Sugli insiemi non misurabili L.

Per

Witold Wilkosz (Cracovia).

Lo studio degli insiemi non misurabili nel senso di Lebesgue è, a mio parere, ancora ben poco sviluppato. I lavori di Lebesgue, Vitali, Van Vleck e di altri autori forniscono soltano degli esempi di insiemi in questione. Nostro modesto scopo sarebbe di esporre alcuni teoremi riguardanti questi insiemi, aprendo cosi la via per una trattazione generale.

§ 1.

Un insieme E non misurabile L è, com'è noto, un insieme la cui *misura esterna* $m_e(E)$ è maggiore della *misura interna* $m_i(E)$. Ecco alcune proprietà relative a tali aggregati:

Teorema I. *Ogni insieme non misurabile E può scindersi in due insiemi F e G disgiunti (cioè senza punti comuni), di modo che:*

(1) *F sia misurabile e* $m(F)=m_i(E)$,

(2) *G non sia misurabile e* $m_i(G)=0$.

Dimostrazione. La misura interna di E è il limite superiore della misura di aggregati perfetti contenuti in E; possiamo quindi trovare una successione di tali aggregati

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \dots$$

per la quale risulti

$$\lim_{m\to\infty} m(F_m)=m_i(E).$$

L'insieme $F=F_1+F_2+\dots+F_m+\dots$ risulta misurabile, ed è

$$m(F)=m_i(E),$$

mentre è chiaro che l'insieme residuo $G=E-F$ ha misura interna nulla e non è misurabile, essendo E non misurabile e F misurabile.

Teorema II. *Se due insiemi E_1 e E_2, entrambi a misura interna nulla, sono rispettivamente contenuti in due insiemi misurabili disgiunti A_1 e A_2, la somma E_1+E_2 ha misura interna nulla e, se uno almeno degli E non è misurabile, la somma è anch'essa non misurabile.*

Dimostrazione. Se $m_i(E_1+E_2)$ fosse positiva, esisterebbe un'insieme perfetto B contenuto in E_1+E_2, anch'esso a misura positiva. La parte comune B_1 di B con E_1, cioè $B \cdot E_1$, sarebbe lo stesso che $B \cdot A_1$, e quindi misurabile; per lo stesso motivo sarebbe misurabile l'insieme

$$B_2 = B \cdot E_2 = B \cdot A_2,$$

e si avrebbe

$$m(B_1) = m(B_2) = 0.$$

Ma allora risulterebbe $m(B_1+B_2) = m(B) = 0$, contro l'ipotesi fatta. L'insieme E_1+E_2 ha dunque misura interna nulla; se è misurabile, è perciò $m_e(E_1+E_2)=0$ e quindi $m_e(E_1)=m_e(E_2)=0$. In tal caso sia E_1 che E_2 sono cioè misurabili.

Corollario ad II. *Lo stesso vale nel caso d'un'infinità numerabile di insiemi E contenuti ciascuno in un insieme misurabile A_i, se tutti gl'insiemi A_i sono disgiunti e contenuti in un intervallo finito.*

Teorema III. *Se E_1 e E_2, uno almeno dei quali non misurabile, sono contenuti rispettivamente in A_1 e A_2, disgiunti e misurabili, anche la somma E_1+E_2 è non misurabile.*

Dimostrazione. Scindiamo E_1 ed E_2, come nel teorema I, in:

$$F_1 + G_1 \quad \text{e} \quad F_2 + G_2.$$

Abbiamo:

$$E_1 + E_2 = F_1 + F_2 + G_1 + G_2.$$

Per il teorema II:

$$m_i(G_1 + G_2) = 0;$$

$G_1 + G_2$ è non misurabile, e lo è quindi anche $E_1 + E_2$.

Corollario ad III. *Lo stesso risultato vale per un'infinità numerabile di insiemi E, se tutti gli A sono disgiunti e contenuti in un intervallo finito.*

***Teorema III**^bis^.* *Sotto le stesse condizioni del teorema III avremo:*

$$m_i(E_1+E_2)=m_i(E_1)+m_i(E_2),$$
$$m_e(E_1+E_2)=m_e(E_1)+m_e(E_2).$$

Dimostrazione. Com'è noto,

$$m_i(E_1+E_2)\geqslant m_i(E_1)+m_i(E_2).$$

Ma, se fosse $m_i(E_1+E_2)>m_i(E_1)+m_i(E_2)$, esisterebbe un insieme B, contenuto in E_1+E_2, tale che

$$m_i(E_1+E_2)\geqslant m(B)>m_i(E_1)+m_i(E_2).$$

E si avrebbe anche in questo caso

$$B_1=B\cdot E_1=B\cdot A_1,$$
$$B_2=B\cdot E_2=B\cdot A_2,$$

entrambi misurabili, e finalmente

$$m(B)=m(B_1)+m(B_2)\leqslant m_i(E_1)+m_i(E_2),$$

ciò che è assurdo.

Per la seconda parte, siano α e β due famiglie d'intervalli aperti, non sovrapposti fra loro in ciascuna famiglia, che coprano rispettivamente A_1 e A_2, e la cui parte comune γ, che è una famiglia dello stesso genere, abbia lunghezza minore di un dato $\varepsilon>0$.

Se risultasse

$$m_e(E_1+E_2)<m_e(E_1)+m_e(E_2),$$

esisterebbe una famiglia δ, come quelle considerate, che coprirebbe la E_1+E_2 e per quale (indicando con $\bar{\delta}$ la lunghezza di δ):

$$\bar{\delta}-m_e(E_1+E_2)<\varepsilon.$$

Siano δ_1 e δ_2 le parti comuni della δ con α e β; allora la parte comune delle δ_1 e δ_2 ha lunghezza $<\varepsilon$, e δ_1 e δ_2 coprono A_1 e A_2. Perciò

$$m_e(E_1)\leqslant\bar{\delta}_1,\qquad m_e(E_2)\leqslant\bar{\delta}_2,$$
$$\bar{\delta}_1+\bar{\delta}_2<\bar{\delta}+\varepsilon,$$

e quindi

$$m_e(E_1)+m_e(E_2)<\bar{\delta}+\varepsilon<m_e(E_1+E_2)+2\varepsilon.$$

Ora, essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario:

$$m_e(E_1) + m_e(E_2) \leqslant m_e(E_1 + E_2).$$

***Corollario ad III**^{bis}.* *Lo stesso vale per un'infinità numerabile delle E_i, se le A_i sono disgiunte e ugualmente limitate.*

§ 2.

Giunti a questo punto, possiamo introdurre il concetto di *punto di non-misurabilità* e dell'insieme di tali punti.

Definizione. Si chiama x *punto di non-misurabilità* per la E, se, in ogni intorno di x, i punti di E che vi cadono formano un insieme non misurabile.

E chiaro che:

1º I punti di tale genere possono esistere solo per una E non misurabile.

2º Ogni tale punto è un punto limite dei punti di E.

L'insieme dei punti di non-misurabilità per la E formano *l'insieme di non-misurabilità* di E; lo denoteremo con $\nu(E)$.

Teorema I. *Ogni insieme non misurabile ammette almeno un punto di non-misurabilità.*

Dimostrazione. Sia E non misurabile, contenuto in un intervallo I. Se ogni punto di I fosse per esso un punto di misurabilità, esisterebbe per ogni x in I un certo intorno δ_x, tale che $\delta_x \cdot E$ sarebbe misurabile.

Tutti i δ_x coprono l'intero intervallo I, e quindi, secondo il teorema di Heine-Borel, esiste un numero finito di essi, e siano gli intervalli

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p,$$

che godono della stessa proprietà.

Sia $E_i = \delta_i \cdot E$ per $i = 1, 2, \ldots, p$; se tutti gli E_i fossero misurabili, allora

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_p$$

sarebbe misurabile, ciò che è contrario alle condizioni supposte.

Teorema II. Per ogni E non misurabile l'insieme $\nu(E)$ è perfetto.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che $\nu(E)$ è *chiuso* e *denso in sè.*

1. $\nu(E)$ è chiuso. Sia x un punto limite di $\nu(E)$; sia δ un suo intorno aperto arbitrario; sia y un punto di $\nu(E)$ che cade in δ, e δ' un intorno di y contenuto in δ.

Allora $E_1 = \delta' \cdot E$ è non misurabile, mentre $E_2 = (\delta - \delta') \cdot E$ può essere misurabile o no, ma in tutti casi

$$E = \delta \cdot E = E_1 + E_2$$

è, secondo il Teorema III del §1, non misurabile; quindi x appartiene a $\nu(E)$.

2. $\nu(E)$ non ha punti isolati. Se x fosse punto isolato di $\nu(E)$, esisterebbe un'intorno (chiuso) di x

$$[x-\varepsilon,\ x+\varepsilon] \qquad (\varepsilon > 0),$$

non contenente alcun punto di $\nu(E)$. Siano:

$$\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > 0 \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$E_n^{(1)} = [x-\varepsilon,\ x-\varepsilon_n] \cdot E, \qquad E_n^{(2)} = [x+\varepsilon_n,\ x+\varepsilon] \cdot E.$$

Poichè in $[x-\varepsilon, x-\varepsilon_n]$ e in $[x+\varepsilon_n, x+\varepsilon]$ non si trova nessun punto di $\nu(E)$, tanto $E_n^{(1)}$ che $E_n^{(2)}$ sono misurabili secondo il Teorema I del §2. Ma

$$E' = E \cdot [x-\varepsilon,\ x+\varepsilon]$$

è la somma di tutte le $E_n^{(1)}$ e $E_n^{(2)}$ più un solo punto x.

Quindi E' è misurabile e x non può appartenere a $\nu(E)$.

Teorema III. I punti di un insieme E non misurabile, non appartenenti a $\nu(E)$, formando un insieme misurabile.

Dimostrazione. Sia $F = E - \nu(E)$. Ogni punto di F è dunque punto di misurabilità. Designamo con $\{\delta_x^{(n)}\}$ una successione d'intorni di x tendenti allo zero, tali che $\delta_x^{(n)} \cdot E$ è misurabile e che nessun punto di $\nu(E)$ cade nell'intervallo $\delta_x^{(n)}$.

Ad ogni punto x di F corrisponde una tale successione di intervalli, e, per il noto teorema di Vitali, si può estrarre dagli intervalli di codeste successioni una successione d'intervalli

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \ldots,$$

tali che al più un insieme di misura nulla dei punti di F resta fuori di essi.

Ogni $E_i = E \cdot \delta_i$ è misurabile, e lo è pertanto

$$E_1 + E_2 + \ldots,$$

che differisce dalla $E - \nu(E)$ al più per un insieme di misura nulla; anche la $E - \nu(E)$ è dunque misurabile.

Teorema IV. *Ogni punto di $\nu(E)$, per una E non misurabile, è punto di misura positiva per $\nu(E)$,* cioè in ogni suo intorno δ la misura di

$$E' = \delta \cdot \nu(E)$$

è positiva.

Dimostrazione. Sia x un punto di $\nu(E)$ e sia δ un suo intorno.

Posto

$$E' = (E - \nu(E)) \cdot \delta, \qquad E'' = (E \cdot \nu(E)) \cdot \delta,$$

secondo il Teorema III, E' è misurabile, ed allora E'' non può essere tale.

Quindi $\nu(E) \cdot \delta$ non può avere misura nulla, perchè contiene in sè la E''.

Corollario ad IV. *Sia $F = E \cdot \nu(E)$; allora:*

1^0 $\nu(F) = \nu(E)$,

2^0 $\nu(E)$ *ha misura positiva,*

3^0 $m(\nu(E)) \geqq m_e(F) = m_e(E \cdot \nu(E))$.

Dimostrazione. Ogni punto di $\nu(F)$, come punto limite di $\nu(E)$, cade in $\nu(E)$ perfetto. Sia x un punto di $\nu(E)$ e δ un suo intorno. Ponendo

$$E_1 = E - \nu(E),$$

si ha

$$\delta \cdot F + \delta \cdot E_1 = \delta \cdot E.$$

Ma essendo $\delta \cdot E_1$ misurabile e $\delta \cdot E$ no, dev'essere $\delta \cdot F$ non misurabile; quindi x appartiene a $\nu(F)$.

Il resto è evidente.

§ 3.

In questo § trattiamo la questione dell'esistenza degli insiemi V non misurabili godenti diverse proprietà.

Teorema I. *Se esiste almeno un insieme non misurabile, allora esiste un tale insieme anche in ogni intervallo.*

Dimostrazione. Sia V un insieme non misurabile contenuto in un intervallo $[a, b]$. Facciamo corrispondere biunivocamente ai punti di $[a, b]$ i punti di un'altro intervallo $[m, n]$, mediante una trasformazione omotetica. Alla V corrisponde allora in $[m, n]$ una V' che, essendo, simile alla V, è nello stesso tempo non misurabile.

Teorema II. *Se esiste almeno un insieme non misurabile V, allora ne esiste anche un'altro V', contenuto in un dato insieme P a misura positiva.*

Dimostrazione. Basta evidentemente dimostrare l'enunciato per un insieme P perfetto non-denso a misura positiva, perchè un tale insieme esiste in ogni insieme misurabile a misura non nulla.

Siano a e b gli estremi di P; l'intervallo $[a, b]$ contiene allora la P. Estraendo quindi da $[a, b]$ la P, rimangono gli intervalli

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots,$$

da ciascuno dei quali possiamo estrarre una P_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ simile alla P. Resteranno ancora gli intervalli

$$\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \ldots, \delta_p^{(1)}, \ldots$$

dai quali potremo estrarre ancora le

$$P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots, P_p^{(1)}, \ldots$$

simili alla P. Ripetendo quest'operazione infinite volte, il nostro $[a, b]$ si spezza in:

(1) $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ simili alla P (fra essi si trova anche la stessa P),

(2) il resto B.

Sia $(b-a)/r$ la misura di P. Nella prima operazione la misura dell' insieme estratto era $(b-a)/r$, nella seconda: $(b-a)\cdot\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{1}{r}$, nella n-esima: $(b-a)\cdot\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{r}$.

Le diverse A_p hanno in comune soltanto un insieme discreto di punti, e quindi

$$m(A_1+\ldots+A_p+\ldots)=\sum_{n=1}^{\infty}(b-a)\cdot\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{r}=b-a,$$

quindi anche

$$m(B)=0.$$

Siano: V un insieme *non misurabile* contenuto in $[ab]$,

$$V_i'=A_i\cdot V \quad \text{e} \quad D=B\cdot V.$$

Allora:

$$m(D)=0,$$

$$V=V_1'+V_2'+\ldots+V_p'+\ldots+D.$$

Almeno una delle V_p' dev'essere non misurabile, e sia ad esempio V_k', cioè l'insieme simile alla P contenuto in A_k. Per la trasformazione omotetica che trasforma la A_k in P, l'insieme V_k' si trasforma in V' contenuto in P; quindi V' è non misurabile.

Teorema III. *Se esiste almeno un insieme non misurabile, ne esiste anche un altro H_1 contenuto in un insieme perfetto e non-denso P' a misura positiva, di cui:*

$$m_e(H_1)=m(P'), \qquad m_i(H_1)=0.$$

Dimostrazione. Sia P perfetto non-denso a misura positiva, e V non misurabile contenuto in esso (esistente per il Teorema II). Scindiamo V (come E nel Teorema I del § 1) in $F+G$ ove

$$m_i(G)=0, \tag{1}$$

$$m_e(G)>0. \tag{2}$$

Sia $H=G\cdot\nu(G)$; allora (per il Corollario ad IV del § 2)

$$m_e(H)\leqslant m(\nu(H)),\quad m_i(H)=0.$$

Sia $m_e(H)<m(\nu(H))$. Sia K un insieme contenuto in $\nu(H)$, contenente H e di cui $m(K)=m_e(H)$; tale è p. es. un insieme Boreliano che misura la H.

Sia P' un insieme perfetto, a misura *non nulla*, contenuto in K e perciò in $\nu(H)$.

K si scinde in $P'+M$ ove $M=K-P'$. D'altra parte H si scinde in H_1+H_2 ove

$$H_1=P'\cdot H,\quad H_2=M\cdot H.$$

Abbiamo:

$$m_e(H_1)\leqslant m(P'),\quad m_e(H_2)\leqslant m(M),$$

$$m_e(H_1)+m_e(H_2)=m_e(H)=m(K)=m(P')+m(M).$$

Quindi:

$$m_e(H_1)=m(P'),\quad m_i(H_1)=0,$$

perchè H_1 è contenuto in G.

Teorema IV. *Se esiste almeno un insieme non misurabile, allora in ogni intervallo* $[a,b]$ *esiste un* E, *tale che:*

$$m_i(E)=0,\quad m_e(E)=b-a.$$

Dimostrazione. Sia H_1 come nel Teorema III, P sia perfetto, gli estremi ne siano m e n. Spezziamo $[m,n]$ come nel Teorema II in:

(1) $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ simili ad P,

(2) il resto B.

Siano $Q_1,Q_2,\ldots,Q_n,\ldots$ gli insiemi simili a H_1 contenuti nei rispettivi A_i $(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$.

Secondo il Corollario ad III$^{\text{bis}}$ del § 1 (sottraendo soltanto gli estremi delle A_i e Q_i):

$$m_e(Q_1+Q_2+\ldots+Q_n+\ldots)=\sum_i m(A_i)=n-m,$$

$$m_i(Q_1+Q_2+\ldots+Q_n+\ldots)=0.$$

Quindi l'insieme $Q=Q_1+Q_2+\ldots$ risponde alla questione in $[m,\ n]$; per omotetia ne otterremo un altro in $[a,b]$.

Corollario ad IV. *Sotto le stesse condizioni, se $a<b$, esiste sempre un insieme E tale che*

$$m_i(E)=a, \qquad m_e(E)=b.$$

Sia E_1 in $[a,b]$ come nel Teorema IV; allora l'insieme

$$E=E_1+[b,b+a]$$

risponde alla domanda.

Teorema V. *Se esiste almeno un insieme non misurabile, dandovisi un insieme L perfetto di cui ogni punto è di misura positiva, esiste H non misurabile, tale che*

$$\nu(H)=L.$$

Dimostrazione. Sia L contenuto in $[a,b]$ e V un insieme di cui:

$$m_e(V)=b-a, \qquad m_i(V)=0.$$

Sia poi

$$V_L=V\cdot L.$$

Dico che

$$\nu(V_L)=L.$$

È chiaro che in ogni intervallo δ di $[a,b]$

1⁰ $\delta\cdot V$ non è misurabile,

2⁰ $m_e(V\cdot\delta)=\overline{\delta}$ (= lunghezza di δ).

Sia δ un intorno di un punto x di L e

$$E_1=\delta\cdot V_L, \qquad E_2=\delta\cdot(V-V_L).$$

Allora:

$$m_i(E_1)=m_i(E_2)=0,$$

$$m_e(E_1)+m_e(E_2)=m_e(V\cdot\delta)=\overline{\delta}.$$

Ma:

$$m_e(E\ )\leqslant m(L\cdot\delta), \qquad m_e(E_2)\leqslant m(\delta-L\cdot\delta);$$

quindi, poichè

$$m(L\cdot\delta)+m(\delta-L\cdot\delta)=\overline{\delta},$$

ne risulta

$$m_e(E_1)=m(L\cdot\delta)>0,$$

x essendo un punto di misura non nulla (come punto di L).

Allora $E_1 = \delta \cdot V_L$ non è misurabile ed ogni punto di L è punto di $\nu(V_L)$. Ma, essendo L perfetto come $\nu(V_L)$, i due insiemi sono uguali.

Ora: *esiste almeno un insieme non misurabile* L. Un tale è dato per l'esempio da Vitali o Van Vleck. E quindi tutti i teoremi del § 3 diventano assertorici e non condizionali.

Voglio infine avvertire che alla dimostrazione di parecchi teoremi del § 2 sono pervenuto nel corso di conversazioni col mio amico S. Banach.