Sur un problème de M. Lebesgue.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journ. de Math. 6e Série, tome I, p. 199, renvoi (2)), M. H. Lebesgue observe que pour qu'une fonction de deux variables x, y soit de classe $\alpha=0$ (c. à d. continue) dans le plan (x, y), il suffit qu'elle soit de classe 0 de M. Baire sur toute droite $x=$ const. et sur toute courbe (continue) $y=f(x)$; M. Lebesgue ajoute qu'on ne sait pas si cette propriété est encore exacte pour des classes $\alpha>0$.

Nous allons démontrer ici que la propriété est exacte pour $\alpha=1$ et que si elle l'était pour $\alpha=2$, on aurait l'inégalité $2^{\aleph_0}>\aleph_1$ (en d'autres mots: si la puissance du continu est aleph-un, la propriété ne peut pas subsister pour $\alpha=2$).

Soit $F(x,y)$ une fonction de deux variables réelles, qui n'est ni de classe 0, ni de classe 1. On sait, d'après M. Baire, qu'il existe alors un ensemble parfait P et un nombre $\eta>0$, tels que l'oscillation de $F(x,y)$ relative à P est $\geqslant 2\eta$ en tout point de P.

Supposons maintenant que la fonction $F(x,y)$ soit de classe $\leqslant 1$ sur toute droite $x=$ const. Je dis que, pour tout point $p_0(x_0, y_0)$ de P et pour tout $\varepsilon>0$, il existerait alors un point $p(x,y)$ de P tel que

$$(1) \qquad x \neq x_0, \quad pp_0<\varepsilon \quad \text{et} \quad |F(x,y)-F(x_0,y_0)| \geqslant \eta.$$

Désignons, en effet, par Q l'ensemble de tous les points de P dont la distance du point donné p_0 de P est $<\varepsilon$ et par Q' le dérivé (l'ensemble des points d'accumulation) de Q. L'ensemble $S=Q+Q'$ est évidemment parfait et contenu dans P.

Admettons d'abord que l'ensemble Q est situé sur la droite $x=x_0$. L'oscillation de $F(x,y)$ relative à Q est en tout point de Q égale à l'oscillation de $F(x,y)$ en ce point, relative à P; donc, l'oscillation de $F(x,y)$ relative à Q est $\geqslant 2\eta$ en tout point de Q. Par conséquent, l'oscillation de $F(x,y)$ relative à Q est aussi $\geqslant 2\eta$ en tout point de l'ensemble $S=Q+Q'$ (l'ensemble des points du plan en lesquels l'oscillation, relative à un ensemble Q, d'une fonction $F(x,y)$ est $\geqslant 2\eta$ étant fermé). A plus forte raison, elle est $\geqslant 2\eta$ en tout point de S relativement à S. Or, Q étant situé par hypothèse sur la droite $x=x_0$, il en est de même de l'ensemble S. La fonction $F(x,y)$ serait donc totalement discontinue sur un ensemble parfait S, situé sur la droite $x=x_0$, et, par suite, ne serait pas de classe $\leqslant 1$ sur cette droite, contrairement à l'hypothèse.

Donc, l'ensemble Q ne peut être situé sur la droite $x=x_0$; par conséquent, il existe un point $p(x,y)$ de Q, tel que $x \neq x_0$. Le nombre $\varepsilon>0$ étant arbitraire, il est ainsi démontré que tout entourage du point $p_0(x_0,y_0)$ contient un point $p(x,y)$ de P tel que $x \neq x_0$.

Il existe donc un point $p'(x',y')$ de P tel que

$$p'p_0 < \varepsilon/2, \tag{2}$$

$$x' \neq x_0. \tag{3}$$

L'oscillation de $F(x,y)$ relative à P étant $\geqslant 2\eta$ au point p', il existe un point $p''(x'',y'')$ de P tel que:

$$p''p' < \varepsilon/2, \tag{4}$$

$$|x''-x'| < |x'-x_0|, \tag{5}$$

$$|F(x'',y'')-F(x',y')| \geqslant 2\eta. \tag{6}$$

On a d'après (5), $x'' \neq x_0$, et, d'après (2) et (4), $p''p_0<\varepsilon$. Or, d'après (6), on ne peut pas avoir à la fois

$$|F(x',y')-F(x_0,y_0)| < \eta \quad \text{et} \quad |F(x'',y'')-F(x_0,y_0)| < \eta.$$

Il existe donc un point $p(x,y)$ de P satisfaisant aux conditions (1).

Ceci établi, il existe (en posant $\varepsilon=1/2$) un point $p_1(x_1,y_1)$ de P tel que

$$x_1 \neq x_0, \qquad p_1p_0 < 1/2 \qquad \text{et} \qquad |F(x_1,y_1)-F(x_0,y_0)| \geqslant \eta.$$

Supposons que nous avons déjà défini les points de P (d'abscisses différentes deux à deux):

$$(7) \qquad p_{a_1,a_2,\dots,a_k} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant k < n, \quad n \geqslant 2,$$

où $a_1,a_2,\dots,a_k$ est une suite croissante de nombres naturels $<n$ et $p_{a_1,a_2,\dots,a_k}=p_0$ pour $k=0$. Soit δ_n la plus petite différence d'abscisses de deux quelconques des points (7), le point p_0 y inclus.

Les points (7) déterminent, pour n naturel donné, une ligne brisée (à un nombre fini de segments); prolongeons cette ligne à gauche et à droite parallèlement à l'axe d'abscisses: soit L_n la ligne polygonale ainsi obtenue. Il s'en suit qu'aucun des segments de la ligne L_n n'est parallèle à l'axe d'ordonnées; l'équation de la ligne L_n peut donc être écrite sous la forme $y=f_n(x)$.

Etant donné un point $p_{a_1,a_2,\dots,a_k}$ d'entre eux, il existe dans P (en posant $\varepsilon=1/2^n$) un point

$$p_{a_1,a_2,\dots,a_k,n}(x_{a_1,a_2,\dots,a_k,n}, y_{a_1,a_2,\dots,a_k,n})$$

assujetti au conditions:

$$(8) \qquad 0 < |x_{a_1,a_2,\dots,a_k,n} - x_{a_1,a_2,\dots,a_k}| < \delta_n/2;$$

$$(9) \qquad p_{a_1,a_2,\dots,a_k,n}\,p_{a_1,a_2,\dots,a_k} < \min(1/2^n, \varepsilon_n),$$

où ε_n désigne un nombre positif pour lequel l'inégalité $|x-x'|<\varepsilon_n$ entraîne l'inégalité $|f_n(x)-f_n(x')|<1/2^n$;

$$(10) \quad |F(x_{a_1,a_2,\dots,a_k,n}, y_{a_1,a_2,\dots,a_k,n}) - F(x_{a_1,a_2,\dots,a_k}, y_{a_1,a_2,\dots,a_k})| \geqslant \eta.$$

Les points (7) étant déterminés pour tout n donné, les lignes brissés L_n et les fonctions $f_n(x)$ peuvent être déterminées (en vertu de (8)) pour tout n naturel. Or, d'après (9), nous en concluons sans peine que $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<1/2^n$ pour x réels, de sorte que la suite $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\dots)$ converge uniformément (pour x réels).

Posons

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

L'équation

(11) $$y = f(x)$$

détermine donc une courbe continue. L'ensemble M de tous les points (7) est évidemment situé sur cette courbe, de même que l'ensemble $M+M'$. On a d'après (9) $p_{a_1, a_2, \dots, a_k} = \lim_{n\to\infty} p_{a_1, a_2, \dots, a_k, n}$, et d'après (8) $p_{a_1, a_2, \dots, a_k} \neq p_{a_1, a_2, \dots, a_k, n}$; l'ensemble M est donc dense en soi et, par suite, l'ensemble $M+M'$ est parfait.

Or, en vertu des inégalités (9) et (10), l'oscillation relative à M de la fonction $F(x,y)$ est $\geqslant \eta$ en tout point de M. Donc, l'oscillation de $F(x,y)$ relative à l'ensemble parfait $M+M'$ est $\geqslant \eta$ en tout point de cet ensemble. La fonction $F(x,y)$ est ainsi totalement discontinue sur un ensemble parfait situé sur la courbe (11) et ne peut pas être par conséquent de classe $\leqslant 1$ sur cette courbe.

Nous avons donc démontré qu'une fonction $F(x,y)$ qui n'est pas de classe $\leqslant 1$ (dans le plan) ne peut pas être de classe $\leqslant 1$ sur chaque droite $x = \text{const.}$ et sur chaque courbe $y = f(x)$. Autrement dit, *toute fonction $F(x,y)$ qui est de classe $\leqslant 1$ sur chaque droite $x = \text{const.}$ et sur chaque courbe $y = f(x)$ est de classe $\leqslant 1$ dans tout le plan.* La propriété considerée par M. Lebesgue subsiste donc pour la classe $\alpha = 1$.

Nous allons démontrer à présent que si l'on admet l'hypothèse du continu, à savoir l'égalité

(12) $$2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

la propriété considérée est en défaut pour $\alpha = 2$.

M. N. Lusin a démontré[1]) qu'en admettant l'égalité (12), il existe dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ un ensemble N ayant la puissance du continu et tel que tout ensemble parfait non-dense dans $\langle 0, 1 \rangle$ contient au plus un ensemble dénombrable de points de N. Nous allons montrer que l'hypothèse (12) entraîne aussi l'existence dans le plan d'un ensemble indénombrable E qui est au plus dénombrable sur tout ensemble fermé non-dense dans le plan.

[1]) C. R. Paris 158, p. 1259.

En effet, il s'en suit de (12) qu'il existe une suite transfinie du type Ω (Ω désignant le plus petit nombre transfini de troisième classe)

$$(13) \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\lambda, \ldots \qquad (\lambda<\Omega)$$

formée de tous les points du plan. Or, la famille de tous les ensembles fermés non-denses (dans le plan) ayant la puissance du continu, il résulte de (12) qu'il existe une suite transfinie du type Ω

$$(14) \qquad F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\omega, F_{\omega+1}, \ldots, F_\lambda, \ldots \qquad (\lambda<\Omega)$$

formée de tous les ensembles plans fermés non-denses.

Considérons un nombre ordinal quelconque $\lambda<\Omega$. L'ensemble $S_\lambda = \sum\limits_{\xi<\lambda} F_\xi$ est évidemment de I-e catégorie (puisque λ est un nombre ordinal de première ou de deuxième classe et les ensembles F_ξ sont non-denses pour $\xi<\lambda$). Il existe donc des points du plan n'appartenant pas à S_λ; désignons-en par q_λ le premier terme de la suite (13) qui n'appartient pas à S_λ. Soit E l'ensemble de tous les termes différents de la suite transfinie

$$(15) \qquad q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\omega, q_{\omega+1}, \ldots, q_\lambda, \ldots \qquad (\lambda<\Omega)$$

(qui peut contenir le même point plusieurs fois).

Je dis que l'ensemble E est en tout cas indénombrable. En effet, il existerait dans le cas contraire un indice $\beta<\Omega$ tel que la suite du type β

$$(16) \qquad q_1, q_2, \ldots, q_\omega, \ldots, q_\xi, \ldots \qquad (\xi<\beta)$$

contiendrait tous les points de E. Par définition, la suite (14) contient en particulier tous les ensembles plans formés d'un seul point. Soit, d'une façon générale, F_{λ_ξ} l'ensemble dont le seul point est q_ξ. La suite d'indices

$$(17) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\omega, \ldots, \lambda_\xi, \ldots \qquad (\xi<\beta)$$

étant au plus dénombrable (puisque $\beta<\Omega$), il existe un indice $\gamma<\Omega$ supérieur à tous les nombres de la suite (17). L'ensemble $S_\gamma = \sum\limits_{\xi<\gamma} F_\xi$ contient évidemment tous les ensembles F_{λ_ξ} où $\xi<\beta$,

c. à d. tous les points (16), donc tous les points de E. En particulier, S_γ contient le point q_γ, contrairement à la définition de ce point. Ainsi l'ensemble E est bien indénombrable.

Soit à présent F un ensemble plan fermé non-dense. Il s'en suit de la définition de la suite (14) qu'il existe un indice $\mu<\Omega$ tel que $F=F_\mu$. Pour $\lambda>\mu$, l'ensemble F_μ rentre dans la somme $S_\lambda=\sum_{\xi<\lambda} F_\xi$; or, par définition, le point q_λ n'appartient pas à S_λ, donc non plus à F_μ pour $\lambda>\mu$. Les termes de la suite (16) qui appartiennent à F_μ ont donc des indices $\lambda\leqslant\mu$. Comme $\mu<\Omega$, l'ensemble $F=F_\mu$ contient un ensemble au plus dénombrable de points de E. Ainsi l'ensemble indénombrable E est au plus dénombrable sur tout ensemble fermé non-dense.

Il en résulte que E ne contient aucun ensemble parfait. Or, d'après un théorème de MM. Alexandroff-Hausdorff[1]), tout ensemble indénombrable qui est mesurable B contient un sous-ensemble parfait. Donc, E est non mesurable B.

Considérons maintenant la fonction $F(x,y)$ définie par la condition

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{lorsque le point } (x,y) \text{ appartient à } E \\ 0, & \text{lorsque } (x,y) \text{ n'appartient pas à } E. \end{cases}$$

Tout ensemble plan fermé non-dense, donc en particulier toute courbe cantorienne, contenant, comme nous venons de montrer, un ensemble au plus dénombrable de points de E, il en résulte que sur toute courbe cantorienne la fonction $F(x,y)$ est nulle, sauf dans un ensemble au plus dénombrable de points de cette courbe. Donc, la fonction $F(x,y)$ est de classe $\alpha\leqslant 2$ sur toute courbe cantorienne et, en particulier, sur toute droite $x=$ const. et sur toute courbe (continue) $y=f(x)$; cependant la fonction $F(x,y)$, lorsqu'on la considère dans le plan entier, ne rentre pas dans la classification de M. Baire, puisque l'ensemble de tous les points (x,y) du plan pour lesquels on a $F(x,y)>0$, c. à d. l'ensemble E, est non mesurable B.

---

1) P. Alexandroff, C. R. Paris 1916, p. 323; F. Hausdorff; Math. Ann. 77 (1916) p. 436, renvoi *).

Il en résulte encore que si la puissance du continu est aleph-un, toute famille Γ de courbes, qui permet de déduire la classe d'une fonction dans le plan de la classe de cette fonction sur les courbes de Γ, doit nécessairement comprendre des courbes remplissant des domaines.

Considérons maintenant la fonction de Dirichlet:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \text{ rationnels} \\ 0 \text{ pour } x \text{ irrationnels.} \end{cases}$$

C'est, comme on sait, une fonction de classe $\alpha = 2$. La fonction

$$\Phi(x,y) = F(x,y) + 4\chi(x) + 2\chi(y)$$

est donc non représentable analytiquement, puisque, en cas contraire, la fonction $F(x,y) = \Phi(x,y) - 4\chi(x) - 2\chi(y)$ rentrerait dans la classification de M. Baire. On peut démontrer sans peine que la fonction $\Phi(x,y)$ est de classe 2 sur toute droite $x =$ const. et sur toute courbe continue $y = f(x)$, bien qu'elle ne le soit pas, comme nous venons de voir, dans tout le plan (x,y).

Nous avons ainsi démontré que si la puissance du continu est $\aleph_1$, la proprieté considérée par M. Lebesgue est en défaut pour $\alpha = 2$.