Sur les fonctions qui ont la même dérivée et dont la différence n'est pas constante.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

M. Hahn a donné un exemple d'une infinité de fonctions qui ont la même dérivée (non partout finie) en tous les points d'un intervalle et dont la différence n'est pas cependant constante dans cet intervalle [1]). Le but de cette Note est de donner un exemple très simple de même nature.

Soit s un nombre réel donné, $s \geqslant 1$. Divisons le segment $\langle 0, s\rangle$ en 3 parties, de manière que la partie médiane soit un segment de longueur $1/3$ ayant pour centre celui du segment $\langle 0, s\rangle$. Au dessus du segment médian $\left\langle \frac{s}{2}-\frac{1}{6}, \frac{s}{2}+\frac{1}{6}\right\rangle$, comme diamètre, traçons une demi-circonférence. Divisons chacun des deux intervalles qui restent (et dont chacun est évidemment de longueur $\geqslant 1/3$) en 3 parties, de manière que la partie médiane ait pour longueur $1/3^2$ et pour centre celui de l'intervalle qu'on divise. Au-dessus de chacun de deux segments médians ainsi obtenus:

$$\left\langle \frac{s}{4}-\frac{5}{36}, \frac{s}{4}-\frac{1}{36}\right\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{3s}{4}+\frac{1}{36}, \frac{3s}{4}+\frac{5}{36}\right\rangle,$$

---

[1]) H. Hahn, *Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung*, Monatshefte für Math. u. Phys. 16 (1905), p. 161—166.

comme diamètres, traçons une demi-circonférence. Il reste, après cette seconde opération, 4 intervalles de longueur $\geqslant 1/3^2$; divisons en chacun en 3 parties de manière que la partie médiane ait pour longueur $1/3^3$ et pour centre celui de l'intervalle qu'on divise. Au dessus de chacun des 4 segments ainsi obtenus, traçons une demi-circonférence et ainsi de suite. En répétant cette opération indéfiniment, la n-ième opération fournira toujours 2^{n-1} demi-circonférences de diamètre $1/3^n$. Nous obtiendrons ainsi une in finité dénombrable de demi-circonférences dont les points d'accumulation formeront un ensemble parfait P_s situé sur $\langle 0, s\rangle$ et non-dense dans $\langle 0, s\rangle$. Soit Q_s l'ensemble de tous les points qui appartiennent aux demi-circonférences tracées ou à l'ensemble P_s.

L'ensemble Q_s peut être regardé évidemment comme l'image géométrique d'une fonction

$$y = f_s(x),$$

déterminée par le nombre s et continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Posons

$$F_s(t) = \int_0^t f_s(x)\,dx \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant s. \tag{1}$$

C'est évidemment une fonction continue et croissante dans l'intervalle $\langle 0, s\rangle$. D'après la signification géométrique de l'intégrale, le nombre $F_s(s)$ est évidemment égal à la somme des aires de tous les demi-cercles considérés:

$$F_s(s) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2^2}{3^6} + \ldots\right) = \frac{\pi}{56}.$$

Désignons par $\Phi_s(u)$ la fonction inverse à $F_s(t)$. Comme inverse à une fonction continue et croissante, la fonction $\Phi_s(u)$ est donc continue et croissante pour $0 \leqslant u \leqslant F_s(s)$, c. à d. dans l'intervalle $\langle 0, (\pi/56)\rangle$, et on a

$$0 \leqslant \Phi_s(u) \leqslant s \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant \pi/56.$$

Evaluons maintenant la dérivée $\Phi_s'(u)$. Soit u un nombre donné de l'intervalle $\langle 0, (\pi/56)\rangle$.

Distinguons deux cas:

1^0 le nombre $t_s = \Phi_s(u)$ n'appartient pas à l'ensemble P_s. Nous avons alors $f_s(t_s) \neq 0$. Or, d'après (1), le nombre t_s appartenant à l'intervalle $\langle 0, s\rangle$ et la fonction $f_s(t)$ étant continue pour $0 \leqslant t \leqslant s$, nous avons évidemment $F'_s(t_s) = f_s(t_s)$. Comme $f_s(t_s) \neq 0$ et $t_s = \Phi_s(u)$, nous trouvons donc en vertu du théorème sur la dérivation d'une fonction inverse

$$\Phi'_s(u) = 1/F'_s(t_s) = 1/f_s(t_s). \tag{2}$$

Or, comme $t_s = \Phi_s(u)$, nous avons $F_s(t_s) = u$ pour tout $s \geqslant 1$, ce qui donne

$$F_s(t_s) = F_1(t_1). \tag{3}$$

En tenant compte du mode de construction des fonctions $f_s(x)$ et de la signification géométrique de l'intégrale, nous concluons sans peine que l'égalité (3) entraîne l'égalité

$$f_s(t_s) = f_1(t_1). \tag{4}$$

La formule (2) donne donc d'après (4)

$$\Phi'_s(u) = \Phi'_1(u). \tag{5}$$

2^0 le nombre $t_s = \Phi_s(u)$ appartient à l'ensemble P_s. Nous avons dans ce cas $f_s(t_s) = 0$, donc $F'_s(t_s) = 0$. La fonction $\Phi_s(u)$, inverse à $F_s(t)$, étant croissante pour $0 \leqslant u \leqslant \pi/56$, nous en concluons sans peine que

$$\Phi'_s(u) = +\infty,$$

ce qui montre que la formule (5) est encore vraie.

Nous avons ainsi démontré que la formule (5) subsiste pour tout nombre u de l'intervalle $\langle 0, (\pi/56)\rangle$. Toutes les fonctions $\Phi_s(u)$ où $s \geqslant 1$ ont donc une même dérivée dans l'intervalle $\langle 0, (\pi/56)\rangle$.

Nous allons démontrer à présent que la différence de deux fonctions $\Phi_s(u)$ et $\Phi_{s'}(u)$ qui correspondent aux nombres s et s' différents n'est pas constante.

En effet, on voit sans peine que

$$\Phi_s(0) = \Phi_{s'}(0) = 0, \quad \Phi_s(\pi/56) = s, \quad \Phi_{s'}(\pi/56) = s',$$

donc

$$[\Phi_s(\pi/56) - \Phi_{s'}(\pi/56)] - [\Phi_s(0) - \Phi_{s'}(0)] = s - s' \neq 0,$$

ce qui montre que la différence $\Phi_s(u) - \Phi_{s'}(u)$ n'est pas constante dans l'intervalle $\langle 0, (\pi/56) \rangle$.

Les fonctions $\Phi_s(u)$, où $s \geqslant 1$, forment donc un ensemble de puissance du continu de fonctions ayant la même dérivée dans l'intervalle $\langle 0, (\pi/56) \rangle$ et telles que la différence de deux quelconques de ces fonctions n'est pas constante.