Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. Le but de cette Note est de démontrer sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo le suivant

Théorème. *Toute fonction mesurable $f(x)$ qui satisfait pour tous les nombres réels x et y à l'équation fonctionnelle*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

est de la forme Ax où A est une constante [1]).

2. Nous allons démontrer d'abord, sans nous appuyer sur l'axiome de M. Zermelo, un lemme qui paraît intéressant par lui-même.

Lemme. *Si deux ensembles mesurables linéaires P et Q sont de mesure positive, il existe un point p dans P et un point q dans Q tels que la distance entre p et q est rationnelle.*

---

[1]) Ce théorème a été démontré déjà par M. Fréchet en 1913 dans L'Enseignement Mathématique XV, p. 390. La démonstration de M. Fréchet utilise toutefois l'axiome de M. Zermelo, puisqu'elle s'appuie sur le théorème d'après lequel la mesure de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables sans points communs deux à deux est égale à la somme des mesures de ces ensembles.

Démonstration. On peut admettre évidemment que la mesure de l'ensemble P est finie. Celle de Q étant positive, il existe un intervalle fini δ tel que la partie de Q contenue dans δ est de mesure ν positive. Evidemment $\nu \leqslant \delta$.

Soit μ la mesure de l'ensemble P. D'après la définition de la mesure lebesguienne, il existe, pour le nombre positif $\varepsilon=\mu\nu/6\delta$, une suite infinie d'intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots$, recouvrant P et dont la somme des longueurs est $<\mu+\varepsilon$:

$$\delta_1+\delta_2+\dots<\mu+\varepsilon \text{ [1]}. \tag{2}$$

Nous pouvons supposer que la longueur de chacun de ces intervalles est $<\delta$, puisqu'il suffirait au besoin de diviser les intervalles δ_k en intervalles plus petits que δ.

La série $\delta_1+\delta_2+\dots$ étant convergente, il existe un indice r tel que

$$\delta_{r+1}+\delta_{r+2}+\dots<\varepsilon. \tag{3}$$

Désignons par R la partie de P recouverte par les intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$. C'est évidemment un ensemble mesurable, puisque P est mesurable; l'ensemble $R_1=P-R$ est donc aussi mesurable. Or, il est clair que l'ensemble R_1 est recouvert par les intervalles $\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots$; sa mesure est donc, d'après (3), $<\varepsilon$; la mesure $m(R)$ de $R=P-R_1$ est par conséquent $>\mu-\varepsilon$. Désignons par P_k la partie de P contenue dans l'intervalle δ_k. Nous aurons $P_1+P_2+\dots+P_r=R$, donc

$$m(P_1)+m(P_2)+\dots+m(P_r) \geqslant m(R)>\mu-\varepsilon. \tag{4}$$

Si l'on pouvait avoir $m(P_k) \leqslant \dfrac{\mu-\varepsilon}{\mu+\varepsilon}\delta_k$ pour $k=1,2,\dots,r$, on aurait d'après (2), le nombre $\mu-\varepsilon=\mu[1-(\nu/6\delta)]$ étant positif (puisque $\nu<\delta$):

$$m(P_1)+m(P_2)+\dots+m(P_r) \leqslant \frac{\mu-\varepsilon}{\mu+\varepsilon}(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_r)<\mu-\varepsilon,$$

contrairement à (4). On a donc nécessairement pour un indice n

$$m(P_n)>\frac{\mu-\varepsilon}{\mu+\varepsilon}\delta_n.$$

---

[1]) Nous ne faisons pas distinction entre le symbole de l'intervalle et celui de sa longueur là où un malentendu n'est pas à craindre.

Nous avons ainsi établi l'existence d'un intervalle d de longueur $<\delta$, tel que la partie T de l'ensemble P contenue dans d est de mesure

$$m(T) > \frac{\mu-\varepsilon}{\mu+\varepsilon} d. \tag{5}$$

Nous pouvons encore supposer que l'intervalle d a des extrémités rationnelles, puisqu'il suffirait de l'allonger convenablement de chaque bout. Désignons par a et b les extrémités de d et considérons tous les intervalles

$$\langle a+kd,\ b+kd \rangle \quad \text{où} \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{6}$$

qui ont des points communs avec l'intervalle δ. Dans chacun d'eux, plaçons un ensemble superposable avec T par une translation à une distance multiple de d. Soit S la somme des ensembles ainsi obtenus. Nous voyons sans peine, en vertu de (5), que

$$m(S) > \frac{\mu-\varepsilon}{\mu+\varepsilon} D, \tag{7}$$

D étant la somme des longueurs des intervalles (6) recouvrant l'intervalle δ.

Or, chacun des intervalles (6) étant de longueur $d<\delta$, nous en concluons que

$$D \leqslant \delta + 2d < 3\delta. \tag{8}$$

Si l'ensemble Q (contenu dans l'intervalle δ, donc à plus forte raison dans l'intervalle D) n'avait aucun point commun avec l'ensemble S (qui est aussi contenu dans D), nous aurions

$$m(Q)+m(S)=m(Q+S) \leqslant D; \tag{9}$$

d'autre part, d'après (7), nous avons

$$m(Q)+m(S) > \nu + \frac{\mu-\varepsilon}{\mu+\varepsilon} D; \tag{10}$$

les inégalités (9) et (10) donnent donc

$$\nu < \frac{2\varepsilon}{\mu+\varepsilon} D < \frac{2\varepsilon}{\mu} D,$$

d'où, selon (8),

$$\nu < 6\delta\varepsilon/\mu,$$

ce qui est impossible, puisqu'on a par hypothèse $\varepsilon=\mu\nu/6\delta$.

Par conséquent, les ensembles S et Q ont des points communs. Or, en vertu de la définition de S, tout point de S (s'il n'appartient pas à T) peut être obtenu d'un point de T par une translation à une distance multiple de la longueur d. Cette dernière étant rationnelle (puisque a et b sont rationnels), il en résulte que tout point de S est situé à une distance rationnelle d'un point de l'ensemble T, partie de P.

Le point commun q de S et Q, dont l'existence vient d'être établie, est donc un point de Q situé à une distance rationnelle d'un point p de P, c. q. f. d.

Remarquons qu'il résulte sans peine de notre lemme que tout ensemble de mesure positive contient deux points dont la distance est rationnelle[1]).

3. ***Démonstration du théorème.*** Admettons que la fonction $f(x)$ d'une variable réelle x satisfait pour tous les x et y réels à l'équation (1). Posons

$$\varphi(x)=f(x)-xf(1). \tag{11}$$

En vertu de (1), la fonction $\varphi(x)$ satisfait pour x et y réels à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \tag{12}$$

et l'équation (12) donne par une induction facile

$$\varphi(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)$$

pour des nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En particulier, pour $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, on a donc

$$\varphi(nx)=n\varphi(x). \tag{13}$$

En posant dans (13) $x=m/n$ où m est un nombre naturel, nous trouvons

$$\varphi(m)=n\varphi(m/n). \tag{14}$$

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur un problème de M. Lusin*, Giornale di Matematiche 1917.

Or, on a d'après (13) $\varphi(m)=m\varphi(1)$, et d'après (11) $\varphi(1)=0$; on a donc $\varphi(m)=0$ et la formule (14) donne $\varphi(m/n)=0$ pour m et n naturels, c. à d.

$$\varphi(r)=0 \tag{15}$$

pour tout r rationnel positif.

Pour $x=y=0$, l'équation (12) devient $\varphi(0)=2\varphi(0)$, d'où

$$\varphi(0)=0; \tag{16}$$

pour $y=-x$, l'équation (12) donne $\varphi(0)=\varphi(x)+\varphi(-x)$, d'où selon (16)

$$\varphi(-x)=-\varphi(x) \tag{17}$$

pour tout x réel. Il en résulte, en tenant compte de (16), que la formule (15) subsiste pour tout r rationnel.

On tire de (12) d'après (15), pour tout x réel et r rationnel,

$$\varphi(x+r)=\varphi(x). \tag{18}$$

Admettons maintenant que la fonction $f(x)$ est mesurable (au sens de M. Lebesgue). D'après (11), la fonction $\varphi(x)$ est donc aussi mesurable. Je vais montrer que l'on a pour tout x réel

$$\varphi(x)=0. \tag{19}$$

Supposons, en effet, que l'on ait pour un a réel

$$\varphi(a)\neq 0. \tag{20}$$

Soient E_1 et E_2 les ensembles de tous les nombres x pour lesquels on a respectivement $\varphi(x)>0$ et $\varphi(x)<0$.

D'après (17), E_1 et E_2 sont symétriques l'un à l'autre (par rapport au point 0 comme centre). Ils sont mesurables L, puisque la fonction $\varphi(x)$ est mesurable; ils ont donc la même mesure. En admettant que cette mesure est positive, il existerait en vertu du lemme un point x_1 dans E_1 et un point x_2 dans E_2 tels que $x_1-x_2=r$, où r est rationnel.

Or, on a d'après (18) l'égalité $\varphi(x_1)=\varphi(x_2+r)=\varphi(x_2)$, impossible pour x_1 appartenant à E_1 et x_2 à E_2, car la définition de ces ensembles entraîne $\varphi(x_1)>0$ et $\varphi(x_2)<0$.

Les ensembles E_1 et E_2 sont donc de mesure nulle, de même que l'ensemble $E=E_1+E_2$, c. à d. l'ensemble de tous les points x pour lesquels $\varphi(x)\neq 0$. Il en résulte que l'ensemble G de tous les points x pour lesquels on a $\varphi(x)=0$ est de mesure positive. L'ensemble H de tous les points x pour lesquels on a

$$\varphi(x+a)=0 \tag{21}$$

est (comme superposable avec G) aussi de mesure positive.

Or, la formule (21) donne en vertu de (12)

$$\varphi(x)+\varphi(a)=0,$$

ce qui montre, d'après (20), que $\varphi(x)\neq 0$ pour tous les points x de H. L'ensemble H de mesure positive serait donc contenu dans l'ensemble E de mesure nulle, ce qui est impossible.

Nous avons ainsi démontré que l'existence d'un nombre a satisfaisant à l'inégalité (20) implique une contradiction, donc que c'est l'égalité (19) que l'on a pour tout x réel. Il en résulte selon (11) que $f(x)=xf(1)$ pour tout x réel, c. q. f. d.

Il est ainsi établi, sans s'appuyer sur l'axiome de M. Zermelo, que *toute fonction discontinue qui satisfait à l'équation fonctionnelle* (1) *est non mesurable* [1]).

Notons qu'on pourrait démontrer de la même façon un théorème analogue concernant la fonction de deux variables réelles $f(x,y)$ assujettie pour tous les nombres réels x, y, u et v à l'équation fonctionnelle

$$f(x+u,y+v)=f(x,y)+f(u,v). \tag{22}$$

L'équation (22) donne (pour x,y réels)

$$f(x,y)=f(x,0)+f(0,y)$$

et on voit sans peine que les fonctions (d'une variable réelle) $f(x,0)$ et $f(0,x)$ satisfont à l'équation fonctionnelle (1).

---

[1]) Cf. ma note *Sur les fonctions convexes mesurables*, ce volume, p. 127.

On en déduit facilement que *si une fonction* $f(x,y)$ *satisfaisant à l'équation fonctionnelle* (22) *est mesurable par rapport à chacune des variables, on a* (pour tous les nombres réels x et y)

$$f(x,y)=xf(1,0)+yf(0,1)$$ [1].

---

[1]) D'après une remarque de M. H. Steinhaus, ce théorème subsiste, si l'on admet que la fonction $f(x,y)$ est mesurable superficiellement. Il suffirait même de supposer que $f(x,y)$ est mesurable linéairement comme fonction de x au moins pour une valeur de y et comme fonction de y au moins pour une valeur de x.