n sufficiently large,

$$\frac{k^2}{2}(1-.0692) > n,$$

and Riddell [3] proved

$$\frac{k^2}{2}(1-.1329) > n.$$

If we define a restricted h-basis for n to be an h-basis for n in which no element exceeds n/h, then we have

$$\frac{k^h}{h!}\left(1-\left((1-\varepsilon)\cos\frac{\pi}{h}\right)^h\right) > n \tag{14}$$

for n sufficiently large. This follows directly from (8) and (10) with $p = 0$.

Notice that Rohrbach himself considered only bases composed of integers. Then we require $[(n+h-1)/h]$ here instead of n/h. Formula (14) still follows, but not simply by putting $p = 0$ in (10).

REFERENCES

[1] L. Moser, *On the representation of* $1, 2, \ldots, n$ *by sums*, Acta Arithmetica 6 (1960), p. 11-13.

[2] H. Ostmann, *Additive Zahlentheorie*, Part I, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956.

[3] J. Riddell, *Master's Thesis*, University of Alberta.

[4] H. Rohrbach, *Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie*, Mathematische Zeitschrift 42 (1937), p. 1-30.

[5] A. Stöhr, *Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, I*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 194 (1955), p. 40-65.

UNIVERSITY OF ALBERTA

Reçu par la Rédaction le 9. 10. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE K. ZARANKIEWICZ SUR LES SUITES DE PUISSANCES CONSÉCUTIVES DE NOMBRES IRRATIONNELS

(*DÉDIÉ À LA MÉMOIRE DE K. ZARANKIEWICZ*)

PAR

A. SCHINZEL (VARSOVIE)

K. Zarankiewicz a posé le problème: existe-il un nombre irrationnel q tel qu'on puisse extraire de la suite $q, q^2, \ldots$ quatre termes formant une progression arithmétique? (cf. [2], p. 44, P 115).

La réponse négative à ce problème (même quand on admet q complexe, les quatre termes correspondants étant distincts) est une conséquence immédiate du théorème 2, qui va suivre.

En appliquant la méthode ingénieuse de W. Ljunggren [1], le théorème suivant sera d'abord établi:

THÉORÈME 1. *Les nombres n et m étant des entiers tels que $n > m > 0$ et $n \neq 2m$, le polynôme*

$$g(x) = \frac{x^n - 2x^m + 1}{x^{(n,m)} - 1}$$

est irréductible, à l'exception des cas $n = 7k$, $m = 2k$ et $n = 7k$, $m = 5k$, dans lesquels $g(x)$ est un produit de deux facteurs irréductibles, à savoir

$$(x^{3k} + x^{2k} - 1)(x^{3k} + x^k + 1) \quad \textit{et} \quad (x^{3k} + x^{2k} + 1)(x^{3k} - x^k - 1)$$

respectivement.

LEMME. *Soit*

$$f(x) = x^n - 2x^m + 1 = \varphi_r(x)\psi_s(x) \quad \textit{où} \quad r+s = n, \tag{1}$$

$\varphi_r(x)$ et $\psi_s(x)$ étant des polynômes normés de degré r et s respectivement, et aux coefficients entiers. Soit en outre

$$\langle 7k, 2k\rangle \neq \langle n, m\rangle \neq \langle 7k, 5k\rangle.$$

Alors au moins l'un des deux facteurs de (1) est un polynôme réciproque.

Démonstration du lemme. Il suffit de considérer le cas où $n>2m$. En posant

$$(2)\qquad f_1(x)=x^r\varphi_r(x^{-1})\psi_s(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^{n-i}\quad\text{et}\quad f_2(x)=x^s\psi_s(x^{-1})\varphi_r(x),$$

il vient

$$(3)\qquad f_2(x)=x^nf_1(x^{-1})=\sum_{i=0}^{n}c_{n-i}x^{n-i},$$

$$(4)\qquad f_1(x)f_2(x)=(x^n-2x^m+1)(x^n-2x^{n-m}+1).$$

En comparant les coefficients de x^{2n} et de x^n dans (2) et (3), nous trouvons $c_0c_n=1$ et $c_0^2+c_1^2+c_2^2+\dots+c_n^2=6$, d'où

$$(5)\qquad c_n=c_0=\pm1\quad\text{et}\quad c_1^2+c_2^2+\dots+c_{n-1}^n=4.$$

Il résulte de (5) que deux cas sont possibles:

Cas I. L'un des nombres c_i, où $i=1,2,\dots,n-1$, soit c_k, est égal à ±2 et les autres sont égaux à 0.

Cas II. Quatre des nombres c_i, soit c_{k_1},c_{k_2},c_{k_3} et c_{k_4}, où $k_1<k_2<k_3<k_4$, sont égaux à ±1 et les autres sont égaux à 0.

Considérons ces deux cas successivement.

Dans le cas I, on peut admettre sans restreindre la généralité que $n\geqslant 2k$. On a d'après (2) et (3) pour le polynôme réciproque $f_1(x)f_2(x)$

$$(6)\qquad f_1(x)f_2(x)=x^{2n}+c_0c_kx^{2n-k}+c_0c_kx^{n+k}+6x^n+c_0c_kx^{n-k}+c_0c_kx^k+1$$

et d'après (4)

$$(7)\qquad f_1(x)f_2(x)=x^{2n}-2x^{2n-m}-2x^{n+m}+6x^n-2x^{n-m}-2x^m+1.$$

En comparant (6) à (7), on trouve $k=m$ et $c_0c_k=-2$, d'où

$$f_2(x)=c_0(x^n-2x^m+1)=c_0f(x)\quad\text{et}\quad x^s\psi_s(x^{-1})=c_0\psi_s(x);$$

ainsi $\psi_s(x)$ est un polynôme réciproque.

Dans le cas II, on peut admettre sans restreindre la généralité que $n\geqslant k_1+k_4$. Alors le polynôme réciproque $f_1(x)f_2(x)$ se réduit d'après (2) et (3) à la somme

$$(8)\qquad \begin{aligned} f_1(x)f_2(x)&=x^{2n}+c_0c_{k_4}x^{n+k_4}+c_0c_{k_3}x^{n+k_3}+c_0c_{k_2}x^{n+k_2}+\\ &+c_0c_{k_1}x^{n+k_1}+c_0c_{k_1}x^{2n-k_1}+c_{k_1}c_{k_4}x^{n+k_4-k_1}+c_{k_1}c_{k_3}x^{n+k_3-k_1}+\\ &+c_{k_1}c_{k_2}x^{n+k_2-k_1}+c_0c_{k_2}x^{2n-k_2}+c_{k_2}c_{k_4}x^{n+k_4-k_2}+c_{k_2}c_{k_3}x^{n+k_3-k_2}+\\ &+c_0c_{k_3}x^{2n-k_3}+c_{k_3}c_{k_4}x^{n+k_4-k_3}+c_0c_{k_4}x^{2n-k_4}+6x^n+\dots \end{aligned}$$

En comparant (7) à (8), on constate que chaque exposant se présente dans (8) un nombre pair de fois. L'exposant $2n-k_1$ n'apparaissant qu'une seule fois lorsque $2n-k_1>n+k_4$, on a donc $2n-k_1=n+k_4$, d'où $k_4=n-k_1$. On peut admettre sans restreindre la généralité que $n\geqslant k_2+k_3$. La condition que l'exposant $\max(n+k_3,\, n+k_4-k_1,\, 2n-k_2)$ figure dans la somme (8) nécessairement un nombre pair de fois entraîne deux possibilités: 1° $k_3=n-k_2$ et $k_2<2k_1$, 2° $k_2=2k_1$ et $k_3<n-2k_1$.

Considérons ces deux possibilités successivement.

Dans 1°, les relations

$$\min(n+k_4,\, n+k_3,\, 2n-k_1,\, 2n-k_2)>n+k_4-k_1>$$
$$>\max(n+k_3-k_1,\, n+k_2-k_1,\, n+k_4-k_2,\, n+k_3-k_2,\, n+k_4-k_3),$$
$$n+k_2=2n-k_3\quad\text{et}\quad n+k_1=2n-k_4$$

entraîneraient que l'exposant $n+k_4-k_1$ doit se présenter un nombre impair de fois, ce qui vient d'être constaté comme impossible.

Dans 2°, les relations

$$\min(n+k_4,\, n+k_3,\, n+k_2,\, 2n-k_1,\, n+k_4-k_1,$$
$$n+k_3-k_1,\, 2n-k_2,\, n+k_4-k_2,\, 2n-k_3,\, n+k_4-k_3)>$$
$$>n+k_1=n+k_2-k_1=2n-k_4$$

entraînent que $n+k_1=n+k_3-k_2$, d'où $k_3=3k_1$. On a maintenant

$$n+k_4=2n-k_1,\quad n+k_2=n+k_3-k_1,$$
$$n+k_1=n+k_2-k_1=n+k_3-k_2=2n-k_4,$$
$$n+k_4-k_1=2n-k_2\quad\text{et}\quad n+k_4-k_2=2n-k_3.$$

Il en résulte que $n+k_3=n+k_4-k_3$, c'est-à-dire

$$n=k_1+k_4=k_1+2k_3=7k_1$$

et (8) se réduit à la forme

$$(9)\qquad \begin{aligned} f_1(x)f_2(x)&=x^{14k_1}+(c_0c_{k_4}+c_0c_{k_1})x^{13k_1}+\\ &+(c_{k_1}c_{k_4}+c_0c_{k_2})x^{12k_1}+(c_0c_{k_3}+c_{k_2}c_{k_4})x^{11k_1}+\\ &+(c_0c_{k_3}+c_{k_3}c_{k_4})x^{10k_1}+(c_0c_{k_2}+c_{k_1}c_{k_3})x^{9k_1}+\\ &+(c_0c_{k_1}+c_{k_1}c_{k_2}+c_{k_2}c_{k_3}+c_0c_{k_4})x^{8k_1}+6x^{7k_1}+\dots \end{aligned}$$

Enfin, la comparaison de (7) à (9) montre qu'il y a encore deux éventualités à considérer, à savoir

$$\text{(A)}\quad m=k_1\qquad\text{et}\qquad\text{(B)}\quad m=3k_1,$$

l'égalité $m=2k_1$ étant exclue par l'hypothèse.

Si l'on a (A), il vient en comparant les coefficients dans (7) et (9),

$$c_0c_{k_4} = c_0c_{k_1} = -1,\qquad c_{k_1}c_{k_4} = -c_0c_{k_2},\qquad c_0c_{k_3} = -c_{k_2}c_{k_4},$$
$$c_0c_{k_1}+c_{k_1}c_{k_2}+c_{k_2}c_{k_3}+c_0c_{k_4} = -2,$$

d'où $c_{k_4} = c_{k_3} = c_{k_2} = c_{k_1} = -c_0$, ce qui entraîne

$$c_0c_{k_1}+c_{k_1}c_{k_2}+c_{k_2}c_{k_3}+c_0c_{k_4} = 0,$$

donc une contradiction avec la formule précédente.

Si l'on a (B), la comparaison de ces coefficients donne

$$c_0c_{k_4} = -c_0c_{k_1},\qquad c_{k_1}c_{k_4} = -c_0c_{k_2},\qquad c_0c_{k_3} = c_{k_2}c_{k_4} = -1,$$
$$c_0c_{k_3}+c_{k_3}c_{k_4} = 0,$$

d'où $c_{k_4} = c_{k_3} = -c_0$, ce qui entraîne

$$c_0c_{k_3}+c_{k_3}c_{k_4} = 0,$$

donc également une contradiction avec la formule précédente.

Ainsi le cas II est démontré impossible et le lemme se trouve établi.

Démonstration du théorème 1. Si $\langle n, m\rangle = \langle 7k, 2k\rangle$ ou bien $\langle 7k, 5k\rangle$, on a $(n, m) = k$ et on vérifie aisément que

$$g(x) = (x^{3k}+x^{2k}-1)(x^{3k}+x^k+1) \quad \text{ou} \quad (x^{3k}+x^{2k}+1)(x^{3k}+x^k-1)$$

respectivement. Or les polynômes $x^{3k}+x^{2k}\pm 1$ et $x^{3k}\pm x^k\pm 1$ sont irréductibles en vertu du théorème 3 de Ljunggren (voir [1]). En supposant, par contre, que $\langle 7k, 2k\rangle \neq \langle n, m\rangle \neq \langle 7k, 5k\rangle$, au moins l'un des facteurs du membre droit de (1) aurait en vertu du lemme la propriété suivante: si λ est une racine de ce facteur, il en est de même de λ^{-1}. La réductibilité du polynôme $g(x)$ entraînerait donc que

$$g(\lambda) = g(\lambda^{-1}) = 0 \tag{10}$$

pour un certain λ complexe. Il en résulte que $\lambda^n-2\lambda^m+1 = 0$ et $\lambda^n-2\lambda^{n-m}+1 = 0$, d'où successivement $\lambda^{n-2m} = 1$, $\lambda^{2m}-2\lambda^m+1 = 0$, $\lambda^m = 1$ et $\lambda^n = 1$, donc $\lambda^{(n,m)} = 1$. En même temps, l'hypothèse $n \neq 2m$ entraîne $n\lambda^{n-1} \neq 2m\lambda^{m-1}$; par conséquent λ serait une racine simple de x^n-2x^m+1. Vu que $\lambda^{(n,m)} = 1$, on aurait donc

$$g(\lambda) = \frac{\lambda^n-2\lambda^m+1}{\lambda^{(n,m)}-1} \neq 0,$$

contrairement à (10). La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

THÉORÈME 2. *Les nombres n, m, p et q étant des entiers tels que $n > m > 0$, $p > q > 0$ et $\langle n, m\rangle \neq \langle p, q\rangle$, on a*

$$(x^n-2x^m+1,\ x^p-2x^q+1) = \begin{cases} x^{(n,m,p,q)}-1 & \textit{si}\quad \langle n, p\rangle \neq \langle 2m, 2q\rangle,\\ (x^{(m,q)}-1)^2 & \textit{si}\quad \langle n, p\rangle = \langle 2m, 2q\rangle.\end{cases}$$

Démonstration. On a pour $r > s$

$$g_{r,s}(x) = \frac{x^r-2x^s+1}{x^{(r,s)}-1} = \sum_{i=s/(r,s)}^{r/(r,s)-1} x^{(r,s)i} - \sum_{i=0}^{s/(r,s)-1} x^{(r,s)i};$$

si $r \neq 2s$, les polynômes $g_{r,s}(x)$ et les facteurs irréductibles de $g_{7k,2k}(x)$ et de $g_{7k,5k}(x)$ sont donc deux à deux distincts et différents des facteurs irréductibles de x^l-1, quel que soit l'entier l. Il en résulte que l'on a pour $n \neq 2m$ et $p \neq 2q$

$$(x^n-2x^m+1,\ x^p-2x^q+1) = (x^{(n,m)}-1,\ x^{(p,q)}-1) = x^{(n,m,p,q)}-1,$$

et on voit aisément que la même formule subsiste lorsqu'on a l'une des égalités $n = 2m$ et $p = 2q$.

Par contre, pour $\langle n, p\rangle = \langle 2m, 2q\rangle$, il vient

$$(x^n-2x^m+1,\ x^p-2x^q+1) = \big((x^m-1)^2,\ (x^q-1)^2\big) = (x^m-1,\ x^q-1)^2 = $$
$$= (x^{(m,q)}-1)^2,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Pour en déduire la solution du problème précité de Zarankiewicz, il suffit de remarquer que si les nombres q^α, q^β, q^γ et q^δ, où $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, forment une progression arithmétique, on a

$$q^{\gamma-\alpha}-2q^{\beta-\alpha}+1 = 0 \quad \text{et} \quad q^{\delta-\beta}-2q^{\gamma-\beta}+1 = 0;$$

si, au contraire, $q^{(\gamma-\alpha,\ \beta-\alpha,\ \delta-\beta,\ \gamma-\beta)}-1 = 0$, on a

$$q^\alpha = q^\beta = q^\gamma = q^\delta.$$

Le théorème suivant peut être établi d'une façon tout à fait analogue que le théorème 1:

THÉORÈME 3. *Les nombres n et m étant des entiers tels que $n > m > 0$, le polynôme $f(x) = x^n+2\varepsilon_1x^m+\varepsilon_2$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, est un produit de deux facteurs dont le premier a pour racines précisément celles des racines de f qui sont des racines de l'unité, et le second, soit $g(x)$, satisfait aux conditions:*

(α) *si* $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $n = 7k$ et $m = 2k$, *on a*

$$g(x) = (x^{3k}+\varepsilon_2x^{2k}+\varepsilon_1)(x^{3k}+x^k+\varepsilon_2);$$

(β) *si* $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, $n = 7k$ *et* $m = 5k$, *on a*

$$g(x) = (x^{3k} + \varepsilon_2 x^{2k} + \varepsilon_2)(x^{3k} - x^k + \varepsilon_1);$$

et hors des cas (α) *et* (β) *le polynôme* $g(x)$ *est irréductible.*

Notons enfin que toutes les racines de $f(x)$ qui sont en même temps celles de l'unité (s'il en existe)

(a) sont simples à l'exception du cas où $n = 2m$ et $\varepsilon_2 = 1$, dans lequel elles sont doubles,

(b) satisfont à l'équation

$$x^d = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_1 = -1 \quad \text{et } \varepsilon_2 = 1, \\ -1 & \text{si } \varepsilon_1 = (-1)^{n_1+m_1+1} \text{ et } \varepsilon_2 = (-1)^{n_1}, \end{cases}$$

dans laquelle $d = (n, m)$, $n = dn_1$ et $m = dm_1$.

Cela élargit partiellement les résultats de Ljunggren (voir [1]), qui a étudié la réductibilité des polynômes

$$f(x) = x^n + \varepsilon_1 x^m + \varepsilon_2 x^p + \varepsilon_3 \quad \text{où} \quad n > m > p > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] W. Ljunggren, *On the irreducibility of certain trinomials and quadrinomials*, Mathematica Scandinavica 8 (1960), p. 65-70.

[2] W. Sierpiński, *Remarques sur les progressions arithmétiques*, Colloquium Mathematicum 3 (1954), p. 44-49.

Reçu par la Rédaction le 8. 5. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

THREE CONSECUTIVE INTEGERS CANNOT BE POWERS

BY

A. MĄKOWSKI (WARSAW)

In book [3], p. 154, LeVeque has stated: "It has not even been shown that no three consecutive integers are powers..." Sierpiński [4], p. 135, has raised the following question: "Does there exist three successive naturals each of which is a power with a natural exponent >1 of a natural number?"

The purpose of this paper is to show that the answer to this question is in the negative.

It may be supposed without loss of generality that the exponents of the powers mentioned in the problem are prime numbers. We show that *the system of equations*

$$x^p - y^q = 1,$$
$$y^q - z^r = 1$$

has no solution in positive integers x, y, z *and prime numbers* p, q *and* r.

Let x, y, z, p, q, r satisfy this system. By the theorem of Cassels [1], p. 98, $q \mid x$, $q \mid z$. Hence $q \mid x^p - z^r = 2$ and $q = 2$. The first equation becomes $x^p = y^2 + 1$, but this equation, as V. A. Lebesgue proved in [2], has no solution in integers with $y > 0$. This answers the question of Sierpiński.

REFERENCES

[1] J. W. S. Cassels, *On the equation* $a^x - b^y = 1$. II, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 56 (1960), p. 97-103; see also corrigendum, ibidem 57 (1961), p. 187.

[2] V. A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation* $x^m = y^2 + 1$, Nouvelles Annales de Mathématiques 9 (1850), p. 178-181.

[3] W. J. LeVeque, *Topics in number theory*, vol. II, Reading 1956.

[4] W. Sierpiński, *On some unsolved problems of arithmetics*, Scripta Mathematica 25 (1960), p. 125-136.

UNIVERSITY OF WARSAW

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1961