Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

D'après un théorème connu sur les ensembles plans mesurables L, un ensemble plan mesurable superficiellement est mesurable (linéairement) sur presque toute droite d'un faisceau parallèle quelconque. M. Zalcwasser[1]) a donné récemment une démonstration élémentaire de ce théorème et a posé le problème si la réciproque du théorème en question est aussi vraie. Nous allons montrer à l'aide du théorème de M. Zermelo que la réponse est négative.

Théorème. *Il existe un ensemble plan qui est de mesure nulle sur toute droite, mais qui n'est pas mesurable superficiellement.*

Démonstration. Tous les ensembles plans fermés de mesure superficielle positive formant un ensemble P de puissance du continu, il existe (d'après le théorème de M. Zermelo) un ensemble bien ordonné

$$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\omega, F_{\omega+1}, \ldots, F_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_0) \tag{1}$$

du type Ω_0 (où Ω_0 est le plus petit nombre transfini correspondant à la puissance du continu) formé de tous les ensembles F qui appartiennent à P.

---

[1]) Z. Zalcwasser, *O pewnej zależności między mierzalnością płaską a linjową*, Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie, Mars 1919 (en polonais).

Pareillement, l'ensemble de tous les points du plan formant un ensemble de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type Ω_0

$$(2) \qquad p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega_0)$$

formée de tous les points p du plan.

Nous allons nous appuyer maintenant sur le suivant

Lemme. *Tout ensemble plan fermé qui est de mesure nulle sur toute droite parallèle à une droite donnée, est de mesure superficielle nulle.*

La démonstration de ce lemme (à l'aide du théorème de M. Borel) n'offre pas de difficulté.

Corollaire. *Pour tout ensemble plan fermé F de mesure superficielle positive et pour toute droite donnée D_0, il existe une droite D parallèle à D_0 et telle que la mesure linéaire de l'ensemble FD est positive.*

En effet, F étant fermé, l'ensemble FD est (pour toute droite D) fermé. Si FD était de mesure nulle pour toute droite D parallèle à D_0, l'ensemble F serait, d'après notre lemme, de mesure superficielle nulle, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc une droite D parallèle à D_0 et telle que l'ensemble FD n'est pas de mesure nulle. Donc, FD étant fermé, c'est un ensemble de mesure positive, c. q. f. d.

Ce corollaire établi, soit q_1 le premier terme de la suite (2) qui est un point de l'ensemble F_1. Soit α un indice donné, $1 < \alpha < \Omega_0$, et admettons que nous avons déjà défini tous les points q_ξ où $\xi < \alpha$. Désignons par G_α l'ensemble de toutes les droites $q_\mu q_\nu$ où $\mu < \nu < \alpha$. Comme $\alpha < \Omega_0$, nous concluons sans peine que l'ensemble de toutes les droites qui appartiennent à G_α est de puissance inférieure à celle du continu. Il s'en suit l'existence d'une droite D_0 qui n'est parallèle à aucune des droites formant G_α. L'ensemble F_α étant de mesure superficielle positive, il existe, d'après le corollaire, une droite D parallèle à D_0 et telle que la mesure linéaire de l'ensemble $F_\alpha D$ est positive. La droite D, comme parallèle à D_0, ne coïncide avec aucune des droites formant G_α. L'ensemble de ces droites étant de puissance inférieure à celle du continu, il s'en suit que les points d'intersection de la droite D avec les droites de G_α forment un ensemble de puissance inférieure à celle du continu. L'ensemble $F_\alpha D$ étant de mesure linéaire positive, donc de puissance du continu, il existe un point p de $F_\alpha D$ qui n'appartient à aucune des droites formant G_α.

Nous avons ainsi établi l'existence d'un point p dans l'ensemble F_α qui ne se trouve sur aucune des droites $q_\mu q_\nu$ où $\mu<\nu<\alpha$. Soit q_α le premier terme de la suite (2) jouissant de cette propriété de p.

La suite transfinie des points

$$(3) \qquad q_1, q_2, q_3, \dots, q_\omega, q_{\omega+1}, \dots, q_\alpha, \dots \qquad (\alpha<\Omega_0)$$

est ainsi définie par l'induction transfinie. Soit E l'ensemble de tous les points de cette suite. Il résulte immédiatement de la définition de la suite (3) que tout ensemble F_α où $\alpha>\Omega_0$ admet au moins un point commun avec l'ensemble E et qu'aucuns trois points de E ne sont situés sur une droite.

Toute droite du plan a donc au plus deux points communs avec l'ensemble E. Or, E ayant au moins un point commun avec tout ensemble fermé de mesure superficielle positive, le complémentaire de E ne peut être de mesure superficielle positive (puisque tout ensemble de mesure superficielle positive contient un sous-ensemble fermé de mesure superficielle positive). L'ensemble E ne peut donc être de mesure superficielle nulle. Or, E ne peut non plus être de mesure superficielle positive, car E contiendrait alors un sous-ensemble fermé F de mesure superficielle positive et il existerait par conséquent une droite D sur laquelle la mesure linéaire de F serait positive; mais c'est impossible, puisque D admet avec E, donc à plus forte raison avec F, deux points communs au plus. Nous en concluons que l'ensemble E est non mesurable superficiellement.

Nous avons ainsi démontré (à l'aide du théorème de M. Zermelo) qu'*il existe un ensemble plan E ayant au plus deux points communs avec toute droite et qui n'est pas mesurable superficiellement*, — c. à d. plus qu'il ne fallait démontrer.

Notons qu'un théorème analogue pour la mesure de M. Borel serait trivial: en effet, tout ensemble non mesurable L (linéairement) formé de points d'une circonférence est un ensemble plan non mesurable B, ayant au plus deux points communs avec toute droite.

Remarquons encore qu'on peut déduire facilement du théorème démontré *l'existence d'une fonction univoque d'une variable réelle et dont l'image géométrique est non mesurable superficiellement* [1]).

En effet, l'ensemble E admet au plus deux points communs avec toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées. Envisageons-en celles qui ont avec E exactement deux points communs. Choisissons sur chacune de ces droites celui des deux points de E qui est plus haut; soit E_1 l'ensemble des points ainsi obtenu (ce peut être d'ailleurs un ensemble vide). Posons $E-E_1=E_2$. L'ensemble $E=E_1+E_2$ étant non mesurable superficiellement, nous concluons qu'un au moins des ensembles E_1 et E_2 est non mesurable superficiellement; désignons-le par G. Il est évident que G admet au plus un point commun avec toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées (puisqu'il en était ainsi de E_1 et de E_2).

Définissons maintenant la fonction $f(x)$ d'une variable réelle x comme il suit. Soit x_0 un nombre réel donné. La droite $x=x_0$ a au plus un point commun avec l'ensemble G; si un tel point existe et y_0 est son ordonnée, posons $f(x_0)=y_0$, sinon posons $f(x)=0$.

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour toutes les valeurs réelles de x. L'image géométrique de la fonction $f(x)$ est évidemment l'ensemble $G+H$ où H est un ensemble de points de l'axe d'abscisses, donc un ensemble de mesure superficielle nulle; G étant non mesurable superficiellement, il en est donc de même de $G+H$, c. q. f. d.

---

[1]) J'ai donné une autre démonstration de l'existence d'une telle fonction dans la Note *Sur un théorème équivalent à l'hypothèse du continu*, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Février 1919, p. 1.