Sur un ensemble ponctiforme connexe.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On appelle *ponctiforme* tout ensemble de points qui ne contient aucun continu (cantorien). Appelons *connexe* tout ensemble de points qui ne peut être décomposé en une somme de deux ensembles dont aucun ne contient de points d'accumulation de l'autre[1]).

On voit sans peine que pour les ensembles fermés et bornés cette définition est équivalente aux définitions ordinaires de la connexité. On démontre aussi sans difficulté que l'image continue d'un ensemble connexe est un ensemble connexe[2]).

---

[1]) On pourrait aussi dire: un ensemble C est connexe, s'il ne peut être décomposé en une somme de deux ensembles sans points communs, fermés dans C (Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 244).

[2]) Soit, en effet, C un ensemble connexe, C_1 une image univoque et continue de C et supposons que l'ensemble C_1 ne soit pas connexe. Il existe donc une décomposition $C_1=A_1+B_1$ telle que $A_1B_1=A_1B_1'=A_1'B_1=0$. Soit A l'ensemble de tous les points de C dont les images sont dans A_1; soit B celui de tous les points de C dont les images sont dans B_1. Evidemment $C=A+B$ et $AB=0$. L'ensemble C étant connexe, on a par définition soit $AB'\neq 0$, soit $A'B\neq 0$. Or, si $A'B\neq 0$, il existe un point a commun à A et à B'. Comme point d'accumulation de B, le point a est donc limite d'une suite infinie $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, \ldots$ de points de B. Soit a_1 l'image du point a et $b_1^{(n)}$ celle du point $b^{(n)}$ où $n=1, 2, 3, \ldots$. La transformation de l'ensemble C étant continue, nous aurions $a_1=\lim_{n=\infty} b_1^{(n)}$. Or, c'est impossible, puisque a_1 appartient à A_1, $b_1^{(n)}$ à B_1, donc $\lim_{n=\infty} b_1^{(n)}$ à B_1' et, par hypothèse, $A_1B_1'=0$.

Le but de cette note est de démontrer qu'*il existe un ensemble plan ponctiforme et connexe.*

Soit $P+Q$ une décomposition du plan en deux ensembles dont aucun ne contient d'ensemble parfait[1]. Je dis que chacun des ensembles P et Q est ponctiforme et connexe. Que les ensembles P et Q sont ponctiformes, cela résulte du fait qu'ils ne contiennent aucun ensemble parfait.

---

[1]) L'existence d'une telle décomposition se démontre sans peine à l'aide du théorème de M. Zermelo.

En effet, l'ensemble de tous les points du plan ayant la puissance du continu, ils peuvent être rangés (d'après le théorème de M. Zermelo) en une suite transfinie du type Ω_0:

(1) $$p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega_0),$$

Ω_0 étant le plus petit nombre transfini correspondant à la puissance du continu.

De même, l'ensemble de tous les ensembles plans parfaits ayant la puissance du continu, ils peuvent être rangés en une suite transfinie du type Ω_0

(2) $$P_1, P_2, P_3, \dots, P_\omega, P_{\omega+1}, \dots, P_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega_0).$$

Soient g_1 et h_1 les deux premiers points de la suite (1) qui appartiennent à P_1. Considérons un nombre ordinal $\alpha > 1$ et supposons que nous avons déjà défini tous les points g_ξ et h_ξ pour $\xi < \alpha$. L'ensemble E_α de tous ces points est évidemment d'une puissance inférieure à celle du continu, puisque $\alpha < \Omega_0$. Par conséquent, P_α ayant la puissance du continu, l'ensemble $P_\alpha - E_\alpha$ est de puissance du continu: soient g_α et h_α les deux premiers points de la suite (1) contenus dans $P_\alpha - E_\alpha$. Les suites transfinies du type Ω_0:

(3) $$g_1, g_2, g_3, \dots, g_\omega, g_{\omega+1}, \dots, g_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega_0),$$

(4) $$h_1, h_2, h_3, \dots, h_\omega, h_{\omega+1}, \dots, h_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega_0)$$

sont ainsi définies par l'induction transfinie. Désignons par G l'ensemble de tous les points (3) et par H celui de tous les points (4). Il résulte immédiatement de la définition des suites (3) et (4) que les ensembles G et H sont sans point commun et que chacun d'eux a des points communs avec chacun des ensembles (2). Posons $P = G$ et $Q = \mathrm{C}(G)$. L'ensemble P ne contient aucun sous-ensemble parfait, puisque son complémentaire Q contient évidemment l'ensemble H (et par suite admet au moins un point commun avec tout ensemble parfait). De même, Q ne contient aucun sous-ensemble parfait, puisque son complémentaire est l'ensemble G. Donc, $P+Q$ est une décomposition du plan en deux ensembles dont chacun est dépourvu de sous-ensembles parfaits.

Remarquons que les ensembles P et Q sont non mesurables (L) sur tout segment d'une droite. Ils sont aussi non mesurables superficiellement sur tout ensemble plan de mesure superficielle positive, ce qui montre que *tout ensemble plan de mesure superficielle positive contient un sous-ensemble non mesurable superficiellement.*

Supposons que p. ex. l'ensemble P ne soit pas connexe. Il existe donc une décomposition $P=A+B$ telle que $AB=AB'=A'B=0$. Soient: a un point de A, b un point de B et m un point quelconque du plan, tel que les distances am et bm soient égales. L désignant l'ensemble des points de la ligne brisée amb, soit g le point de l'ensemble fermé $(A+A')L$ le plus éloigné sur amb du point a. Considérons un point quelconque h situé sur la ligne amb entre g et b. L'ensemble Q étant ponctiforme, il existe sur amb entre g et h un point p n'appartenant pas à Q, donc appartenant à $P=A+B$. Le point p, comme situé sur amb entre g et b, a sur amb une distance de a supérieure à ag. Il s'en suit d'après la définition de g que p n'appartient pas à A. Par conséquent p appartient à B. Nous avons donc démontré que tout entourage du point g contient un point de B (distinct de g); par conséquent, g est un point de l'ensemble B'. Or, g est par définition un point de $A+A'$; c'est donc un point de $(A+A')B'=AB'+A'B'$. Comme $AB'=0$, nous en concluons que g est un point de l'ensemble $A'B'$.

Nous avons ainsi démontré que sur toute ligne brisée amb (m étant un point quelconque du plan, tel que $am=mb$) il existe au moins un point de l'ensemble $A'B'$ (autre que a et b, puisque $AB'=A'B=0$). Deux lignes brisées amb et $am'b$ où $m \neq m'$ n'ayant comme points communs que a et b, et l'ensemble de toutes les lignes amb ayant évidemment la puissance du continu, nous en concluons que l'ensemble $A'B'$ est indénombrable. L'ensemble $A'B'$ est fermé (comme produit de deux ensembles fermés) et indénombrable: il contient donc un ensemble parfait H.

Or, $AB'=A'B=0$ a pour conséquence $A'B'P=A'B'(A+B)=$ $=AB'\cdot A'+A'B\cdot B'=0$; l'ensemble H étant contenu dans $A'B'$, on a à plus forte raison $H\cdot P=0$. Par conséquent, H serait un sous-ensemble de Q. Or, c'est impossible, puisque Q ne contient aucun ensemble parfait. La connexité de P est ainsi établie.

Nous avons démontré en même temps que *le complémentaire d'un ensemble plan ponctiforme est toujours connexe.*

Il en résulte que toute décomposition du plan en deux ensembles ponctiformes [1]) fournit en même temps l'exemple d'une décomposition du plan en deux ensembles ponctiformes et connexes.

On voit sans peine qu'un ensemble linéaire ponctiforme n'est jamais connexe. Tout ensemble homéomorphe à un ensemble ponctiforme et connexe étant ponctiforme et connexe, nous en concluons qu'un ensemble plan ponctiforme et connexe ne peut être homéomorphe à aucun ensemble linéaire. L'existence d'ensembles plans ponctiformes, non homéomorphes à aucun ensemble linéaire, a été démontrée par M. Mazurkiewicz [2]).

---

[1]) Des exemples d'une telle décomposition ont été donnés par M. S. Mazurkiewicz et par moi dans le Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1913.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Teorja zbiorów* G_δ, (Wektor 1917) § 21 et *Sur un ensemble* G_δ *ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire*, ce volume, p. 61.