Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Nous entendons par une *base* de M. Hamel tout ensemble (indénombrable) $\mathfrak{B}$ de nombres réels non nuls $a, b, c, \ldots$, tel que tout nombre réel x peut être représenté, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$(1) \qquad x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des nombres rationnels parmi lesquels, dans tout cas particulier, il n'y a qu'un nombre fini (ou nul) qui ne sont pas nuls.

M. Hamel a établi l'existence de tels ensembles $\mathfrak{B}$ (en s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo) [1]).

Nous allons démontrer que la base de M. Hamel peut être mesurable L, c. à d. mesurable au sens de M. Lebesgue.

Désignons par X l'ensemble de tous les x réels de la forme

$$x = c_0 + (c_1/2) + (c_3/2^3) + (c_5/2^5) + \ldots,$$

où c_0 est un entier et $c_1, c_3, c_5, \ldots$ sont des nombres 0 ou 1. Désignons par Y l'ensemble de tous les nombres réels y de la forme

$$y = (c_2/2^2) + (c_4/2^4) + (c_6/2^6) + \ldots,$$

où $c_2, c_4, c_6, \ldots$ sont des nombres 0 ou 1.

---

[1]) voir G. Hamel, Math. Ann. 60, p. 459.

Les ensembles X et Y sont, comme on le voit sans peine, de mesure nulle. Aussi, on voit facilement que tout z réel peut être représenté dans la forme

$$z = x + y,$$

où x est un nombre de l'ensemble X et y de Y.

Posons $S = X + Y$; c'est évidemment un ensemble de mesure nulle. D'après le théorème de M. Zermelo, il existe un ensemble bien ordonné G formé de tous les éléments de l'ensemble S. Soit b_1 le premier élément de G différent de 0; soit b_2 le premier élément de G qui n'est pas de la forme $r_1 b_1$ où r_1 est rationnel; soit b_3 le premier élément de G qui n'est pas de la forme $r_1 b_1 + r_2 b_2$ où r_1 et r_2 sont rationnels. D'une façon générale, soit α un nombre ordinal et admettons que nous avons déjà déterminé les b_λ pour $\lambda < \alpha$. Désignons par b_α le premier élément de l'ensemble G qui ne peut être représenté dans la forme

$$r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_\lambda b_\lambda + \dots,$$

où $\lambda < \alpha$ et les coefficients r_λ, parmi lesquels il n'y a qu'un nombre fini (ou nul) distincts de 0, sont rationnels. (Si, pour un α donné, un tel élément b_α de G n'existait pas, le procédé de la détermination des nombres b_λ serait fini).

Désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des nombres b_α ainsi déterminés. On voit sans peine que tout nombre de l'ensemble G peut être représenté dans la forme

$$r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_\alpha b_\alpha + \dots, \tag{2}$$

où $r_1, r_2, \dots, r_\alpha, \dots$ sont des coefficients rationnels parmi lesquels il n'y a qu'un nombre fini (ou nul) qui ne sont pas nuls. Il en résulte, tout z réel étant représentable sous la forme $z = x + y$ où x et y sont des nombres de G, que tout nombre réel z peut être écrit sous la forme (2).

S'il existait, pour un z_0 réel, deux développements différents:

$$z_0 = r'_1 b_1 + r'_2 b_2 + \dots + r'_\alpha b_\alpha + \dots = r''_1 b_1 + r''_2 b_2 + \dots + r''_\alpha b_\alpha + \dots,$$

où r'_α et r''_α sont des coefficients rationnels, dont il n'y a qu'un nombre fini de non nuls, nous aurions pour certains nombres rationnels non nuls $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et certains $a, b, \ldots, l$, distincts, appartenant à $\mathfrak{B}$ et pris en nombre fini:

$$\alpha a + \beta b + \ldots + \lambda l = 0,$$

ce qui est impossible, comme il résulte sans peine de la manière dont l'ensemble $\mathfrak{B}$ a été formé.

Donc, tout z réel peut être représenté, et cela d'une seule manière, sous la forme (2), ce qui montre que l'ensemble $\mathfrak{B}$ est une base hamelienne de tous les nombres réels. D'autre part, l'ensemble $\mathfrak{B}$, comme sous-ensemble de S, est de mesure nulle. Nous avons donc démontré (en s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo) qu'*il existe une base de M. Hamel de mesure nulle.*

Or, on a le théorème suivant:

Théorème I. *Toute base hamelienne mesurable L est de mesure nulle.*

Démonstration. Supposons, en effet, qu'une base hamelienne $\mathfrak{B}$ ait une mesure positive. L'ensemble E de tous les nombres b/b_1, où b_1 est un nombre donné et b un nombre quelconque de l'ensemble $\mathfrak{B}$, aurait donc une mesure positive (comme semblable à $\mathfrak{B}$). Or, il existe dans tout ensemble de mesure positive deux éléments distincts dont la distance est rationnelle [1]); soient b'/b_1 et b''/b_1 de tels éléments de E; nous aurions donc pour un $r \neq 0$ rationnel $b' - b'' = b_1 r$, ce qui est impossible pour les nombres b_1, b' et b'' de l'ensemble $\mathfrak{B}$.

Plus généralement, on pourrait démontrer sans peine que *la mesure intérieure de toute base hamelienne est nulle.*

---

[1]) En effet, si E est un ensemble de mesure positive, il existe un intervalle fini de longueur δ contenant une partie E_1 de E de mesure positive μ. Si E ne contenait aucun couple d'élements de distance rationnelle, les ensembles $E(1/n)$ obtenus de E_1 par translation de longueur $1/n$ où $n = 1, 2, 3, \ldots$ (donc superposables avec E_1) seraient sans points communs. L'ensemble $E(1) + E(1/2) + \ldots$, situé dans un intervalle fini de longueur $\delta + 1$, serait donc de mesure infinie $\mu + \mu + \mu + \ldots$, ce qui est impossible (cf. ma note *Sur un problème de M. Lusin*, Giornale di Matematiche 1917).

M. C. Burstin a établi l'existence d'une base hamelienne ayant des points communs avec tout ensemble parfait [1]).

Une telle base ne peut être de mesure nulle (puisque le complémentaire de tout ensemble de mesure nulle contient un sous-ensemble parfait); d'après le th. I, elle doit donc être non mesurable L. Par conséquent: *il existe une base hamelienne qui est un ensemble non mesurable* L.

Il importe de remarquer que, aussi bien pour les bases $\mathfrak{B}$ mesurables que non mesurables, l'ensemble de tous les x réels dont le développement (1) ne contient pas un nombre donné a de $\mathfrak{B}$, est non mesurable L.

En effet, désignons par A cet ensemble et par $A(ar)$ sa translation de longueur ar (en direction positive). On voit sans peine que la somme des ensembles $A(ar)$, étendue à tous les r rationnels, constitue l'ensemble de tous les nombres réels, de sorte que les ensembles $A(ar)$ ne peuvent pas être de mesure nulle. Or, si l'ensemble A était de mesure positive, il en serait de même de l'ensemble de tous les nombres x/a où x est un nombre quelconque de A. Pour certains x' et x'' appartenant à A et pour une valeur rationnelle positive de r, nous aurions donc $(x'/a)-(x''/a)=r$, d'où $x'=ar+x''$, ce qui est impossible, puisque les développements (1), correspondants à x' et x'', ne contiennent pas a.

Nous pouvons donc dire: *l'existence d'une base hamelienne entraîne celle des ensembles non mesurables* L. De plus, si nous disposions d'un exemple effectif d'une base hamelienne, dans laquelle nous pouvions indiquer effectivement un élément, nous aurions aussi un exemple effectif d'un ensemble non mesurable L.

Notons enfin que l'on peut déduire de l'existence d'une base hamelienne celle d'un ensemble non mesurable L, sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo [2]).

---

[1]) C. Burstin, *Die Spaltung des Kontinuums in* c *in Lebesgueschem Sinne nichtmessbare Mengen*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien., Math.-Nat. Kl., Abt. IIa, Bd. 125 (1916).

[2]) Il faudrait cependant modifier un peu notre démonstration, puisqu'elle a recours au théorème qu'une somme d'infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle; or, nous ne savons démontrer ce théorème qu'en faisant appel à l'axiome de M. Zermelo.

Nous allons démontrer maintenant que *toute base hamelienne est non mesurable B, c. à d. au sens de M. Borel.*

Notre démonstration sera fondée sur quelques propriétés des ensembles (A), introduits par MM. Souslin et Lusin[1]).

Lemme. *Si X et Y sont des ensembles (A) linéaires, l'ensemble Z de toutes les sommes $x+y$, où x est un nombre quelconque de X et y de Y, est aussi un ensemble (A).*

Démonstration. Traçons par tout point x de X (situé sur l'axe d'abscisses) une parallèle à l'axe d'ordonnées: l'ensemble P_1 de toutes ces parallèles est évidemment un ensemble (A) (plan). Plaçons l'ensemble Y sur l'axe d'ordonnées et traçons par tout point y de Y une parallèle à l'axe d'abscisses. L'ensemble P_2 de ces parallèles est aussi un ensemble (A). Le produit $P=P_1P_2$ est donc encore un ensemble (A). D'autre part, ce produit est évidemment l'ensemble de tous les points (x,y) où x appartient à X et y à Y. L'ensemble Z de toutes les sommes $x+y$ est évidemment une image univoque et continue de l'ensemble P donnée par la fonction $f(x,y)=x+y$. Or, toute image univoque et continue d'un ensemble (A) étant un ensemble (A)[2]), l'ensemble Z est un ensemble (A), c. q. f. d.

Corollaire I. *Si X et Y sont des ensembles (A) linéaires, l'ensemble de tous les nombres $\alpha x+\beta y$, où α et β sont des nombres rationnels, x appartient à X et y à Y, est un ensemble (A).*

Démonstration. X étant un ensemble (A), l'ensemble de tous les nombres αx où α est rationnel et x appartient à X est un ensemble (A) comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (A). Pour la même raison, l'ensemble de tous les nombres βy où β est rationnel et y appartient à Y est un ensemble (A). D'après le lemme, l'ensemble de tous les nombres $\alpha x+\beta y$ est donc un ensemble (A), c. q. f. d.

[1]) C. R., 164, Notes du 8 janvier 1917. Les ensembles (A) linéaires sont des projections orthogonales des ensembles plans mesurables B sur une droite; pareillement, les ensembles (A) plans sont des projections orthogonales sur le plan des ensembles mesurables B situés dans l'espace.

[2]) Voir ma note *Sur une généralisation des ensembles mesurables B*, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Juin 1918. La démonstration y est donnée pour les ensembles linéaires, mais, en la modifiant un peu, on peut l'étendre facilement aux ensembles situés dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

Il en résulte facilement par l'induction le suivant

Corollaire II. *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des ensembles (A), il en est de même de l'ensemble de tous les nombres $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n$ où r_k sont des nombres rationnels et x_k appartient à X_k (pour $k=1,2,\ldots,n$).*

Théorème II. *Aucune base hamelienne n'est mesurable B.*

Démonstration. Nous allons démontrer davantage, à savoir qu'aucune base hamelienne $\mathfrak{B}$ n'est un ensemble (A). Supposons, en effet, que $\mathfrak{B}$ soit un ensemble (A) et posons dans le cor. II $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \mathfrak{B}$. En désignant par P_n l'ensemble de tous les nombres réels qui ont dans le développement (1) au plus n coefficients non nuls, P_n est donc un ensemble (A).

En particulier, P_1 est l'ensemble de tous les nombres réels de la forme rb, où r est un nombre rationnel et b un nombre de la base $\mathfrak{B}$. Donc, $P_1 = \Sigma P_1(r)$ où $P_1(r)$ désigne (r étant donné) l'ensemble de tous les nombres de la forme rb, la sommation s'étendant à tous les r rationnels. La base $\mathfrak{B}$ est par hypothèse un ensemble (A). Par conséquent, $\mathfrak{B}$ est mesurable L, puisque, comme nous l'avons démontré avec M. Lusin [1]), tout ensemble (A) est mesurable L. En vertu du th. I, la base $\mathfrak{B}$ est donc de mesure nulle. Chacun des ensembles $P_1(r)$, comme semblable à $\mathfrak{B}$ (r fois augmenté), est ainsi de mesure nulle et il en est par conséquent de même de l'ensemble P_1, comme de la somme d'une infinité dénombrable des ensembles $P_1(r)$.

Soit maintenant n un indice donné et admettons que l'ensemble P_n est de mesure nulle. Soit b_0 un nombre donné de la base $\mathfrak{B}$. Désignons par $Q(r)$ l'ensemble de tous les nombres de l'ensemble P_{n+1} dont le développement (1) contient b_0 avec le coefficient r. L'ensemble $Q = \Sigma Q(r)$, où la sommation s'étend à tous les $r \neq 0$ rationnels, coïncide donc avec l'ensemble de tous les nombres x de P_{n+1} dont le développement (1) contient b_0. Soient: $r \neq 0$ un nombre rationnel et x un nombre quelconque de l'ensemble $Q(r)$. Le nombre $x - rb_0$ appartient évidemment à l'ensemble P_n, dont la mesure est nulle.

---

[1]) N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur quelques propriétés des ensembles* (A), Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Avril 1918, p. 44.

Nous en concluons que l'ensemble $Q(r)$ (comme obtenu par une translation de P_n) est de mesure nulle pour $r \neq 0$ rationnel, d'où il résulte que l'ensemble $Q = \Sigma Q(r)$ est de mesure nulle.

Donc, si P_{n+1} était de mesure positive, $P_{n+1} - Q$, c. à d. l'ensemble de tous les nombres x de P_{n+1} qui ne contiennent pas le nombre b_0 dans leur développement (1), serait de mesure positive. L'ensemble de tous les nombres x/b_0 où x appartient à $P_{n+1} - Q$ serait donc aussi de mesure positive. Il en résulterait l'existence de deux nombres x' et x'' dans $P_{n+1} - Q$, tels que $(x'/b_0) - (x''/b_0) = r \neq 0$, où r est rationnel. On aurait donc $b_0 = (x' - x'')/r$ et le nombre b_0 s'exprimerait linéairement, avec des coefficients rationnels, par un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{B}$ distincts de b_0, ce qui est impossible.

Il est ainsi établi que si P_n est de mesure nulle, P_{n+1} l'est également. Comme P_1 est de mesure nulle, nous en concluons par induction que tous les P_n sont de mesure nulle. Or, c'est impossible, puisque $P_1 + P_2 + P_3 + \dots$ est l'ensemble de tous les nombres réels.

Par conséquent, la base $\mathfrak{B}$ n'est pas un ensemble (A), et, à plus forte raison, elle n'est pas mesurable B, c. q. f. d.

Remarquons que si nous admettions la proposition T suivante:

si X et Y sont des ensembles (linéaires) mesurables L, l'ensemble de toutes les sommes $x+y$ où x appartient à X et y à Y est aussi mesurable L,

alors, en raisonnant comme plus haut, nous serions amenés à la conclusion que la base $\mathfrak{B}$ est non mesurable L. Or, nous savons que $\mathfrak{B}$ peut être mesurable L. Il en résulte que la proposition T n'est pas vraie. En d'autres mots:

Il existe des ensembles X et Y (linéaires) mesurables L et tels que l'ensemble de toutes les sommes $x+y$ où x appartient à X et y à Y est non mesurable L.