Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. Nous disons qu'une suite transfinie du type Ω de nombres réels (Ω désignant le plus petit nombre de la troisième classe)

$$a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega) \tag{1}$$

a pour limite le nombre a, s'il existe, pour tout $\varepsilon>0$ réel, un nombre ordinal $\mu_\varepsilon<\Omega$ tel que $|a_\xi-a|<\varepsilon$ pour $\mu_\varepsilon<\xi<\Omega$. On montre sans peine que pour que la suite (1) soit convergente, c. à d. admette une limite finie[1]), il faut et il suffit qu'il existe, pour tout $\varepsilon>0$ réel, un nombre ordinal $\mu_\varepsilon<\Omega$ tel que $|a_\xi-a_\eta|<\varepsilon$ pour tout couple de nombres ordinaux ξ, η où $\mu_\varepsilon<\xi<\eta<\Omega$.

Nous disons qu'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de variable réelle

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \ldots, f_\xi(x), \ldots \qquad (\xi<\Omega) \tag{2}$$

a pour limite la fonction $f(x)$, si, pour tout x réel, la suite des nombres (2) a pour limite le nombre $f(x)$.

[1]) On voit sans peine que la suite (1) (de nombres finis) ne peut avoir de limite infinie.

2. Considérons en premier lieu le cas où les termes de la suite (2) sont des fonctions continues. Nous allons démontrer le

Théorème 1. *Si la suite* (2) *est une suite convergente de fonctions continues, tous ses termes sont égaux à partir d'une certaine place.*

Démonstration. Montrons d'abord que *si la suite* (1) *de nombres réels est convergente, tous ses termes sont égaux à partir d'une certaine place.*

Supposons, en effet, que le nombre a est limite de la suite (1) et soit n un nombre naturel donné. Il existe donc, pour le nombre positif $1/n$, un nombre ordinal $\mu_n<\Omega$ tel que

(3) $$|a_\xi-a|<1/n \qquad \text{pour} \quad \mu_n<\xi<\Omega.$$

Pour la suite dénombrable des nombres ordinaux $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$, il existe, comme on sait, un nombre ordinal $\mu<\Omega$ tel que

(4) $$\mu>\mu_n \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

D'après (3) et (4), on aura donc, comme on voit sans peine,

$$a_\xi=a \qquad \text{pour} \quad \mu<\xi<\Omega,$$

comme nous l'avons affirmé.

Supposons maintenant que (2) est une suite convergente de fonctions continues de variable réelle et soit $f(x)$ leur limite. Etant donné un x réel quelconque, il existe, comme nous venons de montrer, un nombre ordinal $\nu_x<\Omega$ tel que

(5) $$f_\xi(x)=f(x) \qquad \text{pour} \quad \nu_x<\xi<\Omega.$$

Soit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ une suite infinie formée de tous les nombres rationnels. Les nombres ordinaux $\nu_{r_1}, \nu_{r_2}, \nu_{r_3}, \ldots$ étant $<\Omega$, il existe un nombre ordinal $\nu<\Omega$ tel que

(6) $$\nu>\nu_{r_n} \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

D'après (5) et (6), on aura donc

$$f_\xi(r_n)=f(r_n) \qquad \text{pour} \quad \nu<\xi<\Omega \text{ et } n=1,2,\ldots,$$

ce qui montre que, pour tout r rationnel, on a

$$f_\xi(r)=f(r) \qquad \text{pour} \quad \nu<\xi<\Omega,$$

donc aussi

$$(7) \qquad f_\xi(r)=f_\eta(r) \qquad \text{pour} \quad \nu<\xi<\eta<\Omega.$$

Or, les fonctions $f_\xi(x)$ et $f_\eta(x)$ étant continues, l'égalité (7), vraie pour tous les r rationnels, entraîne

$$f_\xi(x)=f_\eta(x) \qquad \text{pour} \quad \nu<\xi<\eta<\Omega$$

et pour tous les x réels. Il en résulte l'égalité $f_\xi(x)=f(x)$ pour $\nu<\xi<\Omega$ et pour tout x réel, c. q. f. d.

En particulier, si les fonctions $f_\xi(x)$, où $\xi<\Omega$, sont des polynômes, la limite de la suite (2) (si elle existe) est aussi un polynôme. Donc: *une suite transfinie convergente (du type Ω) de polynômes a pour limite un polynôme.*

Un théorème analogue ne subsiste pas pour les *séries transfinies* du type Ω.

On définit notamment comme il suit la somme d'une série transfinie du type α de nombres réels. Soit

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\omega, u_{\omega+1}, \ldots, u_\xi, \ldots \qquad (\xi<\alpha)$$

une suite transfinie donnée (du type α) de nombres réels. Posons $s_1=u_0$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres s_ξ pour les indices transfinis $\xi<\lambda$ où $\lambda<\alpha$. Si le nombre λ est de première espèce, posons $s_\lambda=s_{\lambda-1}+u_{\lambda-1}$; s'il est de seconde espèce, désignons par s_λ la limite (si elle existe) de la suite transfinie du type λ

$$s_1, s_2, \ldots, s_\omega, s_{\omega+1}, \ldots, s_\xi, \ldots \qquad (\xi<\lambda).$$

Nous dirons que la série du type α de nombres réels

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_\omega+u_{\omega+1}+\ldots+u_\xi+\ldots \qquad (\xi<\alpha)$$

est convergente et a pour somme s, si tous les nombres s_ξ existent pour tout $\xi<\alpha$ et si la suite transfinie du type α

$$s_1, s_2, \ldots, s_\omega, s_{\omega+1}, \ldots, s_\xi, \ldots \qquad (\xi<\alpha)$$

est convergente et a s pour limite.

Etant donnée une fonction quelconque $F(x)$ de classe 1 de M. Baire, il existe une série infinie (ordinaire) de polynômes $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ ayant $f(x)$ pour somme. Posons:

$$\begin{aligned} f_n(x)&=P_n(x) \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots, \\ f_\xi(x)&=0 \qquad \text{pour} \quad \omega\leqslant\xi<\Omega. \end{aligned}$$

On voit sans peine que la série transfinie du type Ω

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\omega(x)+f_{\omega+1}(x)+\ldots+f_\xi(x)+\ldots \qquad (\xi<\Omega)$$

a $f(x)$ pour somme.

Une série transfinie du type Ω de polynômes peut donc avoir pour somme une fonction quelconque de classe 1.

On pourrait aussi construire une série transfinie du type Ω (et même une série du type ω^2) de polynômes ayant pour somme la fonction de Dirichlet, égale à 1 pour x rationnels et à 0 pour x irrationnels (donc une fonction de classe 2).

Le problème si toute function de classe 2 est une somme d'une série transfinie du type Ω de polynômes me semble difficile à résoudre.

3. Examinons maintenant le cas où les termes de la suite (2) sont des fonctions de classe 1 de M. Baire.

Soit $f(x)$ la limite d'une telle suite; soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ un ensemble dénombrable quelconque de nombres réels. Les indices ν_x ayant la même signification que dans (5), considérons un nombre ordinal quelconque $\nu<\Omega$, supérieur à tous les nombres $\nu_{u_1}, \nu_{u_2}, \nu_{u_3}, \ldots$ On aura donc

$$f_\xi(u_n)=f(u_n) \qquad \text{pour} \quad \nu<\xi<\Omega \quad \text{et} \quad n=1,2,\ldots,$$

d'où en particulier

$$f(u_n)=f_{\nu+1}(u_n) \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

Or, $f_{\nu+1}(x)$ est par hypothèse une fonction de classe 1. Il est ainsi démontré qu'il existe pour tout ensemble dénombrable D de nombres réels une fonction de classe 1, égale à $f(x)$ sur D. Nous allons montrer que la fonction $f(x)$ est alors elle-même de classe $\leqslant 1$.

Supposons, par contre, que la fonction $f(x)$ ne soit ni une fonction continue, ni une fonction de classe 1. Je dis qu'il existerait alors un ensemble parfait P et un $\delta>0$ réel, tels que l'oscillation de $f(x)$ sur P est $\geqslant\delta$ en tout point de cet ensemble. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait, dans tout ensemble parfait P et pour tout $\delta>0$, un point, donc aussi une portion de l'ensemble P, où l'oscillation (relative à P) de $f(x)$ serait $<\delta$; il en résulte sans peine l'existence, dans l'ensemble P, des points de continuité de $f(x)$ (relativement à P). La fonction $f(x)$ possèderait donc sur tout ensemble parfait des points de continuité relative à cet ensemble; par suite, elle serait ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, donc, d'après un théorème connu de M. Baire, de classe $\leqslant 1$, contrairement à l'hypothèse.

Il est ainsi établi que si la fonction $f(x)$ n'est ni continue, ni de classe 1, il existe un P parfait et un $\delta>0$ tels que l'oscillation de $f(x)$ sur l'ensemble P est $\geqslant\delta$ en tout point de cet ensemble. Soit

$$v_1, v_2, v_3, \ldots \tag{8}$$

un sous-ensemble de P dénombrable et dense dans P, donc dense en soi. L'oscillation de $f(x)$ sur P au point v_n étant $\geqslant\delta$, il existe dans l'intervalle $\left\langle v_n-\frac{1}{n}, v_n+\frac{1}{n}\right\rangle$ des points v_n' et v_n'' de P tels que

$$|f(v_n')-f(v_n'')|>\delta/2. \tag{9}$$

Désignons par D l'ensemble (dénombrable) de tous les points v_n' et v_n'' où $n=1,2,\ldots$ Je dis qu'en tout point de D l'oscillation de $f(x)$ sur D est $\geqslant\delta/2$. En effet, considérons un point p quelconque de D, donc de P. Soit $\varepsilon>0$ un nombre réel abitraire. L'ensemble (8) étant un sous-ensemble dense de l'ensemble parfait P, il existe dans l'intervalle $\langle p-\varepsilon, p+\varepsilon\rangle$ une infinité de points de la suite (8). Par conséquent, il existe un $n>1/\varepsilon$ naturel et tel que le point v_n est situé dans l'intervalle $\langle p-\varepsilon, p+\varepsilon\rangle$. Or, les points v_n' et v_n'' de D appartenant à l'intervalle $\left\langle v_n-\frac{1}{n}, v_n+\frac{1}{n}\right\rangle$, les inégalités $|v_n-p|<\varepsilon$ et $n>1/\varepsilon$ montrent que v_n' et v_n'' appartiennent à l'intervalle $\langle p-2\varepsilon, p+2\varepsilon\rangle$. Nous en concluons en vertu de (9) que l'oscillation de $f(x)$ sur la portion de D située dans l'intervalle $\langle p-2\varepsilon, p+2\varepsilon\rangle$ est $>\delta/2$. Le nombre ε étant arbitraire, il en résulte que l'oscillation de $f(x)$ au point p de D est $\geqslant\delta/2$ sur cet ensemble.

Il est ainsi établi qu'en tout point de D l'oscillation de $f(x)$ sur D est $\geqslant\delta/2$.

Soit à présent $\varphi(x)$ une fonction égale à $f(x)$ sur l'ensemble D. L'oscillation de $\varphi(x)$ sur D est donc en tout point de D aussi $\geqslant\delta/2$, de sorte que la fonction $\varphi(x)$ est partout discontinue sur l'ensemble parfait P (dont D est un sous-ensemble dense). D'après le théorème de M. Baire, $\varphi(x)$ ne peut donc être une fonction de classe 1.

Nous avons ainsi démontré que si la fonction $f(x)$ n'est ni continue, ni de classe 1, il existe un ensemble dénombrable D sur lequel $f(x)$ n'est égale à aucune fonction de classe $\leqslant 1$. Autrement dit, si une fonction coïncide sur tout ensemble dénombrable D avec une fonction (dépendant de D) de classe 1, elle est elle-même de classe $\leqslant 1$ [1]).

Or, nous avons vu plus haut que $f(x)$ coïncide sur tout D dénombrable avec une fonction $f_{\nu+1}(x)$ (dépendant de D) de classe 1. Nous en concluons donc que $f(x)$ est elle-même une fonction de classe 1 au plus. Nous avons ainsi établi ce

Théorème 2. *La limite d'une suite transfinie convergente (du type Ω) de fonctions de classe* 1 *est une fonction de classe* $\leqslant 1$.

4. La limite d'une suite transfinie convergente (du type Ω) de fonctions de classe 1 peut être distincte de tout terme de cette suite. Soit, en effet, E un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$ de nombres réels; soit

$$a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega)$$

une suite transfinie (du type Ω) formée de tous les nombres (distincts) appartenant à E. Considérons les fonctions:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}1 & \text{pour} \quad x=a_\xi \\ 0 & \text{pour} \quad x\neq a_\xi .\end{cases}$$

Ce sont évidemment des fonctions de classe 1. Déterminons la limite de la suite transfinie (2) des fonctions $f_\xi(x)$ ainsi définies. Si le nombre réel x n'appartient pas à E, on a $x\neq a_\xi$ pour $\xi<\Omega$, donc $f_\xi(x)=0$ pour $\xi<\Omega$, et la limite de la suite (2) est égale à 0. Si x appartient à E, on a $x=a_\mu$ pour un indice $\mu<\Omega$, donc $x\neq a_\xi$ pour $\mu<\xi<\Omega$ et $f_\xi(x)=0$ pour $\mu<\xi<\Omega$, de sorte que la suite (2) a encore pour limite le nombre 0. La limite de la suite des fonctions (2) est donc égale à 0 pour tout x réel. Ainsi, une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de classe 1 peut converger vers une fonction continue (même constante), donc différente de tous les termes de la suite considérée.

---

[1]) Remarquons qu'un théorème analogue subsiste pour les fonctions continues: une fonction qui coïncide sur tout ensemble dénombrable avec une fonction continue est elle-même continue.

5. Considérons maintenant le cas où les termes de la suite (2) sont des fonctions de classe 2. Nous allons montrer que la limite de la suite (2) peut être dans ce cas une fonction qui n'entre pas dans la classification de M. Baire.

En effet, l'axiome de M. Zermelo implique, comme on sait, l'existence d'un ensemble (linéaire) N de points, indénombrable et qui ne contient aucun ensemble parfait. Soit E un sous-ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$ de N; soit

$$(10) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega)$$

une suite transfinie du type Ω formée de tous les éléments de E. Désignons par E_α l'ensemble de tous les nombres a_ξ de la suite (10) qui ont des indices $\xi<\alpha$. Tout ensemble E_α où $\alpha<\Omega$ est donc au plus dénombrable. Considérons les fonctions:

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1 & \text{pour } x \text{ appartenant à } E_\alpha \\ 0 & \text{pour } x \text{ n'appartenant pas à } E_\alpha.\end{cases}$$

Les fonctions $f_\alpha(x)$ sont donc égales à 0 pour toutes les valeurs de x sauf un ensemble au plus dénombrable; ce sont donc des fonctions de classe 2 au plus.

Déterminons maintenant la limite de la suite (2) dans le cas considéré. Si un nombre réel x n'appartient pas à E, il n'appartient non plus à aucun des ensembles E_α pour $\alpha<\Omega$ et on a alors $f_\alpha(x)=0$ pour $\alpha<\Omega$; la limite de la suite (2) est donc égale à 0 dans ce cas. Si x appartient à E, il est un terme de la suite (10) et on a, pour un nombre $\mu<\Omega$, $x=a_\mu$. Le nombre x appartient donc à tout ensemble E_ξ pour $\xi>\mu$ et on a par suite $f_\xi(x)=1$ pour $\mu<\xi<\Omega$, de sorte que la suite (2) a dans ce cas le nombre 1 pour limite. En désignant par $f(x)$ la limite de la suite (2), nous avons donc

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pour } x \text{ appartenant à } E \\ 0 & \text{pour } x \text{ n'appartenant pas à } E.\end{cases}$$

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $f(x)>0$ est précisément l'ensemble E. Or, l'ensemble E n'est pas mesurable B, puisque, d'après le théorème de M. F. Hausdorff[1]), tout ensemble indénombrable mesurable B contient

[1]) Math. Ann. 77 (1916), p. 430.

un sous-ensemble parfait, tandis que E, comme partie de N, n'en contient aucun. L'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)>0]$ est donc non mesurable B, ce qui serait impossible, si $f(x)$ était une fonction de Baire.

Les fonctions (discontinues) $f_\xi(x)$, où $\xi<\Omega$, sont de classe 2 au plus; or, on voit sans peine que tout au plus une infinité dénombrable en peuvent être de classe 1 (car autrement la fonction $f(x)$ serait de classe $\leqslant 1$). Nous pouvons donc dire:

Une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de classe 2 peut avoir pour limite une fonction qui n'est pas une fonction de Baire.

6. Le problème si toute fonction de variable réelle est limite d'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de classe $\leqslant 2$ semble être très difficile à résoudre. Nous allons montrer, en effet, que la solution négative de ce problème entraîne l'inégalité $2^{\aleph_0}>\aleph_1$ (c. à d. la négation de l'hypothèse du continu) et que la solution positive a pour conséquence l'égalité $2^{\aleph_1}=2^{2^{\aleph_0}}$ (donc aussi l'inégalité $2^{\aleph_0}<2^{\aleph_1}$).

Supposons à ce but que l'hypothèse du continu soit vraie (c. à d. que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) et considérons une fonction quelconque $f(x)$ de variable réelle. En vertu de l'hypothèse du continu, il existe une suite transfinie du type Ω

$$a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega) \tag{11}$$

formée de tous les nombres réels. Etant donné un nombre ordinal $\alpha<\Omega$, désignons par $f_\alpha(x)$ la fonction définie par les conditions:

$$f_\alpha(a_\xi)=\begin{cases} f(a_\xi) & \text{pour} \quad \xi<\alpha \\ 0 & \text{pour} \quad \xi\geqslant\alpha. \end{cases}$$

Ainsi, toute fonction $f_\alpha(x)$ est égale à 0, sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x. C'est donc une fonction de classe 2 au plus.

Déterminons maintenant la limite de la suite (2) de fonctions $f_\alpha(x)$ ainsi définies. Etant donné un nombre réel x, il existe un $\mu<\Omega$ tel que $x=a_\mu$ (car la suite (11) contient tous les nombres réels). Or, d'après la définition de la fonction $f_\alpha(x)$, on a

$f_\alpha(a_\mu)=f(a_\mu)$ pour $\alpha>\mu$, donc, comme $a_\mu=x$, $f_\alpha(x)=f(x)$ pour $\alpha>\mu$, de sorte que la suite (2) a la fonction $f(x)$ pour limite.

L'hypothèse du continu entraîne donc que toute fonction de variable réelle est limite d'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de classe 2 au plus [1]). Autrement dit, la solution négative du problème posé entraîne l'inégalité $2^{\aleph_0}>\aleph_1$.

D'autre part, on voit sans peine que l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω dont les termes sont des fonctions de classe $\leqslant 2$ est de puissance $(2^{\aleph_0})^{\aleph_1}=2^{\aleph_1}$, tandis que l'ensemble de toutes les fonctions de variable réelle est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$. Par conséquent, si toute fonction de variable réelle était limite d'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de classe $\leqslant 2$, nous aurions $2^{\aleph_1}=2^{2^{\aleph_0}}$, donc à plus forte raison $2^{\aleph_1}>2^{\aleph_0}$.

Ainsi toute solution du problème considéré, soit négative, soit positive, se ramène à celle d'un problème encore non résolu sur le continu. Il en est de même, comme on voit sans peine, du problème si toute fonction de variable réelle est limite d'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de Baire.

7. Quant à ces dernières, remarquons que l'on peut donner un *exemple effectif d'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de Baire dont la limite n'est pas une fonction de Baire.*

Il résulte notamment des recherches de MM. M. Souslin et N. Lusin sur les ensembles (A) qu'on peut définir effectivement une série du type Ω d'ensembles mesurables B, n'ayant deux à deux aucun point commun et dont la somme E n'est pas mesurable B. Soit

$$E=E_1+E_2+\ldots+E_\omega+E_{\omega+1}+\ldots+E_\xi+\ldots \qquad (\xi<\Omega) \tag{12}$$

une telle série. En posant pour tout $\alpha<\Omega$

$$f_\alpha(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à l'ensemble (mesurable } B) \sum\limits_{\xi<\alpha} E_\xi, \\ 0 & \text{pour les autres } x \text{ réels,}\end{cases}$$

---

[1]) Déjà M. H. Lebesgue a remarqué (Journal de Mathématiques, 6-me série, T. 1, 1905, p. 151 [1])) que l'hypothèse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ aurait pour conséquence que toute fonction d'une variable réelle serait limite d'une suite transfinie (du type Ω) de fonctions de Baire.

on obtient, comme on voit sans peine, une suite (2) de fonctions de Baire, convergeant vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \text{ appartenant à } E \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas une fonction de Baire, puisque l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)>0]$, identique à E, n'est pas mesurable B.

8. Remarquons que, parmi les termes de la série (12), il y a une infinité indénombrable qui sont non vides, puisque, en cas contraire, leur somme E serait mesurable B comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables B. Nous en concluons que $\aleph_1$ fonctions $f_\alpha(x)$, où $\alpha<\Omega$, sont distinctes deux à deux. En omettant donc dans la suite (2) les fonctions qui sont égales aux fonctions à indices plus petits, nous obtenons un *exemple effectif d'une suite transfinie du type Ω dont les termes sont des fonctions de Baire distinctes deux à deux.*