COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 2

ÜBER DIE APPROXIMATION VON ZAHLEN DURCH REIHEN MIT POSITIVEN GLIEDERN

VON

J. H. VAN LINT (EINDHOVEN)

In ihrem Vortrag „Über ein Extremalproblem in der Reihentheorie" auf dem 2. Ungarischen Mathematiker-Kongreß hat K. Rényi den nachstehenden Satz I erwähnt und die Aufgabe gestellt einen kurzen Beweis zu finden, weil ihr Beweis zu lang wäre. Der Satz stammt aus den Untersuchungen von Erdös und Rényi über zufällige Graphen. Hier wird er verhältnismäßig kurz bewiesen.

1. Fragestellung. Wir betrachten alle Reihen mit nichtnegativen Gliedern a_n und mit der Summe 1. Sei $0 < x \leqslant 1$. Es bezeichne $\mathfrak{A}(x)$ die Teilmenge dieser Reihen mit $\operatorname{Max}_n a_n = x$. Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{a}$ immer eine Reihe aus $\mathfrak{A}(x)$.

Die Glieder von $\mathfrak{a}$ zerlegen wir in 2 Teilmengen. Die Summen dieser Teilmengen werden mit S_2 und S_1, wo $S_2 \geqslant S_1$, bezeichnet. Wir werden die Teilmengen selber auch mit S_1 und S_2 bezeichnen. Es sei

$$f(\mathfrak{a}) = \operatorname{Inf}(S_2 - S_1) \quad \text{(Infimum über alle Zerlegungen von } \mathfrak{a}\text{)}, \tag{1.1}$$

$$\varphi(x) = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}(x)} f(\mathfrak{a}). \tag{1.2}$$

Wir werden zeigen, daß wir uns auf endliche Reihen beschränken können und daß $\varphi(x)$ nicht nur ein Supremum, sondern sogar ein Maximum ist. Wir können die Frage denn auch so stellen: unter den Reihen, deren größtes Glied gleich x ist, werden diejenigen gesucht, deren Partialsummen die Zahl $\frac{1}{2}$ so schlecht wie möglich approximieren.

In dieser Arbeit wollen wir $\varphi(x)$ berechnen. Das Ergebnis ist:

Satz I. *Für $k \geqslant 1$ gilt*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-(k+1)x}{k} & \text{für} \quad \dfrac{1}{2k+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{2k^2+k+1}, \\[2ex] 2kx-1 & \text{für} \quad \dfrac{k+1}{2k^2+k+1} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2k-1}. \end{cases}$$

Der Beweis besteht aus 3 Teilen. Zuerst zeigen wir, daß wir uns auf Reihen mit nur endlich vielen Gliedern beschränken können. Dann wird $\sup f(\mathfrak{a})$ für Reihen berechnet, deren positive Glieder nur 2 verschiedene Werte haben. Schließlich zeigen wir, daß $\sup f(\mathfrak{a})$ für die anderen Reihen kleiner ist.

Sei $\mathfrak{a}$ eine Reihe aus $\mathfrak{A}(x)$. Sind $a_i \leqslant \frac{1}{2}x$ und $a_j \leqslant \frac{1}{2}x$ Glieder von $\mathfrak{a}$, so betrachten wir neben $\mathfrak{a}$ auch eine Reihe $\mathfrak{a}^* \epsilon \mathfrak{A}(x)$, die aus $\mathfrak{a}$ dadurch entsteht, daß anstatt der Glieder a_i und a_j das eine Glied $a_i + a_j$ gesetzt wird. Es ist klar, daß die Menge der oben definierten Differenzen von Partialsummen $S_2^* - S_1^*$ von $\mathfrak{a}^*$ eine Teilmenge der Menge aller $S_2 - S_1$ für $\mathfrak{a}$ bildet. Also ist $f(\mathfrak{a}^*) \geqslant f(\mathfrak{a})$. Deswegen hat man

HILFSSATZ 1. *Wir können uns bei der Bildung vom Supremum in* (1.2) *auf Reihen beschränken, deren Glieder alle, bis auf höchstens ein Glied, größer als $\frac{1}{2}x$ sind. Die Anzahl der Glieder ist dann also* $\leqslant [2/x]$.

Wir beschränken uns weiterhin auf endliche Reihen. Gibt es dabei Glieder gleich 0, so können wir diese weglassen. Für die von uns betrachteten Reihen ist das in (1.1) definierte Infimum ein Minimum.

HILFSSATZ 2. *Das Supremum ist ein Maximum.*

Beweis. Betrachten wir die Glieder einer Reihe $\mathfrak{a}$ als Koordinaten eines Punktes eines endlichdimensionalen Raumes (z. B. der Dimension $[2/x]$), so bilden die möglichen Reihen eine kompakte Menge $G(\mathfrak{A}(x))$ in diesem Raum. Die Funktion $f(\mathfrak{a})$ ist eine stetige Funktion auf $G(\mathfrak{A}(x))$.

Im folgenden wird für jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}(x)$ mit $G(\mathfrak{M})$ die zugehörige Teilmenge von $G(\mathfrak{A}(x))$ bezeichnet.

HILFSSATZ 3. *Ist (S_1, S_2) eine Zerlegung von $\mathfrak{a}$ mit $f(\mathfrak{a}) = S_2 - S_1$ und ist $a_i \epsilon S_2$, so ist $f(\mathfrak{a}) \leqslant a_i$. Ist weiter $a_j \leqslant a_i$ und $a_j \epsilon S_1$, so ist $f(\mathfrak{a}) \leqslant a_i - a_j$.*

Beweis. 1. Aus $f(\mathfrak{a}) = S_2 - S_1$ folgt wegen $a_i > 0$, daß $(S_1 + a_i) - (S_2 - a_i) \geqslant S_2 - S_1$ gilt.

2. Analog folgt $(S_1 + a_i - a_j) - (S_2 - a_i + a_j) \geqslant S_2 - S_1$.

Folgerung. Wir haben

(1.3) $$\varphi(x) \leqslant x.$$

Für alle $\mathfrak{a} \epsilon \mathfrak{A}(x)$ ist $(S_1 = x, S_2)$ eine der möglichen Zerlegungen. Also gilt $f(\mathfrak{a}) \leqslant |2x-1|$. Für $x \geqslant \frac{1}{3}$ ist $\varphi(x)$ hieraus schon zu berechnen.

(1.4) *Für $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ hat man $\varphi(x) = 2x - 1$.*

Beweis. Für die Reihe $\mathfrak{a}$: $x + (1-x)$ ist $f(\mathfrak{a}) = 2x - 1$.

(1.5) *Für $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ hat man $\varphi(x) = 1 - 2x$.*

Beweis. Für die Reihe $\mathfrak{a}$: $x + \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)$ ist $f(\mathfrak{a}) = 1 - 2x$.

2. Reihen, deren Glieder höchstens 2 Werte haben. Es werden jetzt die Reihen $\mathfrak{a}$ betrachtet mit m $(m \geqslant 1)$ Gliedern, die gleich x sind und n $(n \geqslant 0)$ Gliedern, die alle denselben Wert y haben, wo also $mx + ny = 1$. Diese Teilmenge von $\mathfrak{A}(x)$ wirt mit $\mathfrak{A}^{(2)}$ bezeichnet.

(2.1) *Ist m gerade und n gerade, so ist $f(\mathfrak{a}) = 0$.*

Wir definieren jetzt:

(2.2) *I ist das Intervall $1/(2k+1) \leqslant x < 1/2k-1)$ $(k \geqslant 2)$, I_1 ist das Intervall $1/(2k+1) \leqslant x < 1/2k$ und $I_2 = I - I_1$.*

Wir betrachten folgende Reihen aus $\mathfrak{A}^{(2)}$:

$\mathfrak{a}_1$: $m = 1$; n gerade, so klein wie möglich für $x \epsilon I$, d. h. $n = 2k$; $y = y_1$.

Dann ist $f(\mathfrak{a}_1) = f_1 = 2y_1 - x$.

$\mathfrak{a}_2$: $m = 1$; n ungerade, so klein wei möglich für $x \epsilon I$, d. h. $n = 2k+1$ für $x \epsilon I_1$ und $n = 2k-1$ für $x \epsilon I_2$; $y = y_2$.

Dann ist $f(\mathfrak{a}_2) = f_2 = x - y_2$.

$\mathfrak{a}_3$: $n = 1$; $y = y_3$.

Dann ist

$$f(\mathfrak{a}_3) = f_3 = \begin{cases} y_3 & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ x - y_3 & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es folgt dann

$$f_1 = \frac{1-(k+1)x}{k} \quad \text{für} \quad x \epsilon I;$$

(2.3) $$f_2 = \begin{cases} \dfrac{(2k+2)x-1}{2k+1} & \text{für} \quad x \epsilon I_1, \\ \dfrac{2kx-1}{2k-1} & \text{für} \quad x \epsilon I_2; \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} 1-2kx & \text{für} \quad x \epsilon I_1, \\ 2kx-1 & \text{für} \quad x \epsilon I_2. \end{cases}$$

Eine leichte Rechnung zeigt:

(2.4) *Ist I_1^* das Intervall $1/(2k+1) \leqslant x \leqslant (k+1)/(2k^2+k+1)$ und $I_2^* = I - I_1^*$, so ist*

$$\operatorname{Max}(f_1, f_2, f_3) = \psi(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} f_1 & \textit{für} \quad x \epsilon I_1^*, \\ f_3 & \textit{für} \quad x \epsilon I_2^*. \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung lautet die Behauptung von Satz I: $\varphi(x) = \psi(x)$.

Wir betrachten jetzt die übrigen Reihen $\mathfrak{a}$ mit Gliedern x und y. Wir sehen sofort ein:

(2.5) Ist die Summe der Glieder x größer als $\frac{1}{2}$, so ist $f(\mathfrak{a}) \leqslant f_3$.

(Es gibt dann eine Zerlegung (S_1, S_2) von $\mathfrak{a}$, für welche $S_2 - S_1 = f_3$ gilt.)

Sei jetzt $\mathfrak{a}_4$ die Reihe mit $m = 2$ Gliedern x, n ungerade und so klein wie möglich (für $x \epsilon I$), d. h. $n = 2k-1$; $y = y_4$. Wir können uns auf $k \geqslant 3$ beschränken, weil sonst $f(\mathfrak{a}_4) \leqslant f_3 \leqslant \psi(x)$ gilt. Es folgt dann durch leichte Rechnung

$$f(\mathfrak{a}_4) = f_4 \leqslant |3y_4 - 2x| = \left| \frac{|3-4(k+1)x|}{2k-1} \right| \leqslant \psi(x)$$

$$(3y_4 - 2x \geqslant 0 \text{ für } x \leqslant 3/16).$$

Sei $\mathfrak{a}$ eine Reihe mit $m > 1$ Gliedern x und mit $n > 1$ Gliedern y $(mx + ny = 1,\ y > \frac{1}{2}x)$.

Ist dann m underade und n gerade, so hat man

$$f(\mathfrak{a}) \leqslant 2y - x < 2y_1 - x = f_1.$$

Ist m ungerade und n ungerade, so folgt aus (2.5), daß $f(\mathfrak{a}) \leqslant f_3$ für $x > \frac{1}{6}$. Ist dagegen $x \leqslant \frac{1}{6}$, so hat man zuerst $\psi(x) \geqslant \frac{1}{2}x$ (was schon für $x \leqslant \frac{1}{4}$ gilt). Nach Hilfssatz 1 können wir $y > \frac{1}{2}x$ annehmen und wir finden $f(\mathfrak{a}) \leqslant x - y < \frac{1}{2}x \leqslant \psi(x)$.

Ist schließlich $m \geqslant 4$ gerade und $n \geqslant 3$ ungerade, so gilt $1 = mx + ny \geqslant \frac{11}{2}x$ und also $x \leqslant \frac{2}{11}$. Ist nun $3y \geqslant 2x$, so folgt $f(\mathfrak{a}) \leqslant 3y - 2x < 3y_4 - 2x = f_4$. Ist aber $3y < 2x$, so hat man $f(\mathfrak{a}) \leqslant 2x - 3y \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant \psi(x)$.

Also ist für alle Reihen mit m Gliedern x und n Gliedern y $(mx + ny = 1,\ y > \frac{1}{2}x)$ die Ungleichung $f(\mathfrak{a}) \leqslant \psi(x)$ bewiesen.

3. Reihen, deren Glieder mehr als 2 Werte haben. Wir beschränken uns zuerst auf $x \leqslant \frac{1}{4}$. Für $x \leqslant \frac{1}{4}$ gilt $\psi(x) \geqslant \frac{1}{2}x$. Wir betrachten Reihen $\mathfrak{a}$, die mindestens zwei von x und voneinander verschiedene Glieder haben. Wir nehmen an, daß es unter diesen Reihen solche gibt, für welche $f(\mathfrak{a}) = \varphi(x)$. Die Menge der $\mathfrak{a}$ mit dieser Eigenschaft nennen wir $\mathfrak{A}^*$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

(1) Es gibt in $\mathfrak{A}^*$ Reihen mit einem Glied $\leqslant \frac{1}{2}x$.

(2) Alle Reihen in $\mathfrak{A}^*$ haben nur Glieder $> \frac{1}{2}x$.

Gibt es am Rande von $G(\mathfrak{A}^*)$ Punkte von $G(\mathfrak{A}^{(2)})$, so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ und Satz I ist also für $x \leqslant \frac{1}{4}$ bewiesen. Ist das nicht der Fall, so gibt es Punkte am Rande von $G(\mathfrak{A}^*)$, die zu Reihen mit folgender Eigenschaft gehören:

Im Falle (1) gibt es eine Reihe $\mathfrak{a}_0$ mit kleinstem positiven Glied y_0, so daß für jedes $\mathfrak{a} \epsilon \mathfrak{A}^*$ mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a_1) die Anzahl der positiven Glieder in $\mathfrak{a}$ ist größer als die in $\mathfrak{a}_0$,

(b_1) alle positiven Glieder von $\mathfrak{a}$ sind $\geqslant y_0$.

In der Tat, man betrachte alle Reihen in $\mathfrak{A}^*$, für welche die Anzahl der positiven Glieder minimal ist; unter diesen gibt es eine, für die das kleinste Glied y_0 minimal ist.

Im Falle (2) gibt es offenbar eine Reihe $\mathfrak{a}_0$ mit kleinstem positiven Glied y_0, so daß für jedes $\mathfrak{a} \epsilon \mathfrak{A}^*$ mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a_2) das kleinste Glied von $\mathfrak{a}$ ist kleiner als y_0,

(b_2) die Anzahl der Glieder, die gleich y_0 sind, ist größer bzw. gleich wie in $\mathfrak{a}_0$.

Wir zeigen jetzt, daß $f(\mathfrak{a}_0) \leqslant \psi(x)$ in beiden Fällen gilt.

Ist, im Falle (1), $y_0 \epsilon S_1$ für alle Zerlegungen (S_1, S_2) von $\mathfrak{a}_0$ mit $S_2 - S_1 = f(\mathfrak{a}_0)$ und ist, für alle anderen Zerlegungen von $\mathfrak{a}_0$, die Differenz $S_2 - S_1 > f(\mathfrak{a}_0) + 2\varepsilon$, so ersetzen wir y_0 durch $y_0 - \varepsilon$ und ein Glied $a_i \neq x$ durch $a_i + \varepsilon$. Für die so konstruierte Reihe $\mathfrak{a}'$ gilt $f(\mathfrak{a}') \geqslant f(\mathfrak{a}_0)$. Also ist $f(\mathfrak{a}') = f(\mathfrak{a}_0)$. Jetzt ist aber weder (a_1) noch (b_1) erfüllt. Das ist ein Widerspruch! Wir sehen, daß es eine Zerlegung (S_1, S_2) von $\mathfrak{a}_0$ mit $S_2 - S_1 = f(\mathfrak{a}_0)$ und $y_0 \epsilon S_2$ geben muß. Dann ist wegen Hilfssatz 3: $f(\mathfrak{a}_0) \leqslant y_0 \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant \psi(x)$. Ist im Falle (2) für alle Zerlegungen (S_1, S_2) von $\mathfrak{a}_0$ mit $S_2 - S_1 = f(\mathfrak{a}_0)$ jedes Glied $\neq x$ von S_2 nicht größer als jedes Glied von S_1, so ersetzen wir $y_0 \epsilon S_2$ durch $y_0 + \varepsilon$ und ein Glied $a_i > y_0$ durch $a_i - \varepsilon$. Ist ε hinreichend klein, so gilt für die neue Reihe $f(\mathfrak{a}') = f(\mathfrak{a}_0)$. Diesmal ist aber weder (a_2) noch (b_2) erfüllt. Das ist erneut ein Widerspruch. Es muß also eine Zerlegung (S_1, S_2) von $\mathfrak{a}_0$ mit $S_2 - S_1 = f(\mathfrak{a}_0)$, $a_i \epsilon S_2$, $a_j \epsilon S_1$ und $a_i > a_j$ geben, Dann ist wegen Hilfssatz 3:

$$f(\mathfrak{a}_0) \leqslant a_i - a_j \leqslant x - \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x \leqslant \psi(x).$$

Damit ist für $x \leqslant \frac{1}{4}$ bewiesen, daß $\varphi(x) = \psi(x)$. Der Beweis für $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$ verläuft ähnlich. Man zieht dann in Betracht, daß, für dieses x, $\psi(x) \geqslant \frac{1}{3}x$ gilt, und weiter daß wegen $|\frac{7}{4}x - \frac{1}{2}| < \psi(x)$ alle Glieder $\neq x$ kleiner als $\frac{3}{4}x$ sein sollen, wenn $\varphi(x) \neq \psi(x)$ ist. Satz I ist dadurch bewiesen.

Reçu par la Rédaction le 5. 6. 1961