Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Par

Stefan Banach (Kraków).

Le but de cette Note est de démontrer que *toute fonction mesurable $f(x)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle*

$$(1) \qquad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

est continue (donc, d'après Cauchy, de la forme Ax). Notre démonstration sera fondée sur un théorème de M. Lusin concernant les fonctions mesurables.

Soit $f(x)$ une fonction mesurable L satisfaisant pour tous les nombres réels x et y à l'équation (1). Soient: x_0 un nombre réel donné, ε un nombre positif quelconque et $\langle a,b \rangle$ un intervalle arbitraire entourant x. D'après le théorème de M. Lusin, il existe pour toute fonction mesurable $f(x)$ et pour tout nombre positif σ, en particulier pour $\sigma=(b-a)/3$, une fonction $F(x)$ continue (pour tous les x réels) et telle que l'égalité

$$(2) \qquad f(x)=F(x)$$

se présente pour tout x de l'intervalle $\langle a,b \rangle$, sauf peut-être pour des x formant un ensemble E de mesure $<\sigma$ [1]).

---

[1]) N. Lusin, Comptes Rendus t. 154, p. 1688. Cf. aussi W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire du théorème de M. Lusin sur les fonctions mesurables*, Tôhoku Mathematical Journal 10, August 1916, p. 83. Les démonstrations du théorème de M. Lusin sont fondées sur l'axiome de M. Zermelo (voir à ce sujet le Mémoire: W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse*, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Série A, Avril 1918, p. 97). Cependant le théorème qui nous intéresse peut être démontré sans l'axiome du choix; voir à ce sujet W. Sierpiński, *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$*, ce volume, p. 116, et *Sur les fonctions convexes mesurables*, ce volume, p. 127.

La fonction $F(x)$ étant continue, il existe pour ε positif un $\delta=\delta(\varepsilon)>\sigma$ positif tel que l'inégalité

$$(3) \qquad |h|<\delta$$

entraîne, pour tout x de $\langle a,b\rangle$, l'inégalité

$$(4) \qquad |F(x+h)-F(x)|<\varepsilon.$$

Soit h un nombre réel quelconque satisfaisant à l'inégalité (3). L'égalité (2) étant remplie par tous les x de $\langle a,b\rangle$, sauf par des x de l'ensemble E de mesure $<\sigma$, nous concluons que l'égalité

$$(5) \qquad f(x+h)=F(x+h)$$

est remplie par tous les x de $\langle a,b\rangle$, sauf par des x d'un ensemble G de mesure $<\sigma+|h|<\sigma+\delta$.

L'ensemble des x de $\langle a,b\rangle$ pour lesquels l'une au moins des formules (2) et (5) est en défaut est donc de mesure $\leqslant m(E+G)<2\sigma+\delta<3\sigma<b-a$; il en résulte qu'il existe dans $\langle a,b\rangle$ un point x (dépendant de h) pour lequel on a à la fois les formules (2), (4) et (5). Or, (4) entraîne selon (2) et (5)

$$(6) \qquad |f(x+h)-f(x)|<\varepsilon.$$

D'autre part, on a d'après (1) $f(x+h)=f(x)+f(h)$ et $f(x_0+h)=f(x_0)+f(h)$, d'où $f(x+h)-f(x)=f(x_0+h)-f(x_0)$ et par conséquent, selon (6),

$$(7) \qquad |f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Nous avons ainsi établi, pour tout x_0 réel et tout ε positif, l'existence d'un δ positif tel que l'inégalité (3) entraîne l'inégalité (7). Cela prouve la continuité de la fonction $f(x)$, c. q. f. d.