Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive.

Par

Hugo Steinhaus (Jasło, Pologne).

D'après un théorème de M. Sierpiński[1]), on peut toujours trouver dans deux ensembles E_1, E_2 de mesure lebesguienne positive deux points a_1, a_2 dont la distance $\varrho(a_1, a_2)$ est un nombre rationnel. Il s'agit dans ce théorème des ensembles linéaires. En voici un corollaire presque immédiat:

E étant un ensemble de mesure positive, on peut trouver dans E deux points a, b dont la distance $\varrho(a, b)$ est rationnelle (et non nulle).

C'est ce corollaire qui va me servir comme point de départ pour quelques généralisations faciles du théorème en question, exposées au § 1 de cette Note. Je démontre — entre autres — qu'un ensemble de mesure positive contient une infinité des points dont toutes les distances mutuelles sont inrationnelles. Au § 2 j'approfondis la même question, en introduisant la notion d'*ensemble des distances* d'un ensemble donné; j'y démontre le théorème de M. Sierpiński et — entre autres — que l'ensemble des distances d'un ensemble de mesure positive contient un intervalle.

---

1) W. Sierpiński, *Sur un problème de M. Lusin*, Giornale di Matematiche 1917 et *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y)=f(x)+f(y)$, ce volume, p. 116.

1. *Théorème I. Tout ensemble linéaire de mesure positive contient deux points distincts a et b de distance rationnelle.*

Démonstration. Soit E l'ensemble en question. Désignons par $E+x$ l'ensemble obtenu par une translation de E égale à x. Si le théorème était faux pour l'ensemble E, les ensembles

$$(1) \qquad E+1, \quad E+(1/2), \quad \ldots, \quad E+(1/k), \quad \ldots$$

n'auraient pas de points communs deux à deux; en effet, en admettant que les ensembles

$$E+(1/k) \text{ et } E+(1/h) \qquad \text{où } h>k$$

ont un point a d'abscisse a en commun, le point b d'abscisse $a+(1/k)-(1/h)$ appartiendrait à $E+(1/k)$, de sorte que $E+(1/k)$ contiendrait deux points a et b de distance rationnelle $(1/k)-(1/h)\neq 0$ et, par conséquent, E contiendrait deux points de même distance, contrairement à l'hypothèse et conformément à la thèse du théorème.

Considérons donc le cas où les termes de la suite (1) n'ont pas de points communs deux à deux. E étant de mesure positive, il y existe une partie bornée F de mesure positive φ; les ensembles

$$F+1, \quad F+(1/2), \quad \ldots, \quad F+(1/k), \quad \ldots$$

n'ont pas de points communs deux à deux et leur somme $S=\sum_{k=1}^{\infty}\{F+(1/k)\}$ est un ensemble mesurable de mesure positive, car c'est un ensemble borné, somme d'une série d'ensembles mesurables. Or, la mesure de S est égale à $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi$, car la mesure de $F+(1/k)$ est φ. Cette dernière série étant divergente, on aboutit à une contradiction. Le théorème est donc établi.

Théorème II. *Tout ensemble linéaire de mesure positive contient k points distincts $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dont toutes les distances $\varrho(a_i, a_j)$, où $i, j = 1, 2, \ldots, k$ sont rationnelles (k étant un nombre naturel arbitrairement donné d'avance).*

Démonstration. Soient: F une partie bornée de l'ensemble donné et $\varphi > 0$ la mesure de F. En admettant que le théorème est vrai pour $k = n$ (ce qui est le cas pour $k = 2$ en vertu du th. I), nous allons en déduire qu'il est vrai pour $k = n+1$.

Par hypothèse, F contient un système des n points distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de distances rationnelles. Rangeons ces points de manière que a_n en soit celui dont l'abscisse est la plus grande. Soit G la partie de F composée de tous les a_n possibles; $\{\omega_p\}$ désignant la suite de tous les nombres rationnels positifs, on aura

$$(2) \quad G = \sum F \cdot (F + \omega_{i_1}) \cdot (F + \omega_{i_2}) \cdot \ldots \cdot (F + \omega_{i_{n-1}}) \text{ où } i_h \neq i_r \text{ pour } h \neq r,$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$.

La somme infinie contient ainsi tous les produits formés avec ces indices (les systèmes d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ parcourant toutes les permutations de $n-1$ nombres naturels sans répétition). F étant mesurable, il en est de même de ces produits et de leur somme G (qui est bornée, comme partie de F). Donc, l'ensemble

$$(3) \qquad H = F - G$$

est aussi mesurable.

Je dis que la mesure de H est nulle. En effet, si elle était positive, H contiendrait, par suite de l'hypothèse que le th. II est vrai pour $k = n$, un système de points distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de distances rationnelles et, en particulier, le point a_n, dont l'abscisse serait plus grande que les abscisses de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Or, a_n appartiendrait à G (en vertu de la définition de G) et ne pourrait par conséquent, en raison de (3), appartenir à H.

La mesure de H étant nulle, celle de G est donc nécéssairement égale à $\varphi>0$. D'après le th. I, G contient deux points distincts de distance rationnelle; appellons-en a le gauche et b le droit. Le point a appartenant à G, il existe dans F un système

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a$$

de n points distincts, de distances rationnelles et dont le dernier (le point a) possède la plus grande abscisse. Le système

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a, b$$

contient donc $n+1$ points distincts de distances rationnelles, tous ces points appartenant à F. Le théorème est donc vrai pour F et a fortiori pour l'ensemble donné.

Théorème III. *Tout ensemble linéaire de mesure positive contient une suite infinie de points distincts*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

dont les distances mutuelles sont rationnelles.

Démonstration. Soit F une partie bornée de l'ensemble donné et $\varphi>0$ la mesure de F. Considérons l'ensemble G défini par la formule (2) et écrivons G_n au lieu de G pour mettre en évidence la dépendance de n. La mesure de G_n est φ, comme il a été démontré. Posons encore

$$H_n = F - G_n. \tag{4}$$

La mesure de H_n étant nulle, il en est de même de celle de $S=\sum_{n=1}^{\infty} H_n$. Or, on a $F \supset \prod_{n=1}^{\infty} G_n = F - S$. Il s'ensuit que la mesure du produit $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ est $\varphi>0$. Donc, ce produit n'est pas vide. Soit a un de ses éléments; on a

$$a \subset G_n \tag{5}$$

pour tous les n.

D'après la définition de G_n (qui a conduit à la formule (2)), il existe dans F un système de n points distincts

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)},$$

de distances rationnelles et dont l'un (celui d'abscisse la plus grande) est identique à a. Appelons ce système R_n et formons la somme

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} R_n. \tag{6}$$

R est contenu dans F; R_n contenant n points distincts, R en contient une infinité et leurs distances mutuelles sont rationnelles, car tous les R_n ont le point a en commun.

Théorème IV. *Tout ensemble de mesure intérieure positive jouit de la propriété énoncée dans le théorème précédent.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que tout ensemble de mesure intérieure positive contient un sous-ensemble mesurable de mesure positive [1]).

Théorème V. *Si un ensemble E jouit de la propriété énoncée dans le théorème III et si*

$$E = A + B,$$

un au moins des ensembles A, B jouit de ladite propriété.

2. ***Théorème VI.*** *Soient A et B deux ensembles de mesure positive et C un ensemble de nombres, dense partout. Il existe deux points a et b appartenant respectivement à A et B et tels que leur distance $\varrho(a,b)$ est un nombre appartenant à C.*

Démonstration. D'après un théorème connu de la théorie de la mesure [2]), il existe un intervalle Γ de longueur γ tel que la mesure du produit ΓA dépasse $3\gamma/4$. Γ et γ étant déterminés, le même théorème permet d'affirmer l'existence d'un intervalle Δ de longueur $\delta < \gamma/2$ et tel que la mesure du produit ΔB surpasse $3\delta/4$.

---

[1]) Cf. p. ex. W. Wilkosz, ce volume, p. 82, th. I.

[2]) W. Sierpiński, *O mierze Lebesgue'a*, Prace matematyczno-fizyczne 1915, Th. X (en polonais).

Soit k l'entier positif déterminé par les inégalités

(7) $$\frac{\gamma}{k+1} \leqslant \delta < \frac{\gamma}{k}.$$

On aura

(8) $$k \geqslant 2.$$

Divisons Γ en k intervalles égaux. Il existe parmi eux un intervalle Λ tel que

$$\text{mesure de } \quad A\Lambda > 3\delta/4$$

(δ désignant la longueur de Δ). L'ensemble C étant dense partout, il existe dans C un nombre positif ω tel que l'ensemble

$$\Delta B + \omega \qquad (\text{ou} \quad \Delta B - \omega)$$

est situé à l'intérieur de Λ, car on a d'après (7)

$$\lambda = \gamma/k > \delta.$$

Or,

$$\text{mesure de } A\Lambda > \frac{3}{4}\delta \geqslant \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma}{k+1}$$

et, d'après (7),

$$\text{mesure de } (\Delta B \pm \omega) = \text{mesure de } \Delta B > \frac{3}{4}\delta \geqslant \frac{3}{4} \cdot \frac{\gamma}{k+1}.$$

La somme des mesures de $A\Lambda$ et $\Delta B \pm \omega$ est donc plus grande que

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma}{k+1} \geqslant \frac{\gamma}{k} = \lambda$$

en vertu de (8).

Les deux ensembles étant situés à l'intérieur de Λ, ils ont nécessairement des points communs. Il s'ensuit que A et $B \pm \omega$ ont des points communs.

Soit a un tel point et $b = a \mp \omega$; on a $a \subset A$, $b \subset B$ et $\varrho(a, b) = \omega \subset C$, c. q. f. d.

Définition. Etant donnés deux ensembles A et B, nous appellerons *ensemble des distances* de A et B celui de tous les nombres $\varrho(a,b)$ où $a \subset A$ et $b \subset B$.

L'ensemble des distances d'un ensemble A est par définition celui des distances de A et A.

Théorème VII. *L'ensemble des distances D de deux ensembles A et B de mesures positives contient au moins un intervalle entier.*

Démonstration. Soit C l'ensemble complémentaire à D. L'ensemble D contenant toutes les distances, C n'en contient aucune; en vertu du th. VI, C ne saurait donc être dense partout; il s'ensuit que D contient au moins un intervalle, c. q. f. d.

Théorème VIII. *L'ensemble des distances D d'un ensemble A de mesure positive contient un intervalle dont l'extrémité gauche est le nombre* 0.

Démonstration. Soit $\{\omega_n\}$ une suite de nombres positifs tendant vers 0. A contient une partie ΔA située dans un intervalle Δ de longueur δ et telle que

$$\text{mesure de } \Delta A > 3\delta/4. \tag{9}$$

Choisissons n de manière que l'on ait $0 < \omega_n < \delta/2$ et considérons l'ensemble

$$\Delta A + (\Delta A + \omega_n),$$

situé dans un intervalle dont la longueur est moindre que $\delta + \delta/2 = 3\delta/2$.

La somme des mesures de ΔA et $\Delta A + \omega_n$ étant d'après (9) plus grande que $3\delta/2$, ces deux ensembles ont des points communs. Par conséquent A et $A + \omega_n$ ont des points communs, ce qui implique que $\omega_n \subset D$. L'ensemble D contient donc au moins un terme de toute suite de nombres positifs tendant vers 0; il s'ensuit que D (qui contient évidemment 0) contient un intervalle entier dont l'extrémité gauche est 0, c. q. f. d.

Remarque. Le th. I est une conséquence immédiate du th. VIII.

Corollaire. On peut remplacer dans les théorèmes VII et VIII l'hypothèse de *mesure positive* par celle de *mesure intérieure positive*, en s'appuyant sur la remarque faite dans la démonstration du th. IV.

Lemme. *A_1 et A_2 étant deux ensembles de mesure positive, presque tous*[1]) *les points a_2 de A_2 remplissent la condition: il existe un $a_1 \subset A_1$ tel que $\varrho(a_1, a_2)$ est un nombre rationnel.*

Démonstration. Les a_2 qui remplissent ces conditions forment un ensemble

$$G = \sum_{r=1}^{\infty} (A_1 + \omega_r) A_2,$$

$\{\omega_r\}$ étant la suite de tous les nombres rationnels. On reconnaît immédiatement G comme mesurable.

Je dis que la mesure de G est égale à celle de A_2. En effet, dans le cas contraire, l'ensemble

$$B = A_2 - G \tag{10}$$

serait de mesure positive et l'ensemble D des distances de A_1 et B contiendrait d'après le th. VII un nombre rationnel; il existerait donc deux points a_1 et b tels que:

$$a_1 \subset A_1, \quad b \subset B,$$

$$\varrho(a_1, b) \text{ est un nombre rationnel.}$$

Or, $B \subset A_2$, donc $b \subset A_2$ et, d'après la définition de G, on aurait $b \subset G$, de sorte que $b \subset B$ et $b \subset G$, contrairement à (10).

---

[1]) c. à d. *tous, à l'exception d'un ensemble de mesure nulle.*

Théorème IX. *Les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_k$ étant de mesure positive, il existe un système de points*

$$a_1 \subset A_1, \quad a_2 \subset A_2, \quad \ldots, \quad a_k \subset A_k \qquad (k \geqslant 2)$$

tels que toutes les distances

$$\varrho(a_m, a_n) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots, k)$$

sont rationnelles.

Démonstration. Admettons que le théorème (T) suivant est vrai pour $k=n$:

Presque tous les points de A_k sont des a_k qui remplissent la condition: il existe des points a_1, a_2, ..., a_{k-1} tels que

$$a_1 \subset A_1, \quad a_2 \subset A_2, \quad \ldots, \quad a_{k-1} \subset A_{k-1}, \quad a_k \subset A_k$$

et

$$\varrho(a_m, a_p) \text{ est un nombre rationnel pour } m, p = 1, 2, \ldots, k.$$

Je vais en déduire le même théorème (T) pour $k=n+1$.

Définissons respectivement G et B par les formules:

$$G = \sum (A_1 + \omega_{r_1}) \cdot (A_2 + \omega_{r_2}) \cdot \ldots \cdot (A_n + \omega_{r_n}) \cdot A_{n+1}, \qquad B = A_{n+1} - G,$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes r_1, r_2, ..., r_n de n indices.

Le même raisonnement qui a servi pour démontrer le lemme prouve que B ne saurait être de mesure positive et que presque tous les points de A_{p+1} appartiennent à G — ce qui démontre le théorème (T) pour $k=n+1$.

Or, pour $k=2$, ce théorème est identique au lemme; (T) est donc établi par l'induction pour tous les $k \geqslant 2$. Comme (T) est plus général que le th. IX, ce dernier se trouve démontré.

Théorème X. *$\{A_n\}$ étant une suite infinie d'ensembles de mesure positive, il existe une suite infinie de points $\{a_n\}$ appartenant respectivement aux A_n et tels que toutes leurs distances mutuelles sont rationnelles.*

Démonstration. D'après le théorème (T), presque tous les points de A_1 sont des a_1 remplissant le th. IX pour un $k \geqslant 2$ donné. Les autres points de A_1 forment un ensemble B_k de mesure nulle. La mesure de

$$C = A_1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_k$$

est donc égale à celle de A_1; elle est positive et C n'est pas vide. Les points de C (qui font partie de A_1) sont — d'après la définition de C — des a_1 qui satisfont au th. IX pour tout $k \geqslant 2$. Soit a_1' un tel point; il existe donc des points $p_i, q_j, \ldots, r_s, \ldots$ tels que

$$\begin{array}{lllll}
a_1' \subset A_1, & p_2 \subset A_2, & & & \\
a_1' \subset A_1, & q_2 \subset A_2, & q_3 \subset A_3, & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1' \subset A_1, & r_2 \subset A_2, & r_3 \subset A_3, & \ldots, & r_k \subset A_k, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

et que les nombres

$$\varrho(a_1', p_2), \quad \varrho(a_1', q_j), \quad \ldots, \quad \varrho(a_1', r_s)$$

sont rationnels.

Il suffit donc de poser

$$a_1 = a_1', \quad a_2 = p_2, \quad a_3 = q_3, \quad \ldots, \quad a_k = r_k, \quad \ldots,$$

pour obtenir la suite $\{a_n\}$ satisfaisant à la thèse du théorème.

Théorème XI. *E étant un ensemble mesurable, il existe un ensemble P au plus dénombrable composé de points dont les distances mutuelles sont rationnelles, et un ensemble Z de mesure nulle, tels que*

$$P \subset E \subset P' + Z,$$

P' désignant l'ensemble dérivé de P.

Démonstration. Si E est de mesure nulle, le théorème devient évident, en choisissant comme P un ensemble vide et en posant $Z=E$. Supposons donc que la mesure de E soit positive. Considérons *tous* les intervalles dont les deux extrémités sont rationnelles et rangeons-les en une suite infinie $\{\Delta_r\}$; de la suite des ensembles mesurables

$$(11) \qquad \{\Delta_r E\}$$

effaçons tous les termes de mesure nulle et appliquons le th. X à la suite des termes qui restent (il y en a une infinité, car, la mesure de E étant positive, il existe des intervalles Δ_r aussi courts que l'on veut pour lesquels la mesure de $\Delta_r E$ est non nulle). On voit ainsi qu'il existe une suite infinie $\{a_t\}$ de points aux distances rationnelles, tout terme non effacé de (11) contenant un a_t. Soit

$$(12) \qquad P=\{a_t\};$$

il est évident que

$$(13) \qquad P\subset E.$$

Définissons maintenant Z^0 comme l'ensemble de tous les points z de E qui appartiennent au termes *effacés* de la suite (11); comme ces termes sont de mesure nulle, Z^0 l'est également. Considérons la différence $E-Z^0$; soit l un élément de cette différence. Aucun $\Delta_r E$ qui contient l n'a été effacé; donc, tout $\Delta_r E$ contenant l contient aussi un a_t. Choisissons-en une suite infinie $\{\Delta_s\}$ satisfaisant aux conditions $\Delta_s \supset l$ et $\delta_s \to 0$ où δ_s désigne la longueur de Δ_s; nous aurons $\Delta_s \supset l$, $E \supset l$, $\Delta_s E \supset l$, $\Delta_s \supset a_s$ et $a_s \to l$, d'où, en raison de (12), $l\subset P+P'$.

On a donc:

$$(14) \qquad E-Z^0\subset P+P'$$

et

$$(15) \qquad E\subset P'+P+Z^0;$$

en posant par définition $Z=P+Z_0$, (13) et (14) donnent $P\subset E\subset P'+Z$, c. q. f. d.

Remarque. On pourrait généraliser ces théorèmes aux ensembles à plusieurs dimensions. En définissant p. ex. la distance de deux points du plan $(x,y),(\xi,\eta)$ comme identique au point

$$(|x-\xi|, |y-\eta|),$$

on verrait que l'ensemble des distances d'un ensemble de mesure plane positive contient une partie du plan limitée par les demi-axes positives des coordonnées et par une circonférence de rayon suffisamment petit et de centre à l'origine.