Sur les fonctions convexes mesurables.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Une fonction $f(x)$ de variable réelle est dite *convexe* dans un intervalle $\langle a, b \rangle$, lorsqu'elle satisfait à l'inégalité

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant f(x_1)+f(x_2) \quad \text{pour } a \leqslant x_1 \leqslant b \text{ et } a \leqslant x_2 \leqslant b.$$

Supposons que la fonction $f(x)$ est discontinue au point x_0, intérieur à l'intervalle $\langle a, b \rangle$. Il existe alors un $\delta > 0$ tel que tout entourage de x_0 contient un point x_1 pour lequel

$$(1) \qquad |f(x_1)-f(x_0)| \geqslant \delta.$$

Soit $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon \rangle$ un sous-intervalle quelconque de $\langle a, b \rangle$ ayant x_0 pour centre. Tout entourage du point x_0, donc en particulier l'intervalle $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon \rangle$, contient un point x_1 satisfaisant à l'inégalité (1), donc à l'une des inégalités

$$(2) \qquad f(x_1)-f(x_0) \geqslant \delta,$$

$$(3) \qquad f(x_1)-f(x_0) \leqslant -\delta.$$

Admettons que c'est l'inégalité (3) qui se présente et posons $x'=2x_0-x_1$. Comme $x_0-\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant x_0+\varepsilon$, le nombre x' appartient à l'intervalle $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon \rangle$. Or, $x_0=(x_1+x')/2$, d'où, la fonction $f(x)$ étant convexe, $2f(x_0) \leqslant f(x_1)+f(x')$, donc, d'après (3), $f(x')-f(x_0) \geqslant \delta$, de sorte que le point x' satisfait à l'inégalité (2).

Tout entourage du point x_0 contient ainsi en tout cas un point x_1 pour lequel on a l'inégalité (2). Or, je dis que tout entourage de x_0 contient alors nécessairement un point x_2 satisfaisant à l'inégalité

$$(4). \qquad f(x_2)-f(x_0) \geqslant 2\delta.$$

En effet, tout entourage du point x_0, donc en particulier l'intervalle $\left\langle x_0-\frac{\varepsilon}{2}, x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right\rangle$, contenant par hypothèse un point x_1 qui satisfait à l'inégalité (2), posons $x_2=2x_1-x_0$. Comme $x_0-(\varepsilon/2)\leqslant x_1\leqslant x_0+(\varepsilon/2)$, le point x_2 appartient à l'intervalle $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$. Or, $x_1=(x_0+x_2)/2$, d'où, la fonction $f(x)$ étant convexe, $2f(x_1)\leqslant f(x_0)+f(x_2)$ et par conséquent $f(x_2)-f(x_0)\geqslant 2[f(x_1)-f(x_0)]$, ce qui entraîne d'après (2) l'inégalité (4).

En s'appuyant sur l'inégalité (4) au lieu de (2), on peut montrer de la même manière que tout entourage de x_0 contient un point x_3 pour lequel on a l'inégalité

$$f(x_3)-f(x_0)\geqslant 4\delta,$$

et, par l'itération de ce raisonnement, un point x_n pour lequel on a l'inégalité

$$f(x_n)-f(x_0)\geqslant 2^{n-1}\delta.$$

Nous avons ainsi démontré ce

Théorème 1. *Si une fonction $f(x)$ convexe dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$ est discontinue au point x_0 intérieur à cet intervalle, il existe pour tout nombre positif k et dans tout entourage du point x_0 un point ξ tel que $f(\xi)\geqslant k$.*

Comme conséquence immédiate, nous en tirons le théorème suivant de M. Jensen[1]), démontré d'ailleurs par une autre voie:

Toute fonction convexe dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$ et bornée supérieurement dans cet intervalle est continue dans son intérieur.

Admettons maintenant que la fonction $f(x)$ est dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$ convexe et mesurable (au sens de M. Lebesgue). Supposons qu'elle soit discontinue au point x_0 intérieur à cet intervalle. Soit $\langle x_0-2\sigma, x_0+2\sigma\rangle$ un intervalle situé dans $\langle a,b\rangle$ et ayant x_0 pour centre. D'après le th. 1, il existerait alors pour tout k naturel et dans tout entourage du point x_0, donc, en particulier, dans l'intervalle $\langle x_0-\sigma, x_0+\sigma\rangle$, un point ξ pour lequel on aurait

$$f(\xi_k)\geqslant k. \tag{5}$$

[1]) L. Jensen, *Sur les fonctions convexes etc.*, Acta Mathematica 30, p. 189. Cf. F. Bernstein und G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. 76, p. 514; aussi F. Bernstein, Math. Ann. 64, p. 422.

Soit x un point quelconque de l'intervalle $\langle \xi_k - \sigma, \xi_k + \sigma \rangle$. Comme $x_0 - \sigma \leqslant \xi_k \leqslant x_0 + \sigma$, les points x et $x' = 2\xi_k - x$ appartiennent à l'intervalle $\langle x_0 - 2c, x_0 + 2\sigma \rangle$. La fonction $f(x)$ étant convexe, nous avons $2f(\xi_k) \leqslant f(x) + f(2\xi_k - x)$; d'après (5), nous en concluons que l'une au moins des inégalités $f(x) \geqslant k$ et $f(2\xi_k - x) \geqslant k$ se présente.

Donc, si x est un point de l'intervalle $\langle \xi_k - \sigma, \xi_k + \sigma \rangle$ et si l'inégalité

$$f(x) \geqslant k \tag{6}$$

est en défaut, le point x' de cet intervalle, symétrique à x par rapport au point ξ_k, satisfait à l'inégalité $f(x') \geqslant k$.

La fonction $f(x)$ étant supposée mesurable, nous en concluons que l'ensemble de tous les points x de l'intervalle $\langle \xi_k - \sigma, \xi_k + \sigma \rangle$ pour lesquels on a l'inégalité (6) est de mesure au moins égale à la moitié de la longueur de cet intervalle, donc de mesure $\geqslant \sigma$. L'intervalle $\langle \xi_k - \sigma, \xi_k + \sigma \rangle$ faisant partie de $\langle x_0 - 2\sigma, x_0 + 2\sigma \rangle$, donc aussi de $\langle a, b \rangle$, il en résulte à plus forte raison que l'ensemble de tous les points x de l'intervalle $\langle a, b \rangle$ qui satisfont à l'inégalité (6) serait de mesure $\geqslant \sigma$. Or, cela est incompatible avec le théorème connu de M. E. Borel, d'après lequel, pour toute fonction mesurable $f(x)$ et tout nombre positif σ, il existe un k naturel tel que l'ensemble de tous les x satisfaisant à l'inégalité (6) est de mesure $< \sigma$ [1]). Nous avons ainsi démontré ce

Théorème 2. *Toute fonction mesurable et convexe dans l'intervalle $\langle a, b \rangle$ est continue à l'intérieur de cet intervalle.*

Un cas particulier des fonctions convexes est donné par les fonctions satisfaisant pour toutes les valeurs réelles de x et y à l'équation

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{7}$$

---

[1]) La démonstration de ce théorème de M. Borel s'appuie sur l'axiome de M. Zermelo. Notre théorème pourrait d'ailleurs être démontré sans faire appel à cet axiome (cf. ma Note *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ce volume, p. 116).

En effet, l'équation (7) entraîne pour $y=x$ l'équation $f(2x)=2f(x)$, donc, pour toutes les valeurs réels de x_1 et x_2, l'équation $2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(x_1+x_2)$, d'où selon (7)

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(x_1)+f(x_2). \tag{8}$$

Toute fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle (7) satisfait donc (pour tous x_1 et x_2 réels) à l'équation fonctionnelle (8) [2]).

Il en résulte d'après le th. 2 que *toute fonction mesurable $f(x)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle* (7) *est continue* (donc de la forme Ax, A étant une constante) [3]).

Les fonctions discontinues satisfaisant à l'équation (7) (dont l'existence a été démontrée par M. G. Hamel) sont par conséquent non mesurables.

---

[2]) D'autre part, si la fonction $f(x)$ satisfait à l'équation (8), la fonction $\varphi(x)=f(x)-f(0)$ satisfait à l'équation (7). En effet, (8) entraîne

pour $x_1=2x, x_2=0$ l'équation $2f(x)=f(2x)+f(0)$

et

pour $x_1=2y, x_2=0$ l'équation $2f(y)=f(2y)+f(0)$.

Les deux équations donnent en vertu de (8)

$$2f(x+y)=f(2x)+f(2y)=2f(x)+2f(y)-2f(0).$$

En posant $\varphi(x)=f(x)-f(0)$, on en tire $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, c. q. f. d.

[3]) Cf. ma note citée de ce volume *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$*.