of the positive ones in the formulae (35), (37), (38), (42), (43), (45) we obtain random variables belonging to $\mathcal{Y}_*^{**}$.

9. Particular cases. We shall now list the specifications which are to be made in order to see the connection of our considerations with probability distributions encountered in mathematical statistics.

a. If we put $a_1 = a_2 = 1/2$, $p_1 = m/2$, $p_2 = n/2$, $q_1 = q_2 = 1$ in (1) and (2), then Z_1 and Z_2 will have chi-square distributions with m and n degrees of freedom, respectively, and $\frac{n}{m} U$ will have Snedecor's F distribution with (m, n) degrees of freedom.

b. If we put $a_1 = p_1 = q_1 = q_2 = 1/2$, $a_2 = p_2 = n/2$ in (1) and (2), then Z_1^* will be normal with zero mean and unit variance, nZ_2^2 will have chi-square distribution with n degrees of freedom and $U^* = Z_1^* : Z_2$ will have Student distribution with n degrees of freedom.

c. If we put $a_1 = a_2 = p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1/2$ in (1) and (2), then Z_1^* and Z_2^* will be normally distributed with zero mean and unit variance and $U^{**} = Z_1^* : Z_2^*$ will have Cauchy distribution.

REFERENCES

[1] H. Bateman, *Higher transcedental functions*, vol. I, New York 1953.

[2] B. Epstein, *Some application of the Mellin transform in statistics*, Annals of Mathematical Statistics 19 (1948), p. 370-379.

[3] I. Kotlarski, *On random variables whose quotient follows the Cauchy law*, Colloquium Mathematicum 7 (1960), p. 277-284.

[4] R. G. Laha, *An example of a non-normal distribution where the quotient follows the Cauchy law*, Proceedings of the National Academy of Sciences 44 (1958), No 2, p. 222-223.

[5] — *On a class of distribution functions where the quotient follows the Cauchy law*, Transactions of the American Mathematical Society 93 (1959), p. 205-215.

[6] — *On the laws of Cauchy and Gauss*, Annals of Mathematical Statistics 30 (1959), p. 1165-1174.

[7] J. G. Mauldon, *Characterizing properties of statistical distributions*, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, 2.7 (1956), p. 155-160.

[8] G. P. Steck, *A uniqueness property not enjoyed by the normal distribution*, Annals of Mathematical Statistics 29 (1958), p. 604-606.

[9] В. М. Золотарев, *Преобразования Меллина-Стильтьеса в теории вероятностей*, Теория вероятностей и ее применения 2 (1957), No 4, p. 444-469.

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1960

P R O B L È M E S

P 235, R 2. M. Fréchet, l'auteur du problème (1), vient de signaler qu'il l'a résolu par la négative (2) et que l'espace en question n'est que ce qu'il appelle un *semi-espace de Banach* (3).

VI, p. 36; VIII, p. 289.

(1) envisagé par lui dans les publications: *Sur deux problèmes d'Analyse non résolus*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 33-40, *Supplément à l'article „Sur deux problèmes d'Analyse non résolus"*, ibidem 7 (1960), p. 201-204, *L'espace des courbes est-il un espace de Banach?*, Buletinul Institutului Politechnic din Iași 5 (IX) (1959), p. 31-34, et *L'espace des courbes est-il un espace de Banach?*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris 250 (1960), p. 248 et 249.

(2) M. Fréchet, *L'espace des courbes n'est pas un espace de Banach*, ibidem 250 (1960), p. 2787-2790, et *Simplification d'une démonstration donnée dans une Note précédente*, ibidem 251 (1960), p. 9.

(3) M. Fréchet, *L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach*, ibidem 251 (1960), p. 1258-1260, et *Exemples de semi-espaces de Banach*, ibidem 251 (1960), p. 1702-1703.

P 309, R 1. La réponse est négative (1).

VII.2, p. 311.

(1) A. Pełczyński and V. N. Sudakov, *Remark on non-complemented subspaces of the space m(S)*, Colloquium Mathematicum, ce fascicule, p. 85-88.

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

P 348. Formulé dans la communication de L. Szamkołowicz, *Remarks on the Cartesian products of two graphs*.

Ce fascicule, p. 47.

A. D. WALLACE (NEW ORLEANS, La.)

P 349. Formulé dans la communication *A local property of pointwise periodic homeomorphisms*.

Ce fascicule, p. 65.

A. LELEK (WROCŁAW)

P 350. Formulé dans la communication *On compactifications of some subsets of Euclidean spaces.*

Ce fascicule, p. 83.

A. PEŁCZYŃSKI (VARSOVIE) et V. N. SUDAKOV (LENINGRAD)

P 351. Formulé dans la communication *Remark on non-complemented subspaces of the space $m(S)$.*

Ce fascicule, p. 88.

A. ROTKIEWICZ (VARSOVIE)

P 352, 353 et 354. Formulés dans la communication *Sur quelques généralisations des nombres pseudopremiers.*

Ce fascicule, p. 112 et 113

S. HARTMAN (WROCŁAW)

P 355. Soit $f(x)$ une fonction complexe définie sur l'axe réel et telle que la limite

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

existe pour tout λ réel.

Est-ce que $\sum_{\lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$ est la série de Fourier d'une fonction presque périodique

1° S^p (au sens de Stiepanoff) en admettant que

$$\sup_x \int_x^{x+1} |f(x)|^p dx < \infty \quad \text{pour un } p \geqslant 1?$$

2° W^p (au sens de Weyl) en admettant que

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \sup_x \int_x^{x+T} |f(x)|^p dx < \infty \quad \text{pour} \quad \text{un } p \geqslant 1?$$

P 355, R 1. Urbanik a démontré (¹) qu'en admettant

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^p dx < \infty,$$

(¹) K. Urbanik, *Fourier analysis in Marcinkiewicz spaces*, Studia Mathematica 21 (1961), p. 93-102.

la réponse pour les fonctions presque périodiques B^p (au sens de Besikovitch) est affirmative lorsque $p > 1$ et négative lorsque $p = 1$.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 520, 23. X. 1961

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

P 356. Let R be the real axis, $A = R - B$, and both A and B infinite. Does there exist a translation τ such that $A \cap \tau B$ is infinite?

The answer is positive if A is Lebesgue measurable.

New Scottish Book, Probl. 482, 17. II. 1960.

P 357. Let F be a closed subset of the n-dimensional sphere S_n $(n > 1)$, $\dim F \leqslant n-1$, $S_n - F$ a connected set and f a continuous mapping of S_n into S_n such that the partial mapping $f | S_n - F$ is a local homeomorphism.

Must then $f | S_n - F$ be a homeomorphism and $f(S_n) = S_n$?

The question is open even if F is a one point set $\{p\}$.

New Scottish Book, Probl. 477, 17. II. 1960 et 541, 12. IV. 1961.

P 357, R 1. Lelek has shown (²) that in the case $F = \{p\}$ the conjecture holds true if one assumes additionally that $f(S_n - \{p\}) \subset S_n - \{p\}$.

It is easy to see that if $\dim f(F) \leqslant n-1$ and $S_n - f(F)$ is a connected set, then $f(S_n) = S_n$, e. g. if F is at most denumerable (³).

(²) A. Lelek and Jan Mycielski, *Some conditions for a mapping to be a covering*, Fundamenta Mathematicae 49 (1961), p. 295-300.

(³) See M. Reichbach, *Generalization of the fundamental theorem of algebra*, The Bulletin of the Research Council of Israel, Section F, 7 (1958), p. 155-164.

P 358. Let F be a closed 0-dimensional subset of the Euclidean space $\mathscr{E}^3$. Is then the set $\mathscr{E}^3 - F$ simply connected in the sense of Chevalley (⁴)?

New Scottish Book, Probl. 503, 3. V. 1960.

(⁴) See C. Chevalley, *Theory of Lie groups, I*, Princeton 1946, p. 44. See also (²).

P 359. Let $m \geqslant n$, and let $f(m, n)$ be the maximal number of edget which can occur in a graph with m vertices containing no closed circuis with less than n edges.

What is the asymptotic behaviour of the function $f(m, n)$?

In the special case if n is of the forme $n = 3l \leqslant k+(l-1)\binom{k}{2}$, it can be proved that

$$f\left(k+(l-1)\binom{k}{2}, 3l\right) \geqslant l\binom{k}{2}.$$

Other special case: it follows from a result of Turán [5] that

$$f(m, 4) = \left[\frac{m}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{m}{2}\right]\left(\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]\right),$$

where $\left[\frac{m}{2}\right]$ denotes the integral part of $\frac{m}{2}$.

New Scottish Book, Probl. 348, 14. V. 1957 and 454, 27. II. 1959.

([5]) P. Turán, *On the theory of graphs*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 19-30, see especially p. 20, formula (2).

A. C. OFFORD (LONDON)

Suppose that $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ are real independent random variables with the same distribution function and expectation zero, and that $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are real numbers with the sum $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 = 1$. Then if $F(x)$ is the distribution function of $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \xi_\nu$ and $\Phi(x)$ the Gaussian distribution function with expectation 0 and variance 1, it can be shown, e. g. by Berry's theorem [6] that

$$\sup_x |F(x)-\Phi(x)| \leqslant 2\frac{E(|\xi|^3)}{E(|\xi|^2)} \max_{1\leqslant\nu\leqslant n} |a_\nu|.$$

P 360. Find a corresponding result when $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are complex numbers, and in consequence F and Φ are bi-variate distribution functions, although ξ_n is real.

New Scottish Book, Probl. 527, 1. XII. 1960.

([6]) A. C. Berry, *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates*, Transactions of American Mathematical Society 49 (1941), p. 122-136.

K. URBANIK (WROCŁAW)

P 361. On appelle *algèbre avec valeur absolue* („absolute-valued algebra") tout espace linéaire normé contenant le corps des nombres réels

et dans lequel une multiplication · des éléments est définie qui est distributive relativement à l'addition et telle que l'on a $\|x\cdot y\| = \|x\|\cdot\|y\|$ pour tous les x et y (l'associativité de cette multiplication n'étant pas requise). Une algèbre avec valeur absolue est dite *réelle* lorsqu'on a en outre $\|x^2+y^2\| \geqslant \|x^2\|$ pour tous les x et y.

Est-ce que toute algèbre réelle avec valeur absolue est isomorphe au corps des nombres réels?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 531, 28. II. 1961.

J.-P. KAHANE (PARIS)

P 362. À quelle condition, portant sur la suite d'entiers $\{\lambda_n\}$, les fonctions continues dont la série de Fourier est du type $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ sont-elles soit partout indéfiniment dérivables, soit partout (c'est-à-dire sur tout intervalle) non indéfiniment dérivables?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 533, 8. IV. 1961.

P 363. Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ des suites telles que $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n \cos nx \tag{1}$$

est presque sûrement la série de Fourier d'une fonction continue (les signes + et − étant également probables et indépendants en bloc), en est-il de même de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm b_n \cos nx\,? \tag{2}$$

Il est facile de voir que la réponse est affirmative si l'on remplace (1) et (2) respectivement par des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\Phi_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx+\Phi_n),$$

dans lesquelles les Φ_n sont des phases aléatoires, équiparties sur le segment $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et indépendantes en bloc.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 534, 8. IV. 1961.

A. PEŁCZYŃSKI (VARSOVIE)

P 364. Soient X un espace linéaire métrique complet, Y un sous-espace linéaire fermé de X et X/Y l'espace-quotient.

Est-ce que X est homéomorphe au produit cartésien $(X/Y)\times Y$?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 544, 14. IV. 1961.

P 364, R 1. D'après un théorème de Bartle et Graves (7), la réponse est affirmative pour les X localement convexes.

(7) R. G. Bartle and L. M. Graves, *Mappings between function spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 72 (1952), p. 400-413.

P 365. L'espace S de toutes les fonctions mesurables, définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ (avec la convergence asymptotique), est-il homéomorphe à l'espace de Hilbert l_2?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 545, 14. IV. 1961.

P 366. Désignons par $C_R(Q)$ l'espace métrique de toutes les fonctions continues, définies sur Q et ayant leurs valeurs dans R, la distance y étant définie par la formule $\varrho(f,g) = \sup\limits_{q\epsilon Q} \varrho_R[f(q), g(q)]$.

Soient R un rétracte absolu métrique compact et Q_1, Q_2 deux espaces métriques compacts infinis. Est-ce que les espaces $C_R(Q_1)$ et $C_R(Q_2)$ sont homéomorphes?

La réponse est affirmative lorsque R est convexe.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 546, 14. IV. 1961.

P 367. Dans les mêmes notations: si R est une dendrite en forme de $\top$ et Q est un espace métrique compact infini, $C_R(Q)$ est-il homéomorphe à l'espace de Hilbert?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 547, 14. IV. 1961.

P 368. Soient X et Y des espaces de Banach entre lesquels il existe une homéomorphie h réciproquement lipschitzienne, c'est-à-dire telle que $A\|x_1-x_2\| \leqslant \|hx_1-hx_2\| \leqslant B\|x_1-x_2\|$ pour tout couple x_1, x_2 de points de X et pour des constantes A et B positives, qui dépendent de h.

Y a-t-il alors une homéomorphie linéaire entre X et Y?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 548, 14. IV. 1961.

P 369. Une suite $\{e_n\}$ de points d'un espace linéaire X s'appelle *base commutative* de X lorsque tout $x \epsilon X$ peut s'écrire d'une manière univoque sous la forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$, cette série étant commutativement convergente.

Est-ce que tout espace de Banach à une infinité de dimensions contient un sous-espace linéaire fermé à autant de dimensions et ayant une base commutative?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 549, 14. IV. 1961.

B. KNASTER (WROCŁAW)

P 370. Appelons *dendroïde* tout continu connexe par arcs et dont tout sous-continu est unicohérent.

Existe-t-il un dendroïde tel que tout dendroïde en est une image continue?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 519, 24. X. 1961.