Now we will consider the space X of all transfinite sequences (x_β) ($\beta < \omega_1$, x_β are real) for which the pseudonorms

$$\|(x_\beta)\|_n \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\beta<\omega_1} g_n^\beta \cdot |x_\beta| \tag{2}$$

are finite for all $n = 0, 1, 2, \ldots$; the g_n^β have the same meaning as in the proof of the Lemma.

We shall prove the following

THEOREM. *The space X is a non-separable B_0-space, and every bounded subset of X is separable.*

Proof. The non-separability of X is clear. Let Z be an arbitrary bounded subset of X. Then there exists a sequence of positive numbers (m_n) $(n < \omega)$ such that:

$$Z \subset \{(x_a) : \|(x_a)\|_n \leqslant m_n \quad \text{for} \quad n = 0, 1, \ldots\}. \tag{3}$$

Now we will denote by O_k (k is a fixed natural) the set of all ordinals β_0 for which there exists a transfinite sequence $(x_a) \epsilon Z$, such that its β_0-coordinate is greater than $1/k$, i. e., $x_{\beta_0} > 1/k$. From formulas (2) and (3) we get

$$\frac{1}{k} g_n^{\beta_0} < \sum_{\beta<\omega_1} g_n^0 |x_\beta| \leqslant m_n \quad \text{for} \quad n = 0, 1, \ldots,$$

whence for $\beta_0 \epsilon O_k$ we have $(g_n^{\beta_0}) \prec (k \cdot m_n)$, and by the Lemma the set O_k is denumerable. Consequently the union $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$ is also denumerable and we will denote by γ the smallest ordinal greater than all the terms of $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$.

It immediately follows from the definitions of the set O_k and the ordinal γ that

$$\text{if } (x_a) \epsilon Z, \text{ then } x_a = 0 \text{ for any } a \geqslant \gamma. \tag{4}$$

Hence the set Z is containded in the separable subspace X_γ of all sequences (x_a) such that $x_a = 0$, for any $a \geqslant \gamma$. Thus Z is separable.

REFERENCES

[1] J. Dieudonné, *Bounded sets in (F)-spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society 6 (1955), p. 729-731.

[2] C. Bessaga and S. Rolewicz, *On bounded sets in F-spaces*, Colloquium Mathematicum 9 (1961), p. 89-91.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 14. 4. 1961

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. IX 1962 FASC. 1

SUR UN PROBLÈME, POSÉ PAR C. RYLL-NARDZEWSKI, CONCERNANT LES SÉLECTEURS À MESURE MAXIMUM

PAR

A. GUICHARDET (MONTREUIL, SEINE)

C. Ryll-Nardzewski a posé le problème suivant [3]:

There is a decomposition of the interval $\langle 0, 1\rangle$ into subsets E_a ($a \epsilon A$ and A is an arbitrary set of indices). Let us consider all Lebesgue measurable sets of the form $S = \{p_a\}_{a\epsilon A}$ where $p_a \epsilon E_a$. Let it be that $\mu = \sup_S |S|$ ($|S|$ denotes the measure of S). Is this upper limit attained on a set? How is it in the case $E_a = \{t : 0 \leqslant t \leqslant 1,\ f(t) = a\}$ ($f(t)$ is Lebesgue measurable)?

Ce problème reçoit ici une réponse affirmative dans le cas particulier $E_a = \{t : 0 \leqslant t \leqslant 1,\ f(t) = a\}$, où $f(t)$ est mesurable au sens de Lebesgue. Dans le cas considéré, il existe une désintégration ([2], § 3, th. 1) de la mesure de Lebesgue ν relative à l'application f, soit $\nu = \int \lambda_a d\mu(a)$; et on a $\nu(S) = \int \lambda_a(S \cap f^{-1}(a)) d\mu(a)$ pour tout ensemble S considéré ([1], § 3, théorème 1); on démontre qu'on peut partager $[0, 1]$ en deux parties mesurables disjointes U et V telles que les λ_a soient atomiques sur U et diffuses sur V ([1], § 5, nº 10); et on n'aura à considérer ici que l'ensemble U, puisque, pour tout ensemble S, $S \cap V$ est de mesure nulle. On est donc ramené à démontrer, en changeant quelque peu les notations, le

THÉORÈME 1. *Soient Y et Z deux espaces topologiques localement compacts à bases dénombrables d'ensembles ouverts, ν une mesure positive bornée sur Z, φ une application ν-mesurable de Z dans Y, μ l'image de ν par φ, $\nu = \int_Y \lambda_\eta d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ. On suppose λ_η atomique pour tout $\eta \epsilon Y$. Alors parmi les sections de Z pour φ qui sont ν-mesurables, il en existe une au moins dont la mesure est maximale.*

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 1'. *Avec les notations du théorème 1, soit A le sous-ensemble de Z qui rencontre chaque classe $\varphi^{-1}(\eta)$ suivant l'ensemble de points de $\varphi^{-1}(\eta)$ dont la mesure pour λ_η est maximale; alors A es ν-mesurable.*

Le théorème 1 en résultera, car d'après [2], § 3, théorème 3, il existera une section S ν-mesurable de A pour φ, et S sera aussi une section de Z pour φ, et évidemment de mesure maximale.

LEMME. *L'application de Z dans $[0,1]$: $\zeta \to \lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\})$ est ν-mesurable.*

φ étant ν-mesurable, il existe une suite de compacts deux à deux disjoints $Z_n \subset Z$ tels que $\nu(Z - \bigcup_n Z_n) = 0$ et que φ soit continue sur chaque Z_n; de même l'application $\eta \to \lambda_\eta$ $(\eta \in Y)$ est vaguement μ-mesurable ([1], § 3, définition 1) et il existe des compacts Y_m ayant les propriétés précédentes. Il suffit de montrer que l'application $\zeta \to \lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\})$ est ν-mesurable sur les ensembles $Z_n \cap \varphi^{-1}(Y_m)$, qui sont compacts, ou encore que l'ensemble des ζ tels que $\zeta \in Z_n \cap \varphi^{-1}(Y_m)$ et $\lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\}) \geqslant a$ est fermé pour tout a: $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Soit une suite $\{\zeta_i\}$ telle que $\zeta_i \to \zeta$, $\zeta_i, \zeta \in Z_n \cap \varphi^{-1}(Y_m)$ et $\lambda_{\varphi(\zeta_i)}(\{\zeta_i\}) \geqslant a$. On a $\varphi(\zeta_i) \to \varphi(\zeta)$ et $\lambda_{\varphi(\zeta_i)} \to \lambda_{\varphi(\zeta)}$.

Soit Ω un voisinage compact de ζ et soit f une fonction à valeurs positives, continue, nulle en dehors de Ω; on a $\lambda_{\varphi(\zeta_i)}(f) \geqslant \lambda_{\varphi(\zeta_i)}(\{\zeta_i\}) \cdot f(\zeta_i)$ et $f(\zeta_i) \geqslant f(\zeta) - \varepsilon$ pour i assez grand, donc

$$\lambda_{\varphi(\zeta_i)}(f) \geqslant a\big(f(\zeta) - \varepsilon\big);$$

comme $\lambda_{\varphi(\zeta_i)}(f) \to \lambda_{\varphi(\zeta)}(f)$, on a $\lambda_{\varphi(\zeta)}(f) \geqslant a\big(f(\zeta) - \varepsilon\big)$ pour tout ε, donc $\lambda_{\varphi(\zeta)}(f) \geqslant a \cdot f(\zeta)$; et enfin, puisque f est arbitraire,

$$\lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\}) \geqslant a.$$

Démonstration du théorème 1'. Considérons d'abord le cas particulier où toutes les mesures λ_η sont concentrées sur des ensembles finis ayant au plus p éléments (p entier fixe). Nous procéderons par récurrence; la proposition est vraie pour $p = 1$, car alors A est l'ensemble des points ζ pour lesquels $\lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\}) = 1$.

Supposons la proposition vraie pour $p-1$ et démontrons-la pour p. Soit E (resp. F) l'ensemble des ζ tels que $\lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\}) > 1/p$ (resp. $= 1/p$); E et F sont ν-mesurables; l'application $\eta \to \lambda_\eta(E)$ est μ-mesurable ([1], § 3, th. 1) et $\varphi(E)$ est l'ensemble des η tels que $\lambda_\eta(E) \neq 0$, donc est μ-mesurable; de même $Y - \varphi(E)$; donc φ^{-1} $(Y - \varphi(E)$ est ν-mesurable) ([1], § 6, cor. de la proposition 3); remarquons que $Y - \varphi(E)$ est l'ensemble des η pour lesquels λ_η est constituée de p points de masses égales à $1/p$.

On a $A \cap \varphi^{-1}\big(Y - \varphi(E)\big) = F \cap \varphi^{-1}\big(Y - \varphi(E)\big)$, donc $A \cap \varphi^{-1}\big(Y - \varphi(E)\big)$ est ν-mesurable; il reste à montrer que $A \cap \varphi^{-1}\big(\varphi(E)\big)$ est ν-mesurable; or $A \cap \varphi^{-1}\big(\varphi(E)\big) = A \cap E$ et dans E chaque λ_η est concentrée sur un ensemble qui a au plus $p-1$ éléments. Posons $\lambda'_\eta =$ mesure induite par λ_η sur E; l'application $\eta \to \lambda'_\eta$ possède toutes les propriétés de [2], § 3, théorème 1, sauf $\|\lambda'_\eta\| = 1$; mais la fonction $\eta \to \|\lambda'_\eta\|$ est μ-mesurable

et on peut prendre $\lambda'_\eta / \|\lambda'_\eta\|$ au lieu de λ'_η et $\|\lambda'_\eta\| \cdot \mu$ au lieu de μ. On est alors ramené au cas $p = 1$.

Pour démontrer le théorème dans toute généralité désignons par E_q $(q = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble mesurable des ζ tels que $\lambda_{\varphi(\zeta)}(\{\zeta\}) \geqslant 1/q$. Alors $A \cap E_q$ est mesurable d'après ce qui précède; puis

$$A \cap E_q = A \cap \varphi^{-1}\big(\varphi(E_q)\big),$$

et comme $Z = \bigcup_q \varphi^{-1}\big(\varphi(E_q)\big)$, on a $A = \bigcup_q A \cap E_q$ et A est ν-mesurable.

TRAVAUX CITÉS

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, I Les structures fondamentales de l'analyse, Livre VI: Intégration*, Chapitre 5: *Intégration des mesures*, Paris 1956.

[2] — Chapitre 6: *Intégration vectorielle*, Paris 1959.

[3] C. Ryll-Nardzewski, *Problem 205*, New Scottish Book, Wrocław 1946-1958, p. 22.

Reçu par la Rédaction le 23. 12. 1960