# Sur les rapports entre l'existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)\,dx$, $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

**1.** M. S. Ruziewicz a posé récemment le problème suivant:

*L'existence (pour une fonction bornée $f(x,y)$, définie dans le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$) des intégrales au sens de M. Lebesgue:*

$$(1) \qquad \int_0^1 f(x,y)\,dx \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$(2) \qquad \int_0^1 f(x,y)\,dy \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

*entraîne-t-elle toujours l'existence de l'intégrale (au sens de M. Lebesgue)*

$$(3) \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy \quad ? \text{ [1]}$$

[1] Pour les fonctions non bornées ce problème n'offre aucune difficulté. En effet, la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/(x-\frac{1}{2})^{-3} & \text{pour} \quad 0<y<|x-\frac{1}{2}|, \\ 0 & \text{pour} \quad y \geqslant |x-\frac{1}{2}| \quad \text{et} \quad y=0 \end{cases}$$

admet, comme on le voit sans peine, les intégrales (1) et (2), même au sens de Riemann, de même que l'intégrale $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$, sans admettre l'intégrale lebesguienne (3).

**2.** Nous allons démontrer que la réponse à ce problème est négative, si l'on admet l'hypothèse du continu, c. à d. l'égalité

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1. \tag{4}$$

En effet, $\Omega$ désignant le plus petit nombre transfini de troisième classe, il existe en vertu de (4) une suite transfinie du type $\Omega$

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_\omega,\ a_{\omega+1},\ldots,\ a_\xi,\ldots \qquad (\xi<\Omega) \tag{5}$$

formée de tous les nombres réels de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$.

Soit $N$ un ensemble non mesurable au sens de M. Lebesgue et situé dans cet intervalle. Désignons par $E$ l'ensemble (plan) de tous les points $(x,y)$ où $x$ appartient à $N$ et précède $y$ dans la suite (5). Définissons maintenant la fonction $f(x,y)$ par les conditions:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{lorsque le point } (x,y) \text{ appartient à } E\\ 0 & \text{pour les autres points } (x,y) \text{ du plan.}\end{cases}$$

Evaluons les intégrales (1) et (2) pour la fonction $f(x,y)$ ainsi définie.

Soit d'abord $y_0$ un nombre donné de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. La suite transfinie (5) contenant tous les nombres réels de cet intervalle, donc le nombre $y_0$, on a $y_0=a_\mu$ pour un $\mu<\Omega$. Tout terme de la suite (5) qui précède $y_0$ a donc un indice $<\mu$; comme $\mu<\Omega$, l'ensemble des nombres réels de $\langle 0,1\rangle$ qui précèdent $y_0$ dans (5) est au plus dénombrable. En vertu des définitions de l'ensemble $E$ et de la fonction $f(x,y)$, cette dernière est nulle, sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de $x$. Par conséquent, on a $\int\limits_0^1 f(x,y_0)\,dx=0$, l'intégrale étant entendue au sens de M. Lebesgue. Il est ainsi établi que toutes les intégrales (1) existent (et sont nulles).

Soit d'autre part $x_0$ un nombre donné de $\langle 0,1\rangle$. Deux cas sont à distinguer:

1° $x_0$ appartient à l'ensemble $N$. Comme un nombre de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, $x_0$ est un terme de la suite (5); on a donc $x_0=a_\nu$ pour un $\nu<\Omega$. D'après la définition de l'ensemble $E$, le point $(x_0,y)$ appartient à $E$ ou non, suivant que $y$ figure dans la suite (5) avec un indice $>\nu$ ou $\leqslant\nu$. Comme $\nu<\Omega$, le point $(x_0,y)$ appartient à $E$ pour tous les $y$ de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable. Par définition la fonction $f(x,y)$ est donc égale à 1 pour toutes les valeurs de $y$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable de ces valeurs (pour lesquelles on a notamment $f(x_0,y)=0$). Par conséquent, on a dans ce cas $\int_0^1 f(x_0,y)\,dy=1$.

2° $x_0$ n'appartient pas à $N$. Alors, d'après la définition de l'ensemble $E$, le point $(x_0,y)$ n'appartient pas à $E$, quel que soit le nombre réel $y$. Selon la définition de la fonction $f(x,y)$, on a donc $f(x_0,y)=0$ pour $0\leqslant y\leqslant 1$; par conséquent $\int_0^1 f(x_0,y)\,dy=0$. Il est ainsi établi que toutes les intégrales (2) existent également.

Or, nous venons de voir que l'intégrale (lebesguienne) $\varphi(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est égale à 1 pour les $x$ qui appartiennent à $N$ et à 0 pour les autres $x$ réels. L'ensemble $N$ étant non mesurable $L$, il en résulte que la fonction $\varphi(x)$ n'est pas intégrable au sens de M. Lebesgue (dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, de sorte que l'intégrale (3) n'existe pas.

Nous avons donc démontré que *l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'une fonction bornée $f(x,y)$ qui admet les intégrales lebesguiennes* (1) *et* (2) *sans admettre l'intégrale* (3) [1].

Remarquons, qu'en remplaçant dans notre démonstration l'ensemble $N$ par celui de tous les nombres de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, nous obtenons (à l'aide de l'hypothèse du continu) une fonction bornée $f(x,y)$ telle que

---

[1]) Cependant la fonction considérée admet l'intégrale $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx=0$. Or, en posant $F(x,y)=f(x,y)+f(x,y)$, il existe, comme on voit sans peine, les intégrales $\int_0^1 F(x,y)\,dx$ et $\int_0^1 F(x,y)\,dy$, mais les deux intégrales $\int_0^1 dx\int_0^1 F(x,y)\,dy$ et $\int_0^1 dy\int_0^1 F(x,y)\,dx$ sont en défaut.

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = 0 \text{ [1]}.$$

**3.** On pourrait démontrer sans l'hypothèse du continu (en se basant seulement sur le théorème de M. Zermelo) l'existence d'une fonction bornée $f(x,y)$ admettant les intégrales (1) et (2), mais non (3), si l'on étend la notion d'intégrale comme il suit.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *intégrable* dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$, si elle y est intégrable au sens de M. Lebesgue, abstraction faite d'un ensemble de puissance inférieure à celle du continu. Plus précisément, $f(x)$ sera dite intégrable dans $\langle a,b\rangle$, s'il existe un ensemble $E$ de puissance inférieure à celle du continu et une fonction $f_1(x)$ intégrable dans $\langle a,b\rangle$ au sens de M. Lebesgue qui coïncide avec $f(x)$ en dehors de $E$. L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ sera alors entendue comme l'intégrale lebesguienne de $f_1(x)$ entre $a$ et $b$ et on montre aisément qu'elle ne dépend pas du choix de $E$ et de $f_1(x)$. On peut montrer aussi que l'intégrale ainsi définie jouit de toutes les propriétés fondamentales de l'intégrale lebesguienne et qu'elle n'est pas moins générale que cette dernière. Or, nous ne savons pas si notre intégrale est en effet plus générale que celle de M. Lebesgue; à l'aide de l'hypothèse du continu on peut établir leur équivalence.

Pour démontrer sans l'hypothèse du continu l'existence d'une fonction bornée $f(x,y)$ admettant les intégrales (1) et (2) sans admettre l'intégrale (3) (toutes ces intégrales étant entendues à présent dans le nouveau sens), il suffit de modifier légèrement la démonstration donnée plus haut, en remplaçant la suite (5) par la suite transfinie du type $\Omega_0$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega_0)$$

formée de tous les nombres réels de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, $\Omega_0$ désignant le plus petit nombre transfini correspondant à la puissance du continu. L'existence d'une telle suite résulte, comme on sait, du théorème de M. Zermelo.

---

[1]) M. H. Steinhaus a posé le problème: *existe-il, dans un carré aux côtés* 1, *un ensemble de points de mesure* 1 *sur toute verticale et de mesure* 0 *sur toute horizontale?* (cf. ma Note *Sur un théorème équivalent à l'hypothèse du continu,* Bull. de l'Acad. Sc. de Cracovie, Février 1919, p. 1).

**4.** M. L. Lichtenstein a démontré [1]) que l'existence, pour une fonction bornée $f(x,y)$, des intégrales (1) et (2) au sens de Riemann entraîne l'existence et l'égalité des intégrales au sens de Riemann:

$$(6) \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy \quad \text{et} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx \ ^{2)}.$$

On peut démontrer sans l'hypothèse du continu que l'existence (pour une fonction bornée) des intégrales riemanniennes (1), (2) et (6) n'entraîne pas l'existence de l'intégrale lebesguienne superficielle

$$(7) \qquad \iint_S f(x,y)\,d\omega,$$

étendue à l'aire du carré $S=[0 \leqslant x \leqslant 1;\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1]$.

En effet, j'ai démontré [3]) (à l'aide du théorème de M. Zermelo) l'existence d'un ensemble $E$ non mesurable superficiellement au sens de Lebesgue, situé dans le carré $S$ et tel que toute droite le rencontre en deux points au plus.

Il est évident qu'en posant $f(x,y)=1$ sur $E$ et $f(x,y)=0$ sur le complémentaire de $E$, on obtient une fonction bornée dont les intégrales riemanniennes (1), (2) et (6) sont nulles et dont l'intégrale lebesguienne (7) n'existe pas.

---

[1]) Prace matematyczno-fizyczne XXI, Warszawa 1910, p. 11.

[2]) On peut cependant définir sans peine une fonction non bornée $f(x,y)$ dont les deux intégrales (6) existent, mais ont des valeurs distinctes. En effet, définissons $f(x,y)$ comme suit:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2n} & \text{pour } 1/2^n < x \leqslant 1/2^{n-1} \text{ et } 1/2^n < y \leqslant 1/2^{n-1} \\ -2^{2n+1} & \text{pour } 1/2^{n+1} < x \leqslant 1/2_n \text{ et } 1/2^n < y \leqslant 1/2^{n-1} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (\text{où } n=1,2,\ldots),$$

Nous aurons alors pour les intégrales de Riemann:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = 0.$$

Or, comme l'a remarqué M. Ruziewicz, l'existence (pour une fonction bornée) de l'une des intégrales (6) n'en entraîne pas l'existence de l'autre.

[3]) *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, ce volume, p. 114.

Or, on peut démontrer que l'existence des intégrales lebesguiennes (1), (2) et (7) entraîne celle des intégrales (6), qui sont alors égales à l'intégrale (7) [1].

Remarquons enfin qu'on peut définir sans peine une fonction $f(x,y)$ admettant les intégrales (1), (2) et (6) au sens de Riemann, mais n'admettant pas l'intégrale (7) au sens de Riemann. En effet, posons $f(x,y)=1$, si les développements de $x$ et $y$ en fractions dyadiques sont finis et ont le même nombre de chiffres, et $f(x,y)=0$ pour tous les autres couples $(x,y)$. On voit facilement que les intégrales rimanniennes (1), (2) et (6) existent et sont nulles; or, la fonction $f(x,y)$ n'est pas intégrable superficiellement au sens de Riemann, puisque, considérée comme une fonction de deux variables, elle est discontinue en tout point $(x,y)$ du plan.

[1]) Résultat de M. G. Fubini; cf. E. W. Hobson, Proc. Lond. Math. Soc. 1910, p. 22.