 \\ 2/t \end{cases} \quad \text{et} \quad \eta = \begin{cases} 1-t & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{pour} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ \sin^2 \pi t & \text{pour} \quad 2 \leqslant t. \end{cases}$$

L'image de cette courbe est un continu contenant des points de second genre (à savoir les points $\xi=0$ où $0<\eta\leqslant 1$).

II. Remplaçons $\sin^2 \pi t$ par $\sin \pi t$ dans I. On obtient une courbe continue généralisée dont l'image n'est pas fermée.

III. Considérons le continu non borné composé du segment $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\eta=0$, de la demi-droite $\xi=0$, $\eta \geqslant 0$ et du semi-continu $\eta=(1/\xi)\sin^2(2\pi/\xi)$, $0<\xi\leqslant 1$.

C'est, comme on voit aisément, l'image d'une courbe continue géneralisée, mais ce n'est pas une ligne de Jordan généralisée, les points $\xi=0$, $\eta>0$ étant de second genre.

VI. Un théorème sur les ensembles saturés.

36. ***Théorème VII.*** *Prémisses*: 1) *Pour tout nombre transfini $\lambda<\Omega$, A_λ est un ensemble fermé de l'espace R_q,* 2) $A_\lambda \subset A_\mu$ *pour* $\lambda<\mu<\Omega$.

Thèse: Il existe un nombre transfini $\eta<\Omega$ tel que

$$A_\eta = A_\lambda \quad \text{pour} \quad \lambda > \eta. \tag{202}$$

Démonstration. Posons:

$$M = \sum_{\lambda<\Omega} A_\lambda. \tag{203}$$

$\overline{M}$ est un ensemble fermé tiré de l'espace séparable R_q et M un ensemble dense dans $\overline{M}$. Il existe par suite un ensemble au plus dénombrable N contenu dans M et dense dans $\overline{M}$, c. à d. tel que

$$\overline{N} = \overline{M}. \tag{204}$$

Soit $\{a_k\}$ une suite infinie contenant tous les points de N. Tout point a_k appartenant à M, soit λ_k le premier nombre λ pour lequel a_k appartient à A_λ. L'ensemble des nombres λ_k étant au plus dénombrable, il existe un $\eta<\Omega$ supérieur à tous les λ_k. D'après la prémisse 2),

(205) $$A_\eta \supset A_{\lambda_k} \supset a_k \qquad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,$$

(206) $$A_\eta \supset N,$$

donc, A_η étant fermé,

(207) $$A_\eta \supset \overline{N} \supset M \supset A_\lambda \qquad \text{pour tout} \quad \lambda<\Omega.$$

D'autre part, d'après la prémisse 2), on a pour $\lambda>\eta$

(208) $$A_\eta \subset A_\lambda.$$

Les relations (207) et (208) donnent (202), c. q. f. d.

37. *Définition.* On appelle un ensemble A *saturé par rapport à une propriété* P, si 1° A possède la propriété P et 2° tout ensemble qui possède la propriété P et contient A est identique à A [1]).

38. *Théorème VIII.* *Prémisses*: 1) *La propriété P satisfait aux conditions suivantes:*

(*a*) *si A possède la propriété P, A est un ensemble fermé de l'espace R_q;*

(*b*) *si les ensembles A_i où $i=1,2,\ldots$ possèdent la propriété P et $A_i \subset A_{i+1}$, l'ensemble $\overline{\Sigma A_i}$ possède la propriété P;*

2) *B possède la propriété P.*

Thèse: Il existe un ensemble saturé par rapport à la propriété P et contenant B.

Démonstration. Supposons qu'un tel ensemble n'existe pas et posons

I. $B_1=B$.

II. Admettons que les ensembles B_μ, où $\mu<\lambda$ pour un $\lambda<\Omega$, possédent la propriété P, contiennent B et que $B_{\mu_1} \subset B_{\mu_2}$ si $\mu_1<\mu_2$.

[1]) Janiszewski, l. c., p. 7—8.

(α) Si λ est de première espèce, $\lambda=\lambda_1+1$, il existe des ensembles possédant la propriété P, contenant B_{λ_1} et non identiques à B_{λ_1}, car autrement B_{λ_1} serait un ensemble saturé par rapport à la propriété P et contenant B, contrairement à l'hypothèse qu'un tel ensemble n'existe pas. Choisissons un de ces ensembles[1]) et désignons-le par B_λ.

(β) Si λ est de seconde espèce, posons

(209) $$B_\lambda=\overline{\sum_{\mu<\lambda} B_\mu}.$$

On voit sans peine: que la suite $\{B_\lambda\}$ est déterminée par ces conventions pour $\lambda<\Omega$, que l'on a

(210) $$B_\mu \subset B_\lambda \qquad \text{pour} \quad \mu<\lambda,$$

que les ensembles B_λ possèdent la propriété P et sont par conséquent fermés (en vertu de la prémisse 1)(a)), enfin, que l'on a (d'après II(α)) pour tout $\lambda<\Omega$

(211) $$B_{\lambda+1}-B_\lambda \neq 0.$$

Ce résultat est en contradiction évidente avec **36**, th. VII. Le théorème VIII est ainsi démontré.

VII. Lignes de Jordan et continus irréductibles.

39. ***Définition.*** $[x(t),E]$ étant une courbe bornée arbitraire et r un nombre réel, j'appelle *intervalle* $[r,x(t),E]$ tout intervalle $\overline{t_1t_2}$ assujetti aux conditions:

(212) $$t_1<r<t_2,$$

(213) $$t_1 \subset E, \qquad t_2 \subset E,$$

(214) $$x(t_1)=x(t_2).$$

40. ***Lemme VIII.*** *Prémisses*: 1) J_k *où* $k=1,2,\ldots$ *est un intervalle* $[r,x(t),E]$; 2) $J_k \subset J_{k+1}$.

Thèse: $\overline{\Sigma J_k}$ *est un intervalle* $[r,x(t),E]$.

[1]) On voit que notre démonstration a recours à l'axiome du choix de M. Zermelo.

Démonstration. Désignons respectivement par α_k, β_k les extrémités gauche et droite de J_k. On a d'après la prémisse 2)

$$\alpha_{k+1} \leqslant \alpha_k < \beta_k \leqslant \beta_{k+1}. \tag{215}$$

Les suites $\{\alpha_k\}$ et $\{\beta_k\}$ sont donc monotones; de plus, elles sont bornées comme contenues dans un ensemble borné E. Donc, elles convergent; en désignant leurs limites par α et β respectivement, on voit immédiatement que

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\Sigma J_k} \tag{216}$$

et que, pour tout nombre naturel k,

$$\alpha \leqslant \alpha_k < \beta_k \leqslant \beta. \tag{217}$$

D'après la prémisse 1), on a pour $k=1,2,\ldots$:

$$\alpha_k < r < \beta_k, \tag{218}$$

$$\alpha_k \subset E, \qquad \beta_k \subset E, \tag{219}$$

$$x(\alpha_k) = x(\beta_k). \tag{220}$$

En vertu de (217) et (218), on a

$$\alpha < r < \beta. \tag{221}$$

E étant fermé, les relations (219) conduisent en vertu des égalités:

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k, \qquad \beta = \lim_{k\to\infty} \beta_k \tag{222}$$

aux relations

$$\alpha \subset E, \qquad \beta \subset E. \tag{223}$$

Enfin, la fonction $x(t)$ étant continue, (220) et (222) entraînent

$$x(\alpha) = \lim_{k\to\infty} x(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty} x(\beta_k) = x(\beta). \tag{224}$$

D'après (221), (223) et (224), $\overline{\Sigma J_k}$ est bien un intervalle $[r, x(t), E]$.

41. ***Lemme IX.*** *Prémisse: J est un intervalle $[r, x(t), E]$.*

Thèse: Il existe un intervalle $[r, x(t), E]$ saturé par rapport à la propriété d'être un intervalle $[r, x(t), E]$ contenant J.

Démonstration. Remplaçons dans **38**, th. VIII, B par J et les termes „propriété P“ par „propriété d'être un intervalle $[r, x(t), E]$“. La thèse de ce théorème deviendra alors identique à celle du lemme à démontrer. Or, les prémisses du th. VIII sont vraies en vertu de la prémisse du lemme et de **40**. La thèse du lemme est ainsi établie [1]).

42. ***Lemme X.*** *Prémisses*: 1) $[x(t), E]$ *est une courbe bornée*, 2) E *est parfait*, 3) $x(t_1) = x(t_2)$, *si* $\overline{t_1 t_2}$ *est un intervalle contigu à* E, *et* $x(t_1) \neq x(t_2)$ *dans le cas contraire.*

Thèse: *L'image de la courbe* $[x(t), E]$ *est un arc simple.*

Démonstration. R désignant l'ensemble des nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $\overline{01}$, soit G un sous-ensemble dénombrable de E, dense dans E et ne contenant ni d'extrémités des intervalles contigus à E, ni de bornes de E.

Considérons les éléments de G dans leur ordre naturel; on voit immédiatement que G n'a ni premier ni dernier élément et, qu'entre deux éléments de G, il existe toujours un troisième. Donc, G a le même type d'ordre que R (si l'on suppose les éléments de R rangés dans leur ordre naturel). Il existe par suite une correspondance biunivoque entre R et G:

$$t = \varphi(\tau) \quad \text{où} \quad t \subset G \quad \text{et} \quad \tau \subset R \tag{225}$$

qui conserve l'ordre, c. à d. telle que les relations

$$\tau_1 < \tau_2 \quad \text{et} \quad \varphi(\tau_1) < \varphi(\tau_2) \tag{226}$$

s'entraînent mutuellement.

Déterminons pour tout τ de R la fonction $y(\tau)$ par la formule

$$y(\tau) = x(\varphi(\tau)). \tag{227}$$

Je dis que la relation

$$\lim_{k \to \infty} |\tau_k - \tau'_k| = 0 \quad \text{où} \quad \tau_k \subset R \quad \text{et} \quad \tau'_k \subset R \tag{228}$$

entraîne

$$\lim_{k \to \infty} \varrho[y(\tau_k), y(\tau'_k)] = 0. \tag{229}$$

---

[1]) On pourrait démontrer ce lemme par voie directe, c. à d. sans faire appel à **38** et sans l'axiome de M. Zermelo. J'ai esquissé une telle démonstration dans ma Note *O arytmetyzacji kontinuów*, C. R. Soc. Sc. de Varsovie, VI (1913), p. 306-307.

Supposons le contraire. On peut alors tirer de R deux suites $\{\tau_k\}$ et $\{\tau'_k\}$ telles que l'on ait (228) et

(230) $$\lim_{k\to\infty} \varrho[y(\tau_k), y(\tau'_k)] = \lambda > 0.$$

En vertu de (230) et du théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué successivement aux suites $\{\tau_k\}$, $\{\tau'_k\}$, $\{\varphi(\tau_k)\}$ et $\{\varphi(\tau'_k)\}$, on peut trouver une suite d'indices $\{k_i\}$ où $i=1,2,\ldots$ telle que

(231) $$\lim_{i\to\infty} \varrho[y(\tau_{k_i}), y(\tau'_{k_i})] = \lambda$$

et que les suites $\{\tau_{k_i}\}$, $\{\tau'_{k_i}\}$, $\{\varphi(\tau_{k_i})\}$ et $\{\varphi(\tau'_{k_i})\}$ convergent. Posons pour abréger $\tau_{k_i} = \tau_i^{(2)}$ et $\tau'_{k_i} = \tau_i^{(3)}$. On a en vertu de (228)

(232) $$\lim_{i\to\infty} |\tau_i^{(2)} - \tau_i^{(3)}| = 0$$

et (231) devient

(233) $$\lim_{i\to\infty} \varrho[y(\tau_i^{(2)}), y(\tau_i^{(3)})] = \lambda.$$

Nous avons maintenant trois cas à considérer:

I. On a

(234) $$\lim_{i\to\infty} |\varphi(\tau_i^{(2)}) - \varphi(\tau_i^{(3)})| = 0.$$

Comme $\varphi(\tau_i^{(2)}) \subset E$, $\varphi(\tau_i^{(3)}) \subset E$ et $x(t)$ est continue pour $t \subset E$

(235) $$\lim_{i\to\infty} \varrho[x(\varphi(\tau_i^{(2)})), x(\varphi(\tau_i^{(3)}))] = \lim_{i\to\infty} \varrho[y(\tau_i^{(2)}), y(\tau_i^{(3)})] = 0,$$

contrairement à (233).

II. On a

(236) $$\lim_{i\to\infty} \varphi(\tau_i^{(2)}) = t_1 \neq \lim_{i\to\infty} \varphi(\tau_i^{(3)}) = t_2$$

et $\overline{t_1 t_2}$ est un intervalle contigu à E. Alors, par suite de la continuité de $x(t)$ pour $t \subset E$ et en vertu de la prémisse 3):

(237) $$\lim_{i\to\infty} y(\tau_i^{(2)}) = \lim_{i\to\infty} x(\varphi(\tau_i^{(2)})) = x(t_1),$$

(238) $$\lim_{i\to\infty} y(\tau_i^{(3)}) = \lim_{i\to\infty} x(\varphi(\tau_i^{(3)})) = x(t_2),$$

(239) $$x(t_1) = x(t_2),$$

(240) $$\lim_{i\to\infty} y(\tau_i^{(2)}) = \lim_{i\to\infty} y(\tau_i^{(3)}),$$

contrairement à (233).

III. On a (236), mais $\overline{t_1 t_2}$ n'est pas un intervalle contigu à E. Il existe alors un point $t_3 \subset E$ intérieur à l'intervalle $\overline{t_1 t_2}$. E étant parfait et G dense dans E, on voit aisément qu'il existe dans G deux points distincts t_4 et t_5, intérieurs à $\overline{t_1 t_2}$. Soient τ' et τ'' les points correspondants de R. En vertu de (236), t_4 et t_5 sont des points intérieurs de l'intervalle $\overline{\varphi(\tau_i^{(2)})\ \varphi(\tau_i^{(3)})}$ à partir d'une valeur suffisamment grande de i. Soit i_1 cette valeur. Comme la correspondance entre G et R conserve l'ordre, τ' et τ'' sont, pour $i \geqslant i_1$, intérieurs à l'intervalle $\overline{\tau_i^{(2)} \tau_i^{(3)}}$. Par suite,

(241) $$|\tau_i^{(2)} - \tau_i^{(3)}| \geqslant |\tau' - \tau''| > 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant i_1,$$

contrairement à (232).

Donc (228) entraîne (229). Il existe par conséquent[1] une fonction continue $z(\tau)$, définie pour $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ et telle que

(242) $$z(\tau) = y(\tau) \quad \text{pour} \quad \tau \subset R.$$

L'image de la courbe continue $[z(\tau), \overline{01}]$ est évidemment identique à celle de la courbe $[x(t), \bar{G}]$, c. à d. de la courbe $[x(t), E]$, puisque $\bar{G} = E$. Il faut donc démontrer que l'image de $[z(\tau), \overline{01}]$ est un arc simple, ce qui revient à démontrer que

(243) $$z(\tau_1) \neq z(\tau_2) \quad \text{pour} \quad \tau_1 \neq \tau_2.$$

Nous pouvons toujours supposer que $\tau_1 < \tau_2$. Admettons que

(244) $$z(\tau_1) = z(\tau_2)$$

et soient $\sigma, \sigma', \sigma''$ trois nombres rationnels, intérieurs à $\overline{\tau_1 \tau_2}$ et tels que $\sigma < \sigma' < \sigma''$. Conformément au théorème de Bolzano-Weierstrass, déterminons deux suites $\{\sigma_k\}$ et $\{\sigma'_k\}$ de nombres de R de façon que

(245) $$\sigma_k < \sigma, \qquad \sigma'' < \sigma'_k,$$

(246) $$\lim_{k \to \infty} \sigma_k = \tau_1,$$

(247) $$\lim_{k \to \infty} \sigma'_k = \tau_2$$

et que les suites $\{\varphi(\sigma_k)\}$ et $\{\varphi(\sigma'_k)\}$ convergent. En désignant

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 367—369.

leurs limites par t_1 et t_2 respectivement, on a en vertu de (227) et de la continuité de $z(\tau)$ et $x(t)$:

$$z(\tau_1) = \lim_{k\to\infty} z(\sigma_k) = \lim_{k\to\infty} x(\varphi(\sigma_k)) = x(t_1), \tag{248}$$

$$z(\tau_2) = \lim_{k\to\infty} z(\sigma'_k) = \lim_{k\to\infty} x(\varphi(\sigma'_k)) = x(t_2). \tag{249}$$

L'égalité (244) entraîne

$$x(t_1) = x(t_2), \tag{250}$$

de sorte que l'on a soit $t_1 = t_2$, soit $\overline{t_1 t_2}$ est un intervalle contigu à E. D'autre part, (245) entraîne

$$\varphi(\sigma_k) < \varphi(\sigma) < \varphi(\sigma') < \varphi(\sigma'') < \varphi(\sigma'_k), \tag{251}$$

$$t_1 \leqslant \varphi(\sigma) < \varphi(\sigma') < \varphi(\sigma'') \leqslant t_2, \tag{252}$$

$$t_1 < \varphi(\sigma') < t_2. \tag{253}$$

Donc $t_1 \neq t_2$ et l'intervalle $\overline{t_1 t_2}$, qui contient à l'intérieur le point $\varphi(\sigma')$ de E, n'est pas contigu à E. Cette contradiction prouve que l'on a toujours (243) pour $\tau_1 \neq \tau_2$, c. q. f. d.

43. ***Théorème IX.*** *Prémisse: A est une ligne de Jordan généralisée.*

Thèse: a et b étant deux points de A, A contient un arc simple ab.

Démonstration. A est l'image d'une courbe $[x(t), D]$ où D est un intervalle fermé ou une demi-droite. Désignons par t_1 une valeur de t pour laquelle $x(t_1) = a$ et par t_2 une valeur de t pour laquelle $x(t_2) = b$. On peut toujours supposer que $t_1 < t_2$.

Soient: t' la borne supérieure de toutes les valeurs de t telles que

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \qquad x(t) = a \tag{254}$$

et t'' la borne inférieure de toutes les valeurs de t telles que

$$t' \leqslant t \leqslant t_2, \qquad x(t) = b. \tag{255}$$

Rangeons en une suite $\{r_n\}$ les nombres rationnels intérieurs à l'intervalle $\overline{t't''}$ et désignons cet intervalle par E_0. Désignons d'une façon générale par $\mathfrak{W}(J)$ l'ensemble des points intérieurs de l'intervalle J. Formons une suite d'intervalles $\{J_k\}$ de la manière suivante:

J_1 est un intervalle $[r_{n_1}, x(t), E_0]$ saturé, r_{n_1} désignant le premier nombre de la suite $\{r_n\}$ pour lequel il existe un intervalle $[r_n, x(t), E_0]$; on sait d'après **41** que l'existence d'un $[r_{n_1}, x(t), E_0]$ entraîne celle d'un $[r_{n_1}, x(t), E_0]$ saturé.

$J_1, J_2, \ldots, J_k$ étant définis, soit $r_{n_{k+1}}$ le premier nombre de la suite $\{r_n\}$ contenu dans l'ensemble fermé

$$E_k = E_0 - \sum_{m=1}^{k} \mathfrak{W}(J_m) \tag{256}$$

et pour lequel il existe un $[r_{n_{k+1}}, x(t), E_k]$. Soit alors J_{k+1} un $[r_{n_{k+1}}, x(t), E_k]$ saturé (qui existe en vertu de **41**).

La suite $\{J_k\}$ ne contient aucun élément que dans le cas où il n'existe aucun intervalle $[r_n, x(t), E_0]$, quel que soit n.

Supposons que l'on ait dans ce cas, pour deux valeurs t_3, t_4 appartenant à E_0,

$$x(t_3) = x(t_4). \tag{257}$$

Soit r_{n_1} le premier nombre de $\{r_n\}$ intérieur à $\overline{t_3 t_4}$. Ce dernier intervalle est évidemment un $[r_{n_1}, x(t), E_0]$, contrairement à l'hypothèse. Donc, (257) est impossible pour $t_3 \neq t_4$, $t_3 \subset E_0$ et $t_4 \subset E_0$. Ainsi la correspondance $x(t)$ entre E_0 et l'image de la courbe $[x(t), E_0]$ est biunivoque. En vertu de (254) et (255), cette image serait donc un arc simple ab contenu évidemment dans A et notre théorème se trouverait démontré.

Admettons donc que la suite $\{J_k\}$ contient au moins un élément. Elle est alors finie (dans le cas où, pour une valeur de k, il n'existe aucun $[r_n, x(t), E_k]$ tel que $r_n \subset E_k$) ou infinie. Posons:

$$E = E_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{W}(J_k) \tag{258}$$

Considérons deux intervalles J_p et J_q de la suite $\{J_k\}$; soit $p < q$. Les extrémités de J_q font partie de l'ensemble E_{q-1}, donc a fortiori de l'ensemble $E_0 - \mathfrak{W}(J_p)$; elles n'appartiennent donc pas à $\mathfrak{W}(J_p)$. Il y a par suite 4 cas possibles: 1) $J_p = J_q$, 2) $J_p \neq J_q$ et $J_p \subset J_q$, 3) J_p et J_q n'ont qu'une seule extrémité commune, 4) $J_p \cdot J_q = 0$.

Le premier cas ne peut pas se présenter, car les deux formules suivantes sont incompatibles:

$$r_{n_q} \subset E_{q-1} \subset E_0 - \mathfrak{W}(J_p), \tag{259}$$

$$r_{n_q} \subset \mathfrak{W}(J_q) = \mathfrak{W}(J_p). \tag{260}$$

Dans le second cas,

$$r_{n_p} \subset \mathfrak{B}(J_p) \subset \mathfrak{B}(J_q) \tag{261}$$

et les extrémités de J_q sont contenues dans E_{q-1}, donc a fortiori dans E_{p-1}. J_q serait par conséquent un $[r_{n_p}, x(t), E_{p-1}]$ contenant J_p et non identique à J_p, ce qui est impossible.

Le troisième cas s'écarte par une considération analogue. Reste le dernier cas:

$$J_q \cdot J_p = 0 \qquad \text{pour} \quad p \neq q. \tag{262}$$

Soient α_k et β_k les extrémités de J_k; je dis que t' et t'' sont différents respectivement de tous les α_k et β_k. En effet, supposons p. ex. que

$$t' = \alpha_q. \tag{263}$$

Comme $x(\alpha_k) = x(\beta_k) = x(t') = a$ et $x(t'') = b$, on a

$$t' < \beta_k < t'' \leqslant t_2, \tag{264}$$

de sorte que β_k remplirait les conditions (254) et dépasserait t', contrairement à la définition de t'.

On voit ainsi que E est un ensemble parfait contenant t' et t''; les J_k sont les intervalles contigus à E, et l'on a

$$x(\alpha_k) = x(\beta_k). \tag{265}$$

Je dis que l'on a pour $t_5 \subset E$ et $t_6 \subset E$, où $t_5 \neq t_6$,

$$x(t_5) \neq x(t_6), \tag{266}$$

si $\overline{t_5 t_6}$ n'est pas un intervalle J_k.

Supposons le contraire. Deux cas sont possibles:

I. Il existe un $J_k \subset \overline{t_5 t_6}$. On a alors

$$J_k \neq \overline{t_5 t_6}, \tag{267}$$

$$r_{n_k} \subset \mathfrak{B}(J_k) \subset \mathfrak{B}(\overline{t_5 t_6}), \tag{268}$$

$$x(t_5) = x(t_6), \tag{269}$$

$$t_5 \subset E_{k-1} \quad \text{et} \quad t_6 \subset E_{k-1}, \tag{270}$$

car $E_{k-1} \supset E$.

D'après (268), (269) et (270), $\overline{t_5 t_6}$ est un intervalle $[r_{n_k}, x(t), E_{k-1}]$ contenant J_k et, d'après (267), différent de J_k. Donc, J_k n'est pas un $[r_{n_k}, x(t), E_{k-1}]$ saturé, contrairement à la définition de J_k.

II. Il n'existe aucun $J_k \subset \overline{t_5 t_6}$. Soit alors r_q le premier nombre de la suite $\{r_n\}$ intérieur à $\overline{t_5 t_6}$. On a pour $k=1,2,\ldots$:

(271) $$r_{n_k} \subset E_{k-1},$$

(272) $$r_{n_k} \subset \mathfrak{W}(J_k),$$

(273) $$E_k = E_{k-1} - \mathfrak{W}(J_k);$$

donc, r_{n_k} n'est pas contenu dans E_k. Il s'ensuit qu'aucun nombre ne peut figurer plus d'une fois dans la suite $\{n_k\}$. Soit $p=0$, si $q<n_1$; dans le cas contraire soit p le plus grand entier tel que $n_p<q$. L'intervalle $\overline{t_5 t_6}$, comme ne contenant aucun J_k, est contenu dans E; par conséquent t_5, t_6 et r_q sont contenus dans E_p. Il s'ensuit que $\overline{t_5 t_6}$ est un $[r_q, x(t), E_p]$, donc J_{p+1} existe et est un $[r_{n_{p+1}}, x(t), E_p]$ saturé. D'après la definition de p, on a $n_{p+1} \geqslant q$. Or, $n_{p+1}=q$ est impossible, car $r_q \subset E$ et, $r_{n_{p+1}}$ n'étant pas contenu dans E_{p+1} en vertu de (272) et (273), donc a fortiori dans E, on a $r_q \neq r_{n_{p+1}}$. Il en résulte que $q<n_{p+1}$ et que $r_{n_{p+1}}$ n'est pas le premier nombre de la suite $\{r_n\}$ contenu dans E_p et tel que $[r_n, x(t), E_p]$ existe (car $r_{n_{p+1}}$ est précédé par r_q, qui a les mêmes propriétés). Ceci est en contradiction avec la définition de $r_{n_{p+1}}$.

On voit ainsi que (269) ne peut se présenter pour t_5 et t_6 contenus dans E que dans le cas où t_5 et t_6 sont les extrémités d'un intervalle contigu à E. Les prémisses du lemme X étant vraies, la thèse est vraie aussi, c. à d. l'image K de la courbe $[x(t), E]$ est un arc simple contenu dans A et contenant a et b, puisque E contient t' et t''. Soit K_1 le continu irréductible ab dans K. C'est un arc simple ab contenu dans A, c. à d. l'arc cherché [1]).

[1]) S. Janiszewski. Thèse, p. 53. On pourrait démontrer aisément que $K_1 = K$.

44. ***Corollaires.*** En rapprochant les résultats de **29** et **43**, on obtient l'énoncé suivant:

I. *A étant une ligne de Jordan, on peut faire correspondre à tout couple de points a, b de A un arc simple $ab \subset A$ tel que*

$$(274) \qquad \delta(ab) \leqslant 3\varrho_A(a, b).$$

En rapprochant ce résultat à **16**, on en conclut que

II. *A étant une ligne de Jordan et B un sous-ensemble borné et fermé de A, on peut faire correspondre à tout $\varepsilon > 0$ un $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout couple de points a, b de B assujettis à l'inégalité*

$$(275) \qquad \varrho(a, b) \leqslant \varepsilon_1,$$

il existe un arc simple $ab \subset A$ tel que

$$(276) \qquad \delta(ab) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, si A est borné, on peut poser $A = B$, ce qui donne:

III. *A étant une ligne de Jordan bornée, on peut faire correspondre à tout $\varepsilon > 0$ un $\varepsilon_1 > 0$ de manière que l'inégalité* (275) *entraîne, pour $a \subset A$ et $b \subset A$, l'existence d'un arc simple $ab \subset A$ assujetti à* (276).

45. ***Théorème X.*** *Prémisses:* 1) *A est un continu irréductible ab borné;* 2) *x_0 est un point de seconde espèce de A.*

Thèse: Le point x_0 est de second genre.

Démonstration. Distinguons deux cas:

I cas. $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$. Il existe alors un continu de condensation B de A qui contient x_0, mais ne contient ni a ni b.

Soient: $A(a)$ l'ensemble des points $x \subset A$ pour lesquels il existe un $\mathcal{C}(a + x, A - B)$ et $A(b)$ l'ensemble des points $x \subset A$ pour lesquels il existe un $\mathcal{C}(b + x, A - B)$. Je dis que

$$(277) \qquad A(a) \cdot A(b) = 0.$$

Supposons, par contre, que $x_1 \subset A(a) \cdot A(b)$; il existerait alors un A_1 qui est un $\mathcal{C}(a + x_1, A)$ et un A_2 qui est un $\mathcal{C}(b + x_1, A)$, tels que:

$$(278) \qquad A_1 \cdot B = 0,$$

$$(279) \qquad A_2 \cdot B = 0.$$

A_1+A_2 serait évidemment un $\mathfrak{C}(a+b,A)$, donc, A étant irréductible entre a et b, on aurait

$$A_1+A_2=A\supset B, \tag{280}$$

contrairement à (278) et (279). La formule (277) est ainsi établie.

$A(a)$ et $A(b)$ étant des semicontinus, $\overline{A(a)}$ et $\overline{A(b)}$ sont des continus. Je dis que

$$\overline{A(a)}\cdot B\neq 0, \qquad \overline{A(b)}\cdot B\neq 0. \tag{281}$$

Il suffit de démontrer la première de ces deux relations. Supposons, par contre, que l'on ait

$$\varrho(B,A(a))=\varrho_1>0. \tag{282}$$

Soit K l'ensemble de tous les points x tels que

$$\varrho(x,B)\geqslant\varrho_1/2. \tag{283}$$

K étant fermé et a un point intérieur à K, il existe un $\mathfrak{C}(a,A\cdot K)$ — désignons-le par A_1 — tel que [1])

$$A_1\cdot\mathfrak{F}(K)\neq 0. \tag{284}$$

On a en vertu de $A_1\subset K$

$$A_1\cdot B=0. \tag{285}$$

Soit y un point de l'ensemble (284); d'après (285),

$$y\subset A(a)\subset\overline{A(a)};$$

d'autre part, en vertu de $y\subset\mathfrak{F}(K)$,

$$\varrho(y,B)=\varrho_1/2, \tag{286}$$

donc

$$\varrho(B,A(a))\leqslant\varrho_1/2, \tag{287}$$

contrairement à (282). Les formules (281) sont ainsi établies.

L'ensemble $\overline{A(a)}+B+\overline{A(b)}$ étant d'après (281) un $\mathfrak{C}(a+b,A)$ continu, on a

$$\overline{A(a)}+B+\overline{A(b)}=A \tag{288}$$

[1]) S. Janiszewski, l. c., p. 22.

et, B étant un continu de condensation de A,

$$(289) \qquad \overline{A(a)}+\overline{A(b)}=(\overline{A(a)}+\overline{A(b)})'\supset A,$$

d'où, comme $A(a)\cdot B=A(b)\cdot B=0$,

$$(290) \qquad A(a)'+A(b)'\supset B.$$

Il y a deux possibilités à envisager:

(α) $x_0\subset A(a)'\cdot A(b)'$. Supposons que x_0 soit de premier genre. On pourrait déterminer alors un $\varepsilon>0$ de manière que, pour $x+x'\subset A$, les inégalités

$$(291) \qquad \varrho(x,x_0)\leqslant\varepsilon, \qquad \varrho(x',x_0)\leqslant\varepsilon$$

entraînent

$$(292) \qquad \varrho_A(x,x')\leqslant\delta(B)/2.$$

D'après (α), il existe un point $x\subset A(a)$ et un point $x'\subset A(b)$ satisfaisant à (291). Il existe donc trois ensembles A_1, A_2 et A_3 qui sont respectivement un $\mathcal{C}(a+x, A-B)$, un $\mathcal{C}(b+x', A-B)$ et un $\mathcal{C}(x+x', A)$ où A_3 satisfait à la condition

$$(293) \qquad \delta(A_3)<\delta(B).$$

$A_1+A_2+A_3$ étant un $\mathcal{C}(a+b, A)$, on a

$$(294) \qquad A_1+A_2+A_3=A\supset B$$

et comme

$$(295) \qquad A_1\cdot B=A_2\cdot B=0,$$

on aurait $A_3\supset B$, ce qui est impossible en raison de (293). Donc, (α) implique que x_0 est un point de second genre.

(β) x_0 n'est contenu que dans un seul des ensembles $A(a)'$, $A(b)'$, p. ex. dans le premier. Supposons que x_0 soit de premier genre et posons

$$(296) \qquad \varrho(x_0, \overline{A(b)})=\lambda.$$

Le nombre λ est positif. Soient: K la sphère de centre x_0 et de rayon $\lambda/2$, B_1 un $\mathcal{C}(x_0, B\cdot K)$ ne se réduisant pas à un seul point.

On a:

$$B_1 \cdot \overline{A(b)} = 0, \tag{297}$$

$$B_1 \subset A(a)', \tag{298}$$

B_1 est donc un continu de condensation de $\overline{A(a)}$. En raisonnant comme plus haut, on démontrerait l'existence d'un point $x_1 \subset A(a)$, d'un A_1 qui est un $\mathcal{C}(a+x_1, A-B)$ et d'un A_2 qui est un $\mathcal{C}(x_0+\sigma_1, A)$ tel que

$$\delta(A_2) < \delta(B_1). \tag{299}$$

L'ensemble $A_1 + A_2 + B + \overline{A(b)}$ étant un $\mathcal{C}(a+b, A)$, on aurait:

$$A_1 + A_2 + B + \overline{A(b)} = A \tag{300}$$

et, comme

$$(A-B)' \supset B, \tag{301}$$

il vient

$$A_1 + A_2 + \overline{A(b)} \supset B \supset B_1. \tag{302}$$

Mais,

$$A_1 \cdot B_1 \subset A_1 \cdot B = 0, \tag{303}$$

$$\overline{A(b)} \cdot B_1 \subset \overline{A(b)} \cdot K = 0; \tag{304}$$

on devrait donc avoir

$$A_2 \supset B_1, \tag{305}$$

contrairement à (299). Donc, (β) implique aussi que x_0 est de second genre.

II cas. $x_0 = a$ ou bien $x_0 = b$. On peut toujours supposer que $x_0 = b$. Déterminons le continu de condensation $B \supset b$ de manière que B ne contienne pas a. L'ensemble $A(a)$ étant défini comme l'ensemble de tous les points x pour lesquels il existe un $\mathcal{C}(a+x, A-B)$, on montre que

$$A(a)' \supset B. \tag{306}$$

Le reste de la démonstration est analogue au cas I(β).

46. ***Remarque.*** Les résultats obtenus nous permettent de démontrer le théorème suivant de M. Janiszewski[1]):

Pour qu'un continu borné irréductible entre a et b soit un arc simple ab, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun continu de condensation.

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, si un continu irréductible entre a et b contient un continu de condensation, il contient un point de seconde espèce, donc, d'après **45**, un point de second genre et d'après **31**, il n'est pas une ligne de Jordan ni, à plus forte raison, un arc simple.

La condition est suffisante. En effet, si le continu borné irréductible entre a et b ne contient aucun continu de condensation, tous ses points sont de première espèce donc, en vertu de **20**, de premier genre et, d'après **31**, il est une ligne de Jordan. Il contient donc, en vertu de **43**, un arc simple ab. Or, comme continu irréductible entre a et b, il doit être identique à cet arc, c. q. f. d.

[1]) l. c., p. 53.