Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer *sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo et sans l'aide des nombres transfinis* le théorème suivant sur la structure des ensembles de points dans l'espace euclidien à m dimensions:

Théorème 1. *Tout ensemble de points P* (situé dans l'espace euclidien à m dimensions) *se décompose en une somme de deux ensembles*

$$P = C + D, \tag{1}$$

dont l'ensemble C (s'il n'est pas vide) est clairsemé[1]) *et effectivement énumérable, et l'ensemble D (s'il n'est pas vide) est dense en soi.*

Une démonstration de ce théorème, démonstration qui ne s'appuie pas sur l'axiome de M. Zermelo, mais utilise les nombres transfinis, a été donnée par moi sur une autre place[2]).

Il est évident que pour établir le théorème 1, il suffit de démontrer les deux théorèmes suivants:

[1]) On appelle *clairsemé* un ensemble qui ne contient aucun sous-ensemble dense en soi.

[2]) Voir ma note *Sur la démonstration du théorème de Cantor-Bendixson et sur l'énumération des points séparés d'un ensemble,* Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar LIX, 1916-1917, Afd. A, Nr. 17.

Théorème 1a. *Tout ensemble de points P se décompose en une somme* (1), *où C est un ensemble clairsemé (ou vide) et D un ensemble dense en soi (ou vide).*

Théorème 1b. *Tout ensemble clairsemé est effectivement énumérable.*

Le théorème 1a se démontre aisément sans l'axiome du choix et sans nombres transfinis [1]). En effet, si P est clairsemé, le théorème 1a est évidemment vrai. Si P n'est pas clairsemé, il existe des sous-ensembles de P denses en soi. Désignons leur somme par D. L'ensemble D (le *noyau* de P) est évidemment dense en soi [2]) (c'est le plus grand ensemble dense en soi contenu dans P) et l'ensemble $C=P-D$ ne contient aucun ensemble dense en soi (puisque tout sous-ensemble dense en soi de C serait en même temps un sous-ensemble dense en soi de P, donc un sous ensemble de D).

Remarquons que l'ensemble D est fermé dans P, c. à d. $PD' \subset D$). En effet, on a par définition $D \subset P$ et, D étant dense en soi, $D \subset D'$, d'où $D \subset PD'$. Or, tout point de PD' est un point de D', c. à d. un point d'accumulation de D, donc aussi, d'après $D \subset PD'$, un point d'accumulation de PD'. L'ensemble PD' est donc dense en soi, d'où, selon la définition de D, $PD' \subset D$, c. q. f. d. (On voit même que $PD'=D$.)

Pour établir le théorème 1b, nous démontrerons d'abord le suivant

Lemme. *On peut déterminer effectivement une fonction φ qui fait correspondre à tout ensemble clairsemé C un point isolé $p=\varphi(C)$ de cet ensemble.*

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig 1914, p. 226, et A. Denjoy, Journ. de Math. (7e série) I (1915), p. 240.

[2]) Il est indifférent, pour la démonstration du théorème 1a sans l'aide de l'axiome du choix, laquelle des deux définitions de l'ensemble dense en soi est adoptée (celle qui est fondée sur la considération de l'entourage ou celle qui est basée sur la considération des suites infinies). Or, pour démontrer sans l'axiome de M. Zermelo le théorème 1b (et le lemme qui le précède), il faut entendre par un ensemble dense en soi un ensemble dont tout point est son point d'accumulation, et par un point d'accumulation d'un ensemble P un point p de P dont tout entourage contient des points de P, autres que p. Cf. mon mémoire *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse,* Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Mai 1918, p. 119.

Démonstration. L'ensemble des toutes les sphères dont les centres ont des coordonnées rationnelles et dont les rayons sont rationnels, est, comme on sait, effectivement énumérable: nous pouvons donc déterminer effectivement une suite infinie

$$(2) \qquad S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

formée de toutes ces sphères.

Soit C un ensemble clairsemé. Je dis qu'il existe dans la suite (2) au moins une sphère S qui contient à son intérieur un et un seul point de C. En effet, on voit sans peine que si toute sphère de la suite (2) qui contient à son intérieur un point de C en contenait nécessairement davantage, tout point de C serait un point d'accumulation de cet ensemble et C serait dense en soi, contrairement à l'hypothèse.

Soit S_n la première sphère de la suite (2) contenant à son intérieur un seul point de C; soit p ce point. Posons $\varphi(C)=p$. C'est évidemment un point isolé de C. La fonction φ ainsi définie satisfait donc à la thèse du lemme, c. q. f. d.

Soit maintenant C un ensemble clairsemé donné. Posons $p_0=\varphi(C)$ et considérons toutes les familles K dont les éléments sont des sous-ensembles de C qui jouissent des trois propriétés suivantes:

1) L'ensemble formé du seul élément p_0 appartient à K,

2) La somme d'ensembles qui appartiennent à K appartient à K,

3) Si l'ensemble $E \dotplus C$ appartient à K, l'ensemble qui s'obtient en ajoutant à E le point $\varphi(C-E)$ appartient à K.

On voit sans peine qu'il existe des ensembles K satisfaisant à ces trois conditions: p. ex. la famille K' de tous les sous-ensembles de C qui contiennent p_0. Soit K_0 la partie commune de toutes les familles K satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3). On voit sans peine que, en vertu de 1), la famille K_0 n'est pas vide et aussi qu'elle satisfait elle-même aux conditions 1), 2) et 3). Or, K' satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3), nous avons (d'après la définition de K_0) $K_0 \subset K'$, de sorte que tout ensemble E de K_0 contient le point p_0.

Désignons par K_1 la famille de tous les ensembles E de K_0 pour lesquels, G étant un ensemble quelconque de K_0, on a au moins l'une de formules $E \subset G$ et $G \subset E$.

En répétant avec des modifications évidentes le raisonnement qui a été employé par M. Zermelo dans sa seconde démonstration du théorème qui porte son nom [1]) (notamment la raisonnement qui sert à démontrer que tout élément de la chaîne de M. Zermelo est un élément *normal*), on peut démontrer sans l'axiome du choix que $K_1=K_0$.

De l'égalité $K_1=K_0$, il résulte tout de suite (d'après la définition de K_1) que des deux ensembles appartenant à K_0 l'un est toujours contenu dans l'autre.

Etant donné à présent un point $p\neq p_0$ de l'ensemble C, désignons par E_p la somme de tous les ensembles E de K_0 qui ne contiennent pas le point p. De tels ensembles E existent, puisque K_0 satisfait à la condition 1) et $p\neq p_0$; l'ensemble E_p est donc non vide. Or, comme une somme d'ensembles qui appartiennent à K_0, l'ensemble E_p appartient à K_0 (d'après la propriété 2) de K_0).

Je dis que, pour tout point $p\neq p_0$ de C, on a

$$\varphi(C-E_p)=p. \tag{3}$$

En effet, supposons que $\varphi(C-E_p)\neq p$ pour un point $p\neq p_0$ de C et désignons par E'_p l'ensemble qu'on obtient, en ajoutant $\varphi(C-E_p)$ à E_p. D'après la propriété 3) de K_0, E'_p appartient à K_0. Or, E_p ne contient pas p et $\varphi(C-E_p)\neq p$; donc E'_p ne contient pas p. D'après la définition de E_p, on a donc $E'_p\subset E_p$, de sorte que $\varphi(C-E_p)$ appartient à E_p, ce qui est impossible, puisque $\varphi(C-E_p)$ est un point de $C-E_p$. La formule (3) est ainsi établie.

Soient maintenant p' et $p''\neq p'$ deux points de C, différents de p_0. Les ensembles $E_{p'}$ et $E_{p''}$ appartiennent donc tous les deux à K_0. Par conséquent (d'après la propriété démontrée de K_0) l'un d'eux est contenu dans l'autre; p. ex. $E_{p'}\subset E_{p''}$. Or, il s'en suit de la définition des ensembles E_p que $E_{p''}$ ne contient pas le point p''. Donc $E_{p'}$ ne contient p'' non plus, et par suite $p''\subset C-E_{p'}$. S'il était $E_{p''}\subset E_{p'}$, nous trouverions $p'\subset C-E_{p''}$.

---

[1]) Math. Ann. 65, p. 107. Cf. aussi F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 136—137.

On a donc, pour deux points p' et $p'' \neq p'$ de C, distincts de p_0, l'une au moins des formules:

$$(4) \qquad p'' \subset C - E_{p'}, \qquad p' \subset C - E_{p''}.$$

Soit maintenant p un point donné de C, autre que p_0. Selon (3) et d'après la définition de la fonction φ, il existe dans la suite (2) la première sphère S_n telle que p est le seul point de l'ensemble $C - E_p$, intérieur à S_n. L'indice n est ainsi bien déterminé par le point p; désignons-le par $n(p)$. A tout point p de C, autre que p_0, correspond ainsi un nombre naturel déterminé $n(p)$.

Je dis que $p' \neq p''$ entraîne $n(p') \neq n(p'')$. En effet, en supposant que $p' \neq p''$ et $n(p') = n(p'') = n$, la sphère S_n contiendrait à son intérieur le seul point p' de l'ensemble $C - E_{p'}$ et le seul point p'' de l'ensemble $C - E_{p''}$. Or, comme nous avons démontré plus haut, pour deux points p' et $p'' \neq p'$ de C, autres que p_0, l'une au moins des formules (4) se présente. La formule $p'' \subset C - E_{p'}$ est impossible, puisque S_n contiendrait alors à son intérieur deux points de $C - E_{p'}$: p' et p''. De même, il est impossible que l'on ait $p' \subset C - E_{p''}$, puisque S_n contiendrait alors à son intérieur p' et p'', donc deux points de $C - E_{p''}$. On a donc bien $n(p') \neq n(p'')$.

Il est ainsi démontré qu'à tout point p de C, autre que p_0, correspond un nombe naturel $n(p)$ bien défini (par C et par p) et qu'aux points p différents correspondent des nombres $n(p)$ différents. En ordonnant les points $p \neq p_0$ de C d'après la grandeur des nombres $n(p)$ correspondants, nous aurons donc une suite (finie ou infinie) bien déterminée: $p_1, p_2, p_3, \ldots$, et il est bien évident que la suite

$$(5) \qquad p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$$

contient tout point p de C une et une seule fois.

La suite (5) ne dépendant que de l'ensemble C, il est ainsi établi que *tout ensemble clairsemé est effectivement énumérable*; nous avons donné, en effet, une loi d'une telle énumération qui s'applique à tous les ensembles clairsemés. Le théorème 1*b* est donc démontré, ce qui achève en même temps la démonstration du théorème 1.

Supposons, en particulier, que l'ensemble P est fermé. Nous avons montré plus haut que l'ensemble D (à savoir le plus grand sous-ensemble dense en soi de P), s'il n'est pas vide, est fermé dans P. Donc, lorsque P est fermé, D l'est aussi; comme dense en soi et fermé, D est donc parfait. Nous arrivons ainsi au

Théorème 2. *Tout ensemble fermé P est une somme d'un ensemble clairsemé effectivement énumérable (ou vide) et d'un ensemble parfait (ou vide).*

Nous avons donc prouvé que le théorème de Cantor-Bendixson peut être démontré sans l'aide de l'axiome de M. Zermelo et sans nombres transfinis. A mon avis, c'est la première démonstration de ce genre du théorème en question.

Supposons maintenant que P est fermé et dénombrable. Le noyau D de P est alors vide (puisque, autrement, D serait parfait et aurait la puissance du continu, ce qui est impossible, lorsque P est dénombrable). Nous en concluons que $P=C$ et obtenons ce

Théorème 3. *Tout ensemble fermé dénombrable est effectivement énumérable.*