COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 84/85 2000 PART 2

# *PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES ET COMBINATOIRES DES ÉCHELLES DE NUMÉRATION*

PAR

GUY BARAT (PARIS), TOMASZ DOWNAROWICZ (WROCŁAW), ANZELM IWANIK ET PIERRE LIARDET (MARSEILLE)

**Abstract.** Topological and combinatorial properties of dynamical systems called odometers and arising from number systems are investigated. First, a topological classification is obtained. Then a rooted tree describing the carries in the addition of 1 is introduced and extensively studied. It yields a description of points of discontinuity and a notion of low scale, which is helpful in producing examples of what the dynamics of an odometer can look like. Density of the orbits is also discussed.

**1. Introduction.** Une *échelle de numération* pour les entiers naturels (zéro compris) est, par définition, une suite strictement croissante d'entiers $G = (G_n)_n$ avec $G_0 = 1$. Cette échelle fixée, tout entier naturel $n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{k\geq 0} e_k(n) G_k \tag{1}$$

avec $e_k \in \mathbb{N}$ et

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{m} e_k G_k < G_{m+1}. \tag{2}$$

Le mot infini $J_G(n) := e_0(n)e_1(n)e_2(n)\ldots$ est par définition le *G-développement* de $n$; $e_j(n)$ en est le $j$-ième chiffre, il est nul pour tout $j$ assez grand. Nous renvoyons à [Fra] pour une présentation générale de tels systèmes.

L'échelle de numération $G_n = b^n$ correspondant au développement en base entière $b \geq 2$ n'est peut-être pas la plus simple, mais sans nul doute la plus utilisée en pratique avec $b = 10$. Les propriétés statistiques de cette numération ont tout d'abord été abordées par le biais de la somme des chiffres comme ce fut le cas dans les travaux fondateurs de R. Belleman et H. N. Shapiro [BeSh] ou de J. Bésineau [Be]. Les très nombreux prolonge–

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54H20; Secondary 11A63, 05C05.

*Key words and phrases*: dynamical system, odometer, number system, adding machine, rooted tree.

Les premier et quatrième auteurs sont partiellement financés par le MENRT, contrat 95-99.

ments qui ont suivi portaient à la fois sur des numérations plus générales (Cantor, Ostrowski, Fibonacci... ) et sur l'étude statistique (valeurs moyennes, moments, distributions asymptotiques, corrélations) de fonctions dites additives (ou multiplicatives) dont la fonction somme des chiffres est le prototype de base. Le lecteur est renvoyé à [Li1] ou à [Ba] pour une liste de références sur le sujet. Pour des publications postérieures à ces travaux, citons par exemple [DrGa, Ma].

Dans la numération en base fixe, l'addition de 1 sur $\mathbb{N}$ se calcule aisément par un automate séquentiel à deux bandes. Il en va de même pour certaines échelles très particulières complètement décrites par C. Frougny dans [Fro]. Dans le cas général, l'addition de 1 repose sur une étude directe du transfert de la retenue et se prolonge de manière naturelle en une application $\tau$ sur l'ensemble $\mathcal{K}_G$ des suites $e = e_0 e_1 e_2 \ldots$ qui satisfont à (2), définissant ainsi un système dynamique $(\mathcal{K}_G, \tau)$ appelé $G$-odomètre (cf. section 2.3). L'exemple $G_n = q^n$ est classique; l'odomètre correspondant ($q$-*adding machine*) est topologiquement conjugué à l'addition de 1 dans le groupe des entiers $q$-adiques. Un autre exemple classique est celui de l'échelle de Fibonacci ($G_1 = 2$, $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$) pour laquelle l'odomètre est – à un ensemble dénombrable près – topologiquement conjugué à la translation du nombre d'or modulo 1. L'article [GrLiTi] est le point de référence de ce travail. On y trouve notamment une caractérisation de la continuité de $\tau$ (voir le théorème 5 infra), ainsi qu'une étude détaillée des échelles associées aux $\beta$-développements de Parry [Pa]. Dans certains cas, les conditions (2) peuvent s'exprimer par un diagramme de Bratteli simple, c'est-à-dire qu'il existe une suite $M = (M^{(n)})_n$ de matrices d'incidence $(M^{(n)})_{ij}$ ($0 \le i < G_{n+1}/G_n$ et $0 \le j < G_{n+2}/G_{n+1}$) de telle sorte que $\mathcal{K}_G$ coïncide avec le compactum de Bratteli $K(M)$ donné par

$$(3) \quad K(M) := \{x \in \mathbb{N}^\omega : \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le x_n < G_{n+1}/G_n \ \&\ M^{(n)}_{x_n x_{n+1}} = 1\}.$$

Les deux exemples précédents illustrent cette situation particulière : pour chaque $n$, $M^{(n)}$ est égale à la matrice carrée d'ordre $q$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 dans le premier cas et $M^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans le second. Le $G$-odomètre est alors isomorphe au classique *système adique* introduit par Vershik [Ve]. D'autres échelles ont été récemment décrites par H. Bruin, G. Keller et M. St. Pierre dans [BrKrStP]; ces auteurs construisent ainsi des $G$-odomètres qui sont métriquement isomorphes à l'action d'applications unimodulaires $f$ restreintes à l'espace des points limites du point critique (attracteurs dits sauvages).

L'objet de cet article est de poursuivre l'étude générale des odomètres commencée dans [Li2] et [GrLiTi]. Il est émaillé de nombreux exemples, simples ou élaborés, destinés à répondre à une question naturelle relative à un objet encore peu étudié : que peut-il se produire? que ne peut-il pas se produire? La section 2 fixe quelques notations et conventions avant de rappeler brièvement la définition d'un $G$-odomètre. L'ensemble $\mathcal{K}_G$ est muni d'une topologie métrisable compacte (la topologie produit). La section 3 est consacrée à la classification de ce compact. Deux cas sont possibles (théorème 2) : soit $\mathcal{K}_G$ est exactement $\mathbb{N}$ muni d'une topologie compacte appropriée, soit $\mathcal{K}_G$ est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

L'arbre des retenues est introduit à la section 4. Les nœuds de cet arbre sont les entiers $\geq -1$ avec $-1$ comme racine. Il analyse et rend compte de propriétés de nature combinatoire, topologique et dynamique liées à la représentation chiffrée des nombres entiers suivant une échelle. Les fonctions descente et hauteur de l'arbre sont introduites et l'on montre que toute structure d'arbre monotone sur $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ (cf. section 4.2 pour ces définitions) est arbre des retenues pour une infinité non dénombrable d'échelles. C'est l'occasion ici de définir les échelles dites basses et celles de type fini (section 4.3) qui jouent un rôle important et présentent une grande diversité d'échelles que nous illustrons par de nombreux exemples.

A la section 5, nous étudions la continuité de l'odomètre. Celle-ci a été caractérisée dans [GrLiTi] par la propriété $C_1$ énoncée dans le théorème 5 infra. Nous en donnons une nouvelle caractérisation en termes de l'arbre des retenues, à savoir que chaque sommet de l'arbre est de degré fini (propriété $C_2$ du théorème 5). La densité des orbites retient ensuite l'attention; en particulier, les odomètres admettant des orbites non denses sont caractérisés.

Des questions comme l'existence d'une mesure invariante pour l'odomètre, ou encore de savoir dans quels cas il y a unique ergodicité, ne sont pas abordées ici. Elles font parties d'un programme développé dans un deuxième article [BaDoLi], où l'on répond notamment, par l'affirmative, à la conjecture suivante énoncée par l'un des auteurs [Li3] : l'odomètre ne peut pas être d'entropie strictement positive.

## 2. L'odomètre

**2.1.** *Notations et conventions pratiques.* Une suite finie $x$ de longueur $k$, à valeurs dans un ensemble $X$, est représentée indifféremment comme un $k$-uplet $(x_1, \ldots, x_k)$ ou un mot $x_1 \ldots x_k$ sur $X$, appelé alors *alphabet*; la longueur de ce mot est alors $k$. La suite vide (de longueur 0), ou mot vide, est notée $\wedge$; sa longueur est 0. L'ensemble des mots sur $X$, noté $X_*$ (au lieu de $A^*$ comme c'est souvent l'usage), est muni de sa structure de monoïde correspondant à l'opération de concaténation sur les mots. Pour tout mot ou lettre $w$, la notation $w^{(n)}$, ou simplement $w^n$ s'il n'y a pas de confusion possible, représente le mot obtenu par $n$ concaténations du mot $w$ avec lui-même. Par convention, $w^{(0)} = \wedge$.

Une suite $x$ à valeurs dans $X$ est définie sur $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; elle est représentée soit par $(x_n)_n$, soit comme un mot infini $x_0 x_1 x_2 \ldots$ sur l'alphabet $X$. L'écriture $x_0 \ldots x_k a^\omega$ signifie que $x_n = a$ pour tout $n > k$, et pour $m < n$ on pose $x]m, n] = x_{m+1} \ldots x_n$. Si $X$ est muni d'une topologie, l'ensemble $X^\omega$ des suites à valeurs dans $X$ est muni de la topologie produit usuelle. Enfin, si $z$ est un nombre réel, on note $\lfloor z \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq z\}$ la partie entière de $z$.

**2.2.** *Construction du $G$-compactifié de* $\mathbb{N}$.Le développement (1) dans une échelle $G$ conduit naturellement à introduire l'ensemble $\mathcal{K}_G$ des suites $e = e_0 e_1 e_2 \ldots$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, appartenant au produit

$$\Omega := \prod_{m=0}^{\infty} \{0, 1, \ldots, \lfloor G_{m+1}/G_m \rfloor\}$$

et qui satisfont à (2). L'ensemble $\mathcal{K}_G$ est alors une partie compacte de $\Omega$, appelée *$G$-compactifié* de $\mathbb{N}$. De fait, $\mathbb{N}$ s'envoie dans $\mathcal{K}_G$ par l'injection canonique $n \mapsto J_G(n)$, l'entier $n$ étant identifié au mot infini $J_G(n)$. De manière évidente, pour $x \in \mathcal{K}_G$ et $m \geq 0$, le mot infini $x_0 \ldots x_m 0^\omega$ correspond au $G$-développement de l'entier

$$S_{m+1}(x) := x_0 G_0 + \ldots + x_m G_m.$$

Il en résulte que l'image canonique $J_G(\mathbb{N})$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{K}_G$ est partout dense. Inversement, soit $w = w_0 \ldots w_m$ un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}$ ($w_i \in \mathbb{N}$ pour chaque indice $i$). Il est dit *$G$-admissible* si $w0^\omega \in \mathcal{K}_G$; il existe alors un unique entier $n$ tel que $J_G(n) = w0^\omega$ et il sera pratique d'utiliser de manière équivalente les notations $n$, $w$, $J_G(n)$ et $w0^\omega$. A l'usage, la référence à l'échelle sera omise lorsqu'aucune ambiguïté ne sera à craindre. Enfin, le cylindre dans $\mathcal{K}_G$ de base $w$ sera noté $[w]$, i.e.

$$[w_0 \ldots w_m] := \{x \in \mathcal{K}_G : x_0 \ldots x_m = w_0 \ldots w_m\}$$

et $e_k : \mathcal{K}_G \to \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) désignera la fonction $k$-ième coordonnée, de sorte que $x = e_0(x) e_1(x) e_2(x) \ldots$

**2.3.** *Successeur et odomètre.*Le calcul du successeur d'un entier $n$ (ou addition de 1) dans l'échelle $G$ consiste tout d'abord à déterminer à partir du $G$-développement $J(n) = e_0 e_1 e_2 \ldots$ de $n$ le plus grand indice $m$ pour lequel $\sum_{k=0}^{m} e_k G_k = G_{m+1} - 1$, de sorte que le $G$-développement de $n + 1$ est donné par

$$J(n+1) = 0^{(m+1)}(e_{m+1} + 1) e_{m+2} e_{m+3} e_{m+4} \ldots$$

Si un tel indice n'existe pas, c'est que

$$J(n+1) = (e_0 + 1) e_1 e_2 \ldots$$

Cette construction algorithmique conduit à introduire pour tout élément $x = x_0x_1x_2\ldots$ de $\mathcal{K}_G$ l'ensemble

$$\mathcal{D}(x) := \Big\{d \geq 0 : \sum_{k=0}^{d} x_k G_k = G_{d+1} - 1\Big\},$$

puis de prolonger l'addition de 1 en une application $\tau : \mathcal{K}_G \to \mathcal{K}_G$ définie, pour les $x$ tels que $\mathcal{D}(x)$ est fini, par

$$\tau(x) = 0^{(l+1)}(x_{l+1} + 1)x_{l+2}x_{l+3}x_{l+4}\ldots \tag{4}$$

où $l := \max \mathcal{D}(x)$ si $\mathcal{D}(x)$ est non vide, $l = -1$ sinon, et $\tau(x) := 0^\omega$ lorsque $\mathcal{D}$ est infini. Dans tous les cas, on voit facilement que

$$\tau(x) := \lim_n J(S_n(x) + 1).$$

L'ordre total sur $\mathbb{N}$ se prolonge aussi de manière naturelle en un ordre $\preceq$ sur $\mathcal{K}_G$, dit *antipodal.* Par définition, $x \preceq y$ si $x = y$ ou s'il existe un indice $m$ tel que $x_m < y_m$ et $x_k = y_k$ pour tous les indices $k$ strictement plus grands que $m$. Si l'intervalle $]x, \to[\ = \{y \in \mathcal{K}_G : x \preceq y,\ x \neq y\}$ n'est pas vide (dans tous les cas, il forme une chaîne finie ou dénombrable), alors il admet un plus petit élément $x^+$ pour l'ordre antipodal; c'est le *successeur* de $x$ et $\tau(x) = x^+$. Par contre, si $]x, \to[$ est vide, cela équivaut à $\mathcal{D}(x)$ infini et donc $\tau(x) = 0^\omega$ par construction. Nous renvoyons à [GrLiTi] pour une description plus détaillée de l'odomètre $(\mathcal{K}_G, \tau)$ ainsi construit.

Lorsque les conditions (2) correspondent à un diagramme de Bratteli déterminé par une suite de matrices d'incidence $M^{(n)}$ de sorte que $\mathcal{K}_G$ soit donné par (3), la construction de $\tau$, comme application successeur, coïncide, aux points extrémaux près, avec la transformation *adique* de Vershik [Ve] (voir aussi [HePuSk] pour une généralisation). Cette identification relève donc d'une propriété particulière de l'échelle $G$, mais en général $\mathcal{K}_G$ n'est pas décrit par un tel diagramme. On illustrera ces deux situations dans les exemples 1, 2 et 3 de la section 4.1. Dans la section suivante, nous caractérisons les cas où $\mathcal{K}_G$ est dénombrable; ils ne relèvent pas de la construction par diagrammes de Bratteli simples.

**3. Classification topologique.** La structure topologique de $\mathcal{K}_G$ est essentiellement liée à sa cardinalité, que nous allons donc commencer par étudier. Comme le montre le cas dyadique ($G_n = 2^n$) et bien d'autres échelles classiques, l'opération de compactification ne donne pas en général un ensemble dénombrable. La proposition suivante fournit diverses caractérisations des cas où cela advient.

THÉORÈME 1. *Pour une échelle de numération $G$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{K}_G$ *est dénombrable*;

(ii) *la suite* $(G_{n+1} - G_n)_n$ *est bornée*;

(iii) $J_G(\mathbb{N}) = \mathcal{K}_G$;

(iv) $\mathcal{K}_G$ *possède au moins un point isolé.*

Démonstration. Supposons la suite $(G_{n+1} - G_n)_n$ non bornée. Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers $\sigma(n)$, $n \geq 0$, telle que

$$G_{\sigma(0)} + G_{\sigma(1)} + \ldots + G_{\sigma(n)} < G_{\sigma(n)+1}.$$

Par exemple $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, puis, les $\sigma(k)$ étant déjà déterminés pour $0 \leq k \leq n$, remarquons qu'il existe, par hypothèse, un entier $m \geq \sigma(n)$ tel que $G_{\sigma(0)} + G_{\sigma(1)} + \ldots + G_{\sigma(n)} < G_{m+1} - G_m$. Il suffit alors de choisir $\sigma(n+1) = m$. Posons $\Sigma = \sigma(\mathbb{N})$. Par construction, pour toute partie $S$ de $\Sigma$, le mot infini $e(S) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $e(S)_k = 1$ si $k \in S$ et $e(S)_k = 0$ sinon, est dans $\mathcal{K}_G$; donc $\mathcal{K}_G$ n'est pas dénombrable. L'implication (i)⇒(ii) en résulte par contraposée.

(ii)⇒(iii). Remarquons tout d'abord que, par unicité du $G$-développement, les éléments de $\mathcal{K}_G$ dont le développement est formé de chiffres tous nuls sauf un nombre fini sont exactement les éléments de $J_G(\mathbb{N})$. D'autre part, si la suite $(G_{n+1} - G_n)_n$ est bornée, disons par $M$, alors pour tout entier $m$ assez grand, le $G$-développement de $m$ est de la forme $J(m) = e_0 \ldots e_k 0^{(n-k-1)} 10^{\omega}$ avec $e_0 + e_1 G_1 + \ldots + e_k G_k \leq M$ (et $G_n \leq m < G_{n+1}$). Il en résulte que $\overline{J_G(\mathbb{N})} = J_G(\mathbb{N}) = \mathcal{K}_G$.

(iii)⇒(iv). Cette implication résulte du fait général selon lequel, dans un espace de Baire dénombrable, l'ensemble des points isolés forme une partie dense de cet espace.

(iv)⇒(i). Si $x = x_0 x_1 x_2 \ldots$ est un point isolé de $\mathcal{K}_G$, il existe $l$ tel que $[x_0 \ldots x_l] = \{x\}$, donc, en fait, $x = x_0 \ldots x_l 0^{\omega}$ et, pour tout entier $p \geq 0$, le mot infini $x_0 \ldots x_l 0^{(p)} 10^{\omega}$ n'appartient pas à $\mathcal{K}_G$. En d'autres termes, et en accord avec (2), $G_{n+1} - G_n \leq S_{l+1}(x)$ pour $n \geq l+1$. La suite $n \mapsto G_{n+1} - G_n$ est donc bornée, et puisque (ii) implique (iii), $\mathcal{K}_G$ est dénombrable. ∎

Ces équivalences permettent de donner une description topologique précise de $\mathcal{K}_G$.

THÉORÈME 2. (i) *Si* $\mathcal{K}_G$ *est dénombrable*, *alors*

$$a := \limsup_n (G_{n+1} - G_n) < \infty \quad \textit{et} \quad \mathcal{K}'_G = \{J_G(0), \ldots, J_G(a-1)\}.$$

(ii) *Si* $\mathcal{K}_G$ *n'est pas dénombrable*, *alors* $\mathcal{K}_G$ *est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.*

Démonstration. (i) Supposons $\mathcal{K}_G$ dénombrable. D'après le théorème 1, $a := \limsup_n (G_{n+1} - G_n)$ est fini. Alors, $e_0 e_1 \ldots e_l 0^\omega \in \mathcal{K}'_G$ si et seulement s'il existe une infinité d'entiers $p \geq 0$ tels que $e_0 e_1 \ldots e_l 0^{(p)} 10^\omega \in \mathcal{K}_G$, donc si et seulement si $e_0 + e_1 G_1 + \ldots + e_l G_l < G_{n+1} - G_n$ pour une infinité de valeurs de $n$. Ainsi, $\mathcal{K}'_G = \{J(0), \ldots, J(a-1)\}$.

(ii) Si $\mathcal{K}_G$ n'est pas dénombrable, alors il est parfait d'après le théorème 1. En outre, $\mathcal{K}_G$ est compact, métrisable, totalement discontinu; c'est là la caractérisation topologique de l'ensemble de Cantor. ∎

## 4. L'arbre des retenues

**4.1.** *Définition et exemples.* Rappelons, pour $x \in \mathcal{K}_G$, la notation $S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n x_k G_k$. Par définition, $\mathcal{D}(x)$ est aussi l'ensemble des entiers $d \geq 0$ tels que $S_{d+1}(x) = G_{d+1} - 1$. En particulier $\mathcal{D}(0^\omega) = \emptyset$ et $d \in \mathcal{D}(G_{d+1} - 1)$. L'ensemble $\mathcal{D}(x)$, s'il n'est pas vide, sera indexé par ordre croissant et $d_k(x)$ désignera son $k$-ième élément. En particulier $d_1(x) = \min \mathcal{D}(x)$. Soit maintenant $d \in \mathcal{D}(x)$ et soit $k$ un entier tel que $0 \leq k \leq d+1$; alors,

$$S_k(x) = S_k(S_{d+1}(x)) = S_k(G_{d+1} - 1),$$

ce qui montre que $\mathcal{D}(x) \cap \{0, \ldots, d\} = \mathcal{D}(G_{d+1} - 1)$. Ainsi, pour $x$ et $y$ dans $\mathcal{K}_G$, $d \in \mathcal{D}(x) \cap \mathcal{D}(y)$ entraîne $\mathcal{D}(x) \cap \{0, \ldots, d\} = \mathcal{D}(y) \cap \{0, \ldots, d\}$. Cette remarque permet de décrire le phénomène des sauts de retenues par une relation d'arbre $\varrho_G$, dont l'ensemble des nœuds est $\mathbb{A} := \{-1\} \cup \mathbb{N}$ et dont les branches sont déterminées comme suit :

(i) $\{-1, n\} \in \varrho_G$ si et seulement si $\mathcal{D}(G_{n+1} - 1) = \{n\}$;

(ii) $\{m, n\} \in \varrho_G$ (en supposant $m < n$) si et seulement si

$$m = \max(\mathcal{D}(G_{n+1} - 1) \setminus \{n\}).$$

Nous enracinerons l'arbre en $-1$. La structure d'arbre enraciné ainsi décrite sur $\mathbb{A}$ sera noté $\mathcal{T}_G$. Rassemblons les divers cas qui impliquent l'existence de branches dans $\mathcal{T}_G$ :

Proposition 1. *Il existe une branche de l'arbre des retenues $\mathcal{T}_G$ entre $m$ et $n$ ($m < n$) si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite* :

(i) $m = -1$ *et* $n = 0$;

(ii) $m = -1$ *et* $J(G_{n+1} - 1) = a_0 \ldots a_n 0^\omega$ *avec* $\mathcal{D}(a_0 \ldots a_{n-1} 0^\omega) = \emptyset$;

(iii) $m \geq 0$ *est le plus grand entier* $k < n$ *tel que* $J(G_{n+1} - 1) = a_0 \ldots a_n 0^\omega$ *et* $J(G_{k+1} - 1) = a_0 \ldots a_k 0^\omega$.

Tirons quelques premières conséquences :

Corollaire 1. (i) *Si* $G_{n+1} = a_n G_n + b_n$ *avec* $a_n \geq 1$ *et* $1 \leq b_n < G_1$, *alors il existe une branche entre* $-1$ *et* $n$.

(ii) *Il existe une branche entre les entiers* $n \geq 0$ *et* $n+1$ *si et seulement si* $G_{n+1}$ *divise* $G_{n+2}$.

D é m o n s t r a t i o n. (i) est une conséquence de la proposition 1(ii). Montrons (ii). S'il existe une branche entre $n$ et $n+1$, d'après la proposition 1(iii) on peut écrire $G_{n+2} - 1 = a_{n+1}G_{n+1} + (G_{n+1} - 1)$, avec $a_{n+1} \geq 1$, et donc $G_{n+2} = (a_{n+1} + 1)G_{n+1}$. Réciproquement, si $G_{n+2} = (a + 1)G_{n+1}$ et $J(G_{n+1} - 1) = a_0 \ldots a_n 0^\omega$ alors, immédiatement, $J(G_{n+2} - 1) = a_0 \ldots a_n a 0^\omega$, d'où une branche entre $n$ et $n + 1$. ■

Avant de poursuivre l'étude de ces arbres, examinons quelques cas particuliers.

EXEMPLE 1 (arbre linéaire). Il est facile de voir que les échelles de Cantor, qui sont les échelles de la forme $G_{n+1} = d_n G_n$, $d_n \geq 2$, ont pour arbre des retenues l'arbre linéaire pour lequel il existe une branche entre $n$ et $n + 1$ pour tout entier $n \geq -1$. D'après le corollaire 1, la réciproque est vraie : toute échelle dont l'arbre des retenues est linéaire est une échelle de Cantor. D'autre part, $\mathcal{K}_G$ est décrit par le diagramme de Bratteli dont les matrices d'incidence ont tous leurs coefficients égaux à 1. L'odomètre est donc ici le système adique de Vershik [Ve] qui est isomorphe à l'addition de 1 dans le groupe des entiers $(d_0, d_1, d_2, \ldots)$-adiques $\varprojlim_n \mathbb{Z}/d_0 \ldots d_n \mathbb{Z}$.

EXEMPLE 2 (arbre buisson). Pour l'échelle $G_n = n + 1$, il y a une branche entre la racine et chaque nœud $n \geq 0$; il en est de même des échelles de la forme $G_n = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ ($q$ entier $\geq 2$) qui sont toutes des cas particuliers du corollaire 1(i). Notons que là encore, $\mathcal{K}_G$ n'est pas décrit par un compactum de Bratteli selon [Ve]. Pour $q \geq 2$, on obtient un odomètre uniquement ergodique d'après [Do] (voir aussi [BaDoLi]) et d'après un résultat de Vershik ([Ve], théorème 3), il est métriquement isomorphe à un système adique dont le diagramme de Bratteli associé (qui n'est pas unique) ne correspond pas à l'échelle sous-jacente.

EXEMPLE 3 (arbre de Fibonacci). L'échelle est donnée par la suite de Fibonacci $F_n = 1, 2, 3, 5, \ldots$ qui vérifie $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$ ($n \geq 1$). L'arbre des retenues dit *de Fibonacci* est donc formé d'après la proposition 1(iii) de deux chaînes infinies $\{-1, 0, \ldots, 2n, 2n + 2, \ldots\}$ et $\{-1, 1, \ldots, 2n + 1, 2n + 3, \ldots\}$. Il en est de même des échelles d'Ostrowski [Os] définies par la donnée d'une suite d'entiers $a_n \geq 1$ et les relations de récurrence $G_{n+2} = a_{n+1}G_{n+1} + G_n$ avec $G_0 = 1$, $G_1 = a_0$ si $a_0 > 1$ et $G_1 = a_1 + 1$ sinon. Dans cet exemple, pour tout $e = e_0 e_1 e_2 \ldots \in \mathcal{K}_G$, (2) est équivalent à

$$\forall k \geq 1,\ e_k = a_{k+1} \Rightarrow e_k = 0;$$

l'odomètre est alors exactement la première réalisation adique, décrite dans [SiVe], de la translation $x \mapsto x + \alpha$ sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les entiers $a_n$ étant les quotients partiels du développement en fraction continuée de $\alpha$.

REMARQUE 1. Les exemples précédents montrent bien que deux échelles de même arbre des retenues peuvent déterminer des odomètres très différents ou présenter des caractéristiques communes. Par exemple, l'arbre linéaire caractérise toute une classe de transformations parfaitement identifiées sur le plan spectral. Mais en général, il n'y a pas dépendance directe entre les propriétés spectrales d'un odomètre et son arbre des retenues. C'est notamment le cas de l'arbre buisson donnant aussi bien un $G$-compactifié de $\mathbb{N}$ dénombrable (d'odomètre banal, sans mesure invariante) qu'un ensemble de Cantor (d'odomètre uniquement ergodique et faiblement mélangeant, cf. [Do]).

**4.2.** *Descente, hauteur et échelles basses.* Dans toute la suite, nous n'envisagerons sur $\mathbb{A}$ que des relations d'arbre $\alpha$ enracinées en $-1$, $\alpha$ désignant aussi bien la relation que l'arbre enraciné correspondant. Pour deux nœuds $n$ et $m$ quelconques de $\alpha$, $d_\alpha(n,m)$ désignera la distance géodésique de $n$ à $m$ dans l'arbre $\alpha$. Si $n \neq m$, $d_\alpha(n,m)$ est le plus petit entier $k$ tel qu'il existe un chemin $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ sur l'arbre $\alpha$ (i.e. $\{a_i, a_{i+1}\} \in \alpha$ pour $i = 0, \ldots, k-1$) allant de $a_0 = n$ à $a_k = m$. Par définition d'un arbre, ce chemin existe toujours, il est unique et sa longueur est $k$. La *hauteur* d'un nœud dans l'arbre $\alpha$, par rapport à la racine, est par définition $H_\alpha(m) = d_\alpha(-1, m)$. L'arbre $\alpha$ sera dit *monotone* si pour tout nœud $m \neq -1$, le chemin $(-1, m_1, \ldots, m_k)$ allant de $-1$ à $m_k = m$ est ordonné croissant, i.e. $-1 < m_1 < \ldots < m_k$. A chaque arbre monotone $\alpha$, nous associerons l'application $T_\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ appelée *descente* de l'arbre, définie par $T_\alpha(-1) = -1$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $T_\alpha(n) = m$ si $\{m, n\} \in \alpha$ et $m < n$. Réciproquement, il est clair que toute application $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ telle que $T(-1) = -1$ et $T(n) < n$ si $n \in \mathbb{N}$ détermine une structure d'arbre $\alpha$ unique sur $\mathbb{A}$ dont $T$ est la descente.

THÉORÈME 3. (i) *L'arbre des retenues d'une échelle est monotone.*

(ii) *Soit $\alpha$ une relation d'arbre monotone sur $\mathbb{A}$. Alors, il existe une échelle $G$ dont l'arbre des retenues est $\alpha$.*

Démonstration. La partie (i) du théorème est une conséquence directe de la construction de l'arbre des retenues. La partie (ii) est un corollaire du résultat suivant plus précis. ∎

THÉORÈME 4 (et définition). *Soit $\alpha$ une relation d'arbre monotone sur $\mathbb{A}$ de descente $T(\cdot)$ et de fonction hauteur $H(\cdot)$. Alors :*

(i) *La suite des entiers $M_n$ $(n \geq 0)$ déterminés par $M_0 = 1$ et*

$$M_{n+1} = M_n + M_{T(n)} + \ldots + M_{T^{H(n)-1}(n)} + 1 = M_n + M_{T(n)+1} \tag{5}$$

*est une échelle dont l'arbre des retenues est $\alpha$; cette échelle est dite* échelle basse *de $\alpha$ (de même, une échelle $G$ sera dite basse si elle est échelle basse de $\varrho_G$, son arbre des retenues).*

(ii) *Pour toute échelle $G$ dont l'arbre des retenues est $\alpha$, on a $M_n \leq G_n$ pour tout $n$.*

Démonstration. La propriété (ii) est une conséquence sans surprise du fait général que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathcal{D}(G_{n+1}-1) = \{n, T(n), \ldots, T^{h-1}(n)\},$$

où $h := \operatorname{card} \mathcal{D}(G_{n+1}-1) = H(n)$ et où $H(\cdot)$, $T(\cdot)$ sont respectivement les fonctions hauteur et descente associées à l'arbre des retenues de $G$, tandis que

$$J(G_{n+1}-1) = a_{n,0} \ldots a_{n,n} 0^\omega \quad (\in \mathcal{K}_G)$$

avec des entiers $a_{n,d} \geq 1$ pour tout $d \in \mathcal{D}(G_{n+1}-1)$. Il reste à démontrer (i). Par construction, $(M_n)_n$ est une échelle et le $M$-développement de $M_{n+1}-1$ est donné par (5). Il en résulte que

$$\mathcal{D}(M_{n+1}-1) = \{n, T(n), \ldots, T^{H(n)-1}(n)\},$$

ce qui montre que $T(\cdot)$ (resp. $H(\cdot)$) est la fonction descente (resp. hauteur) de l'arbre des retenues de l'échelle $M$. ∎

Tout arbre monotone détermine de manière univoque une échelle basse d'après le théorème 4(ii). Pour l'arbre linéaire (exemple 1), cette échelle est celle de la numération binaire; pour l'arbre buisson (exemple 2), c'est l'échelle $G_n = n+1$, la plus petite donc, et pour l'arbre de Fibonacci (exemple 3), c'est l'échelle de même nom.

La croissance d'une échelle basse est limitée; en effet :

PROPOSITION 2. *Soit $\alpha$ un arbre monotone sur $\mathbb{A}$ d'échelle basse $M$. Alors $M_n \leq 2^n$ pour tout $n \geq 0$. De plus, la borne est atteinte car l'échelle $n \mapsto 2^n$ est une échelle basse.*

Démonstration. D'après (5), $M_{n+1} = M_n + M_{T(n)+1}$, donc $M_{n+1} \leq 2M_n$ avec $M_0 = 1$, d'où $M_n \leq 2^n$ par récurrence sur $n$ avec égalité si $T(n) = n-1$ pour tout $n \geq 0$. ∎

REMARQUE 2. Il est possible de contrôler complètement l'échelle $G$ à partir de son arbre des retenues à condition d'effectuer un étiquetage des branches. Plus précisément, si $\{m,n\} \in \varrho_G$, $m < n$, on sait [GrLiTi] que

$$G_{n+1} - G_{m+1} = a_{n,m+1} G_{m+1} + \ldots + a_{n,n} G_n \tag{6}$$

pour des entiers $a_{n,i} \geq 0$, $m < i \leq n$ et $a_{n,n} \geq 1$, d'où l'étiquetage $E_G : \varrho_G \to \mathbb{N}_*$ défini par

$$E_G(m,n) := a_{n,m+1} \ldots a_{n,n} \quad (m < n). \tag{7}$$

Notons que le mot $E_G(m,n)$ est de longueur $n-m$. Il est clair que la connaissance de l'arbre étiqueté $(\varrho_G, E_G)$ détermine complètement $G$. Réciproquement, soit $\alpha$ une relation d'arbre monotone sur $\mathbb{A}$ et soit $E : \alpha \to \mathbb{N}_*$

un étiquetage des branches $\{m,n\}$ $(m<n)$ de $\alpha$ par des mots $E(m,n)$ sur l'alphabet $\mathbb{N}$, de longueur $n-m$ et de dernière lettre $a_{n,n}\geq 1$. Considérons alors la suite des entiers $(G_n)_n$ déterminée par

$$(8)\qquad G_0=1 \quad \text{et} \quad G_{n+1}=1+\sum_{k=0}^{H(n)-1}\ \sum_{T^{k+1}(n)<j\leq T^k(n)} a_{T^k(n),j}G_j,$$

où $H(\cdot)$ et $T(\cdot)$ sont respectivement hauteur et descente de $\alpha$. Il est immédiat que $G$ est une échelle. C'est exactement l'échelle basse de $\alpha$ si $E(m,n)=0^{(m-n-1)}1$. Dans le cas général, l'arbre $\mathcal{T}_G$ ne coïncide pas avec $\alpha$. Pour que $\mathcal{T}_G=\alpha$, il faut et il suffit que pour tout $n\geq 0$ on ait

$$(\forall j)\ \Big(T(n)<j\leq m \Rightarrow \sum_{T(n)<k\leq j} a_{n,k}G_k < G_{j+1}-G_{T(n)+1}\Big).$$

Donnons une suite à ces remarques :

PROPOSITION 3. *Soit $\alpha$ une relation d'arbre monotone sur $\mathbb{A}$ et soit $\Gamma$ une échelle quelconque. Il existe une infinité non dénombrable d'échelles $G$ telles que $\varrho_G=\alpha$ et vérifiant $\Gamma_n\leq G_n$ pour tout $n\geq 0$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer tout d'abord que l'étiquetage $E:\alpha\to\mathbb{N}_*$ défini par $E(m,n)=0^{(n-m-1)}b_n$ $(m<n)$, où $n\mapsto b_n$ est une suite d'entiers $\geq 1$, détermine par (8), c'est-à-dire ici par

$$G_{n+1}:=1+\sum_{k=0}^{H(n)-1} b_{T^k(n)}G_{T^k(n)}$$

avec $T=T_\alpha$ et $H=H_\alpha$, une échelle d'arbre des retenues $\varrho_G=\alpha$; reste à choisir les $b_n$ suffisamment grands (par exemple, $b_n\geq\Gamma_{n+1}$). ∎

REMARQUE 3. Si $\mathcal{K}_G$ est dénombrable, il est facile de voir que les fonctions descente et hauteur associées à l'arbre des retenues sont bornées. La réciproque est fausse puisque pour une arbre monotone $\alpha$ de descente bornée (ou de hauteur bornée, ce qui est la même chose), l'échelle construite à partir de l'étiquetage $E:\alpha\to\mathbb{N}_*$ (cf. remarque 2) défini par $E(m,n)=0^{(n-m-1)}2$ $(m<n)$ vérifie $G_{n+1}-G_n>G_n$.

**4.3.** *Echelles de type fini*

DÉFINITION. Un arbre sera dit *de type fini* si le *degré* de chaque nœud (le nombre de branches issues de ce nœud) est fini.

Par extension, une échelle sera dite de type fini si son arbre des retenues l'est. L'introduction de cette notion trouvera sa pleine justification dans l'étude de la continuité de l'odomètre. La proposition suivante exploite simplement les définitions; sa démonstration est laissée au lecteur.

PROPOSITION 4. *Soit $\alpha$ un arbre monotone sur $\mathbb{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *$\alpha$ est de type fini*;
(ii) *pour tout $n \in \mathbb{A}$, l'ensemble $T_\alpha^{-1}(n)$ est fini*;
(iii) $\lim_n T_\alpha(n) = \infty$;
(iv) *pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'ensemble $H_\alpha^{-1}(h)$ est fini*;
(v) $\lim_n H_\alpha(n) = \infty$.

EXEMPLE 4 (arbre $q$-linéaire). Considérons une partition de $\mathbb{N}$ en $q$ parties infinies $P_j$ $(0 \le j < q)$ et définissons l'arbre monotone sur $\mathbb{A}$ dont la descente $T$ est déterminée pour $x \in P_j$ par $T(x) = \max(\{-1\} \cup \{n \in P_j : n < x\})$. Le cas particulier où $P_j = \{n : n \equiv j \pmod q\}$ donne l'échelle basse $Q$ commençant par $1, \ldots, q-1$ et satisfaisant à la récurrence $Q_{n+1} = Q_n + Q_{n-q+1}$. Cette échelle est de type fini.

EXEMPLE 5 (arbre rideau). La construction précédente se généralise en considérant une partition dénombrable de $\mathbb{N}$ en parties infinies $P_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. L'échelle correspondant aux parties $P_n = 2^{n+1}\mathbb{N} + 2^n - 1$ sera dite *de van der Corput*. Cette échelle n'est pas de type fini.

EXEMPLE 6 (arbre peigne). Définissons l'arbre par sa descente, à savoir $T(2(n+1)) = T(2n+1) = 2n$ si $n \ge 0$. L'échelle basse correspondante $M$ se détermine explicitement, à savoir $M_{2n+j} = 2^j \cdot 3^n$ pour $n \ge 0$ et $j = 1, 2$. Cette échelle est de type fini.

EXEMPLE 7 (arbre linéaire+buisson). Choisissons une partie infinie $P$ de $\mathbb{N}$, de complémentaire $Q = \mathbb{N} \setminus P$ infini. La descente de l'arbre est alors définie par $T(Q) = \{-1\}$ et pour $x \in P$, $T(x) = \max(\{-1\} \cup \{n \in P : n < x\})$. Cette échelle n'est pas de type fini.

EXEMPLE 8 (arbre binaire). Il s'agit de l'arbre classique des choix binaires. Pour le déterminer complètement, il convient de numéroter les nœuds de manière à obtenir un arbre monotone sur $\mathbb{A}$. Nous adopterons la numérotation déterminée par la fonction descente suivante : $T(2k) = T(2k+1) = k-1$ pour $k \ge 0$. Cette échelle est de type fini; l'échelle basse associée $B$ vérifie la récurrence $B_{n+1} = B_n + B_{\lfloor n/2 \rfloor}$.

PROPOSITION 5. *Soit $G$ une échelle de type fini. Alors* :

(j) $\lim_n (G_{n+1} - G_n) = \infty$;
(jj) *$\mathcal{K}_G$ est un espace de Cantor.*

Démonstration. Supposons que (j) ne soit pas vérifiée; alors, il existe une constante $C \ge 1$ telle que $G_{n+1} - G_n \le C$ pour une infinité d'entiers $n$. Pour de tels entiers, on a donc $G_{m+1} = G_m + b_m$ avec $1 \le b_m \le C$, d'où $T_G(m) \le r$ pour un entier $r$ quelconque vérifiant $G_r \ge C$. Par suite, il existe $r_0 \in \mathbb{A}$ tel que $T_G^{-1}(r_0)$ soit infini. L'indice de $\mathcal{T}_G$ en $r_0$ est donc infini, contrairement à l'hypothèse. La propriété (jj) est une conséquence directe de (j) et des théorèmes 1 et 2. ∎

REMARQUE 4. Une conséquence de la proposition 3 est qu'il existe des échelles dont la croissance est arbitrairement grande et dont l'arbre des retenues n'est pas de type fini. La proposition ci-dessus montre qu'une échelle $G$ de type fini vérifie nécessairement $\lim_n G_{n+1}/(n+1) = \infty$ et il est possible de construire de telles échelles de croissance surlinéaire arbitairement lente comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 6. *Soit* $(L_n)_n$ *une suite d'entiers* $\geq 1$ *telle que* $\lim_n L_{n+1}/(n+1) = \infty$. *Alors il existe un arbre monotone sur* $\mathbb{A}$ *dont l'échelle basse associée* $M$ *est de type fini et de plus* $M_n \leq L_n$ *dès que* $n$ *est assez grand.*

Démonstration. Commençons par établir le lemme suivant :

LEMME 1. *Pour toute suite strictement croissante d'entiers* $N_m \geq 1$ $(m \geq 1)$ *il existe un arbre monotone sur* $\mathbb{A}$ *dont l'échelle basse* $M$ *est donnée par*

$$M_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } 0 \leq n \leq N_1, \\ M_{n-1} + M_m & \text{si } N_m < n \leq N_{m+1} \end{cases} \tag{9}$$

(*en particulier* $M_n = M_{N_m} + (n - N_m)M_m$ *dans le dernier cas*). *De plus, cette échelle est de type fini.*

Démonstration. Construisons l'application $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ en posant $T(n) = -1$ si $0 \leq n < N_1$ et $T(n) = m - 1$ si $N_m \leq n < N_{m+1}$. Alors, il existe une relation d'arbre monotone $\alpha$ (unique) sur $\mathbb{A}$ dont $T$ est la descente. De plus, par construction $\lim_n T(n) = \infty$, donc $\alpha$ est de type fini (proposition 4). Soit $M$ l'échelle basse associée à $\alpha$. Par construction, $M_0 = 1$ et $M_{n+1} = M_n + 1$ pour $n = 0, \dots, N_1 - 1$, d'où $M_k = k + 1$ pour $0 \leq k \leq N_1$. Dans le cas de $N_m < n \leq N_{m+1}$, par définition de $M$ on a $M_n = M_{n-1} + M_{T(n-1)+1} = M_{n-1} + M_m$. ∎

Pour terminer la démonstration de la proposition 6, nous allons construire une suite strictement croissante d'entiers $N_m$ telle que l'échelle basse $M$ qui lui est associée par le lemme 1 et sa démonstration vérifie $M_n \leq L_n$ pour tout $n \geq N_1$. Remarquons que si $N_1, \dots, N_m$ sont déjà construits, alors la fonction descente $T$ est déterminée sur $\{-1, 0, 1, \dots, N_m - 1\}$ et l'échelle $(M_n)_n$ est connue pour $n = 0, 1, \dots, N_m$. Nous construisons $(M_k)_k$ par récurrence en même temps qu'une autre suite d'entiers $\lambda_k$. Commençons par choisir $\lambda_1 > \lambda_0 = 2$. Il existe $N_1 \geq 2$ tel que $n\lambda_1 \leq L_n$ pour $n \geq N_1$. Alors $T$ vaut $-1$ sur $\{-1, 0, \dots, N_1 - 1\}$, et $M_k = k + 1$ pour $0 \leq k \leq M_{N_1}$. En particulier,

$$M_{N_1} = N_1 + 1 \leq \lambda_0 N_1 \leq L_{N_1}.$$

Choisissons ensuite $\lambda_2 > \max\{\lambda_1, M_2\}$ puis $N_2$ tel que $n\lambda_2 \le L_n$ pour $n \ge N_2$. Puisque, par construction, $T(k) = 0$ pour $N_1 \le k < N_2$, on a pour $n$ tel que $N_1 < n \le N_2$,

$$\begin{aligned} M_n = M_{n-1} + M_1 &= M_{N_1} + (n - N_1)M_1 \\ &\le N_1\lambda_0 + (n - N_1)M_1 < n\lambda_1 \le L_n \end{aligned}$$

et, en particulier, $M_{N_2} \le N_2\lambda_1$. Si maintenant $N_k$ et $\lambda_k$ sont définis pour $k \le m$, choisissons $\lambda_{m+1} > \max\{\lambda_m, M_{m+1}\}$ puis $N_{m+1}$ de sorte que $n\lambda_{m+1} \le L_n$ pour $n \ge N_{m+1}$. Il y a donc un large arbitraire dans la construction des deux suites $(M_k)$ et $(\lambda_k)_k$. Soit alors $M$ l'échelle construite au lemme 1 et montrons par récurrence sur $m$ qu'elle vérifie

$$M_{N_{m+1}} \le N_{m+1}\lambda_m \le L_{N_{m+1}}, \qquad M_n \le L_n \quad \text{pour } N_m < n \le N_{m+1}.$$

Ces conditions sont remplies pour $m = 1$ par ce qui précède. Supposons-les vérifiées pour $m$. Alors, si $N_{m+1} < n \le N_{m+2}$, on a

$$\begin{aligned} M_n &= M_{N_{m+1}} + (n - N_{m+1})M_{m+1} \\ &\le N_{m+1}\lambda_m + (n - N_{m+1})M_{m+1} \le n\lambda_{m+1}. \end{aligned}$$

D'où $M_n \le L_n$ et $M_{N_{m+2}} \le N_{m+2}\lambda_{m+1} \le L_{N_{m+2}}$. ∎

La condition $\lim_n(G_{n+1} - G_n) = \infty$ n'est pas suffisante pour que l'échelle soit de type fini, comme le montre l'exemple $G_{n+1} = 2G_n + 1$; elle l'est dans le cas particulier des échelles basses :

PROPOSITION 7. *Pour une échelle basse $G$, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(j) $\lim_n(G_{n+1} - G_n) = \infty$;
(jj) *$G$ est de type fini.*

Démonstration. L'implication (jj)⇒(j) est une partie de la proposition 5; elle n'utilise pas l'hypothèse d'échelle basse. Réciproquement, si $G$ n'est pas de type fini, il existe $a \in \mathbb{A}$ et une infinité d'entiers $b$ tels que $T(b) = a$, ce qui donne $G_{b+1} = G_b + G_{a+1}$, puisque l'échelle est basse (cf. théorème 4), et contredit (j). ∎

REMARQUE 5. Comme le montre la proposition 5, toute échelle $(G_n)$ de type fini vérifie $\lim_n(G_{n+1} - G_n) = \infty$. Le lemme 1 fournit une famille d'exemples d'échelles basses $M$ de type fini telles que $\lim_n M_{n+1}/M_n = 1$; il suffit pour cela de choisir la suite $N_m$ suffisamment croissante, de manière à ce que par exemple $M_m \le N_m$. En effet, en se référant à (9), on a $M_{n+1}/M_n \le 1 + M_m/M_{N_m}$, or pour tout $C \ge 1$ on a $M_k \ge Ck$ dès que $k$ est assez grand (proposition 5). De manière générale, on a

$$\lim_n \frac{G_{n+1}}{G_n} = 1 \Rightarrow \lim_n (n - T_G(n)) = \infty.$$

En effet, $G_{n+1} \geq G_n + G_{T_G(n)+1}$ dans tous les cas et l'hypothèse sur $G_{n+1}/G_n$ assure l'existence de $B > 1$ tel que $G_{n+1} \leq BG_n$ pour tout entier $n$. D'où $G_{n+1}/G_n \geq 1 + 1/B^{n-T_G(n)-1}$.

La réciproque est fausse, mais si $(G_n)_n$ est une échelle basse vérifiant $\lim(n - T_G(n)) = \infty$, alors $\liminf G_{n+1}/G_n = 1$. De fait, s'il existe $n_0$ tel que, pour tout $n > n_0$, $G_{n+1}/G_n \geq 1 + \beta$, on a

$$G_{T_G(n)+1}/G_n \leq (1+\beta)^{-(n-\max(n_0, T_G(n)-1))},$$

donc $G_{T_G(n)+1}/G_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, ce qui contredit $G_{T_G(n)+1}/G_n = G_{n+1}/G_n - 1 \geq \beta$ pour $n > n_0$. L'exemple suivant donne un cas extrême.

Exemple 9. L'idée de la construction du lemme 1 peut servir de base pour exhiber des échelles basses $(M_n)_n$ de type fini vérifiant

$$\lim_n (n - T(n)) = \infty \quad \text{et} \quad \limsup_n M_{n+1}/M_n = 2.$$

Il suffit de pendre par exemple une suite $N_m$ telle que $N_{2m+2} = N_{2m+1} + 1$ et $N_{2m+1} - N_{2m} > ma_m$ avec une suite d'entiers $a_m \geq 1$ croissante, non bornée, et de définir l'arbre monotone sur $\mathbb{A}$ en prenant la descente $T$ telle que $T(n) = m - 1$ pour $N_{2m} \leq n < N_{2m+1}$ et $T(N_{2m+1}) = N_{2m+1} - a_m$. Le lecteur vérifiera qu'avec ce choix, on a

$$\frac{M_{N_{2m+1}+1}}{M_{N_{2m+1}}} \geq 2 - \frac{1}{m}.$$

## 5. Continuité et discontinuité

**5.1.** *Continuité et ensemble $\omega$-limite.* Pour tout entier $k \geq 0$, introduisons l'odomètre partiel $\tau_k : \mathcal{K}_G \to \mathcal{K}_G$ défini par

$$\tau_k(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{si } \mathcal{D}(x) = \emptyset \text{ ou } \max \mathcal{D}(x) < k, \\ 0^\omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière immédiate, l'application $\tau_k$ est continue et, par définition de $\tau$, $\lim_k \tau_k(x) = \tau(x)$. Il en résulte que $\tau$ est une application borélienne. La question de caractériser sa continuité se pose naturellement et une première réponse se trouve déjà dans [GrLiTi] :

Théorème 5. *Soit une échelle $G$ et l'odomètre $\tau : \mathcal{K}_G \to \mathcal{K}_G$ correspondant. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

$(C_0)$ *$\tau$ est continue;*

$(C_1)$ *pour tout $x \in \mathcal{K}_G$ il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $d$ pour lesquels il existe $y \in \mathcal{K}_G$ tel que $\mathcal{D}(y) = \mathcal{D}(x) \cup \{d\}$;*

$(C_2)$ *$G$ est de type fini.*

D é m o n s t r a t i o n. L'équivalence entre $(C_0)$ et $(C_1)$ correspond au théorème 1 de [GrLiTi] (p. 109). Celle entre $(C_1)$ et $(C_2)$ résulte de la proposition 4, (i) et (ii). ■

Rappelons que si $\tau$ est continue, alors $\tau$ est surjective et $(\mathcal{K}_G, \tau)$ est minimal ([GrLiTi], théorème 2, p. 109). On s'intéresse maintenant à la description de l'ensemble $\mathrm{Disc}(\tau)$ des éventuels points de discontinuité de $\tau$ ainsi qu'à des exemples montrant la variété des possibilités.

DÉFINITION 1. On appelle *ensemble $\omega$-limite* d'une échelle $G$ et l'on note $\omega(G)$ l'ensemble dérivé de $\{G_n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathcal{K}_G$.

Autrement dit, $\omega(G)$ est l'ensemble des points d'accumulation de la suite $n \mapsto J_G(G_n - 1)$. Par compacité de $\mathcal{K}_G$, $\omega(G)$ est non vide et compact. D'autre part, il est clair que

$$\tau^{-1}(0) \subset \omega(G).$$

Donnons un exemple simple : si la suite $n \mapsto G_{n+1} - G_n$ est bornée, alors $\{a-1\} \subset \omega(G) \subset \{0, \ldots, a-1\}$, avec $a = \limsup_n (G_{n+1} - G_n)$.

PROPOSITION 8. *L'ensemble des points de discontinuité de $\tau$ est*

$$\mathrm{Disc}(\tau) = \omega(G) \setminus \tau^{-1}(0).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in \omega(G)$. Alors, il existe $(n_k)_k$ telle que $x = \lim_k (G_{n_k} - 1)$, et $\lim_k \tau(G_{n_k} - 1) = \lim_k G_{n_k} = 0$. Ainsi, $\omega(G) \setminus \tau^{-1}(0) \subset \mathrm{Disc}(\tau)$.

Réciproquement, soit $x \notin \omega(G) \setminus \tau^{-1}(0)$. Si $x \in \tau^{-1}(0)$, soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe $m \in \mathcal{D}(x)$ tel que $m > N$. Alors, si $y$ est un élément de $\mathcal{K}_G$ vérifiant $e_k(y) = e_k(x)$ pour tout $k \leq m$, $m$ appartient à $\mathcal{D}(y)$, d'où $\tau y \in [0^{m+1}]$. On a donc bien $\lim_{y \to x} \tau y = 0 = \tau x$; $\tau$ est continue en $x$. De même, si $x \notin \omega(G)$, il existe un entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, le mot $e_0(x) \ldots e_n(x)$ ne soit le préfixe d'aucun élément de $\mathcal{K}_G$ de la forme $G_m - 1$. Alors, si $e_0(x) \ldots e_n(x)$ est préfixe de $y$, $\max \mathcal{D}(y)$ est strictement inférieur à $n$, d'où

$$\tau y = e_0(\tau x) \ldots e_n(\tau x) e_{n+1}(y) e_{n+2}(y) \ldots$$

Ainsi, $\lim_{y \to x} \tau y = \tau x$. ■

REMARQUE 6. Les éléments de $\tau^{-1}(0)$ se lisent sur l'arbre des retenues en ce qu'ils correspondent bijectivement à ses branches infinies : $\tau x = 0$ si et seulement si $x = \lim_k (G_{n_k} - 1)$ avec $n_0 = -1$ et $\{n_k, n_{k+1}\} \in \varrho_G$ pour tout $k$. Il s'ensuit, d'après le théorème 3, que $\tau^{-1}(0)$ peut être vide (cas de l'arbre buisson, exemple 2), de cardinalité fini $q$ quelconque (cas des arbres $q$-linéaires, exemple 4), dénombrable (comme pour l'arbre rideau, exemple 5), ou non dénombrable, comme par exemple dans l'arbre binaire (exemple 8), ou encore dans tout arbre dont le degré en chaque nœud est $\geq 3$.

Dans le cas des échelles basses, $\mathrm{Disc}(\tau)$ se lit également sur l'arbre des retenues, ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 9. *Soit $G$ une échelle basse. Alors*, $\mathrm{Disc}(\tau)$ *est exactement l'ensemble des $G_{n+1}-1$ tels que le nombre de branches de $\mathcal{T}_G$ issues du nœud $n$ est infini. En particulier*, $\mathrm{Disc}(\tau) \subset \mathbb{N}$.

Démonstration. Soient $G$ une échelle basse et $n$ un nœud de $\mathcal{T}_G$ dont sont issues une infinité de branches. Il existe une suite strictement croissante d'entiers $(m_j)_j$ telle que, pour tout $j$, $n < m_j$ et $\{n, m_j\} \in \varrho_G$. Alors, $G_{m_j+1} - 1 = G_{m_j} + G_{n+1} - 1$ tend vers $G_{n+1} - 1$ quand $j$ tend vers l'infini, donc $G_{n+1} - 1 \in \mathrm{Disc}(\tau)$.

Réciproquement, soit $x \in \omega(G)$. Si $x = e_0(x) \ldots e_n(x)0^\omega$ avec $e_n(x) \neq 0$ (donc $e_n(x) = 1$), alors $\tau x \neq 0$ et, pour un entier $l$ quelconque, il existe $m$ arbitrairement grand tel que $e_0(x) \ldots e_n(x)0^l$ soit préfixe de $G_{m+1} - 1$. L'échelle étant basse, il s'ensuit que $e_0(x) \ldots e_n(x) = G_{n+1} - 1$ et qu'il existe une suite strictement croissante $(p_j)_j$ telle que $T(p_j) = n$, ce qui signifie qu'une infinité de branches sont issues du nœud $n$. (Si $x = 0$, on peut considérer $n = -1$ dans ce qui précède). Enfin, si $x \in \omega(G) \setminus \mathbb{N}$, soit $n_i$ le $i$-ème entier tel que $e_{n_i}(x) = 1$. Le même raisonnement montre que $e_0(x) \ldots e_{n_i}(x) = G_{n_i+1} - 1$, d'où $\{n_i, n_{i+1}\} \in \varrho_G$ et $\tau x = 0$. ∎

REMARQUE 7. Soit $G$ une échelle non nécessairement basse. Supposons qu'il existe un nœud $n$ de $\mathcal{T}_G$ de degré infini : il existe $(n_j)_j$ strictement croissante telle que $\{n, n_j\} \in \varrho_G$. Alors, si $x$ est la limite d'une suite extraite convergente de $(G_{n_j+1} - 1)_j$, on a $\max \mathcal{D}(x) = n$, donc $\tau x \neq 0$ et $\tau$ est discontinue en $x$. De même, si $x \in \omega(G) \setminus \tau^{-1}(0)$ et $n := \max \mathcal{D}(x)$, on a $x = \lim_n (G_{n_j+1} - 1)$ pour une suite strictement croissante d'entiers $n_j$ et, pour $j$ suffisamment grand, $\{n, n_j\} \in \varrho_G$. On obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème 5 avec une précision supplémentaire : pour chaque nœud $n$ de degré infini, il existe au moins un point $x \in \mathcal{K}_G$ en lequel $\tau$ est discontinue tel que $\max \mathcal{D}(x) = n$.

**5.2.** *Orbites.* Le théorème 2 de [GrLiTi] montre que, quand $\tau$ est continue, le système dynamique $(\mathcal{K}_G, \tau)$ est minimal. Si $\tau$ n'est pas continue, il est toujours loisible, à défaut de parler de minimalité, de se demander si toutes les orbites sont denses. Notons que, par construction, il existe toujours au moins une orbite dense : celle de 0. L'exemple trivial de $G_{n+1} = G_n + 1$ montre que ce peut être la seule.

Les deux résultats suivants précisent ce que doit être une orbite non dense et donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en existe. Pour $x \in \mathcal{K}_G$, on note $\mathcal{O}_\tau(x) := \{x, \tau x, \tau^2 x, \ldots\}$ l'orbite de $x$ suivant $\tau$. Pour simplifier, l'indice $\tau$ sera omis dans toute cette section.

PROPOSITION 10. (i) *Pour tout* $x \in \mathcal{K}_G$, $0 \in \overline{\mathcal{O}(x)}$.

(ii) *Toutes les orbites sont infinies.*

(iii) *Si* $\mathcal{K}_G$ *est dénombrable*, *il existe des orbites non denses.*

(iv) *Si* $\mathcal{K}_G$ *n'est pas dénombrable*, $\mathcal{O}(x)$ *n'est pas dense si et seulement si* $\mathcal{O}(x)'$ *est fini*, *auquel cas* $\mathcal{O}(x)'$ *est un segment initial de* $\mathbb{N}$.

Démonstration. (i) Pour un élément $x$ non nul de $\mathcal{K}_G$, 0 n'est pas adhérent à son orbite si et seulement s'il existe un entier $M$ tel que $\max \mathcal{D}(\tau^n x) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, si $y \in \mathcal{K}_G$ est tel que $\max \mathcal{D}(y) < M$, on a $S_{M+1}(\tau y) = S_{M+1}(y) + 1$. Appliqué à l'ensemble des $\tau^n x$, cela implique que $S_{M+1}(x) + n < G_{M+1}$ pour tout $n$, ce qui est absurde.

(ii) Si $\mathcal{O}(x)$ était finie, alors $0 \in \mathcal{O}(x)$ d'après (i), donc $\mathcal{O}(x) \supset \mathbb{N}$, qui est infini.

(iii) Si $\mathcal{K}_G$ est dénombrable, $\mathcal{K}_G = \mathbb{N}$ possède d'après le théorème 2 un nombre fini de points d'accumulation. Si $a - 1$ est le plus grand d'entre eux, alors $a$ n'appartient à l'orbite fermée d'aucun entier $n \geq a + 1$.

(iv) S'il existe $n$ tel que $\tau^n x = 0$, alors $\mathcal{O}(x)$ est dense et $\mathcal{O}(x)'$ est infini. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas. Soient $x \in \mathcal{K}_G$ et $y \in \mathcal{O}(x)'$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe une infinité de $m > G_n$ tels que $e_k(\tau^m x) = y_k$ pour tout $k \leq n$. Alors, pour tout $j \leq S_{n+1}(y)$, $e_0(\tau^{m - S_{n+1}(y) + j} x) \ldots e_n(\tau^{m - G_n + j} x) = j$, ce qui montre que tout entier inférieur ou égal à $S_{n+1}(y)$ est point d'accumulation de $\mathcal{O}(x)$. En particulier, $y \notin \mathbb{N}$ entraîne $\mathbb{N} \subset \mathcal{O}(x)'$, d'où $\overline{\mathcal{O}(x)} = \mathcal{K}_G$. ■

EXEMPLE 10. Pour $G_n = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$, $q \geq 2$, on remarque que $qG_n + (q-1)(G_{n+1} + \ldots + G_{n+s-1}) = G_{n+s} - s$. Alors, $x := q(q-1)^\omega \in \mathcal{K}_G$ et $\tau^l x = 0^l q(q-1)^\omega$, d'où $\mathcal{O}(x)' = \{0\}$.

PROPOSITION 11. *Il existe des orbites non denses si et seulement s'il existe une suite strictement croissante* $(m_k)_{k \geq 1}$, *une suite* $(M_k)_k$ *d'entiers strictement positifs majorée par* $G_{m_1}$ *et* $x = x_0 x_1 \ldots \in \mathcal{K}_G$ *tels que*, *pour tout entier* $k$, *le développement de* $G_{m_{k+1}}$ *dans l'échelle* $G$ *est donné par*

$$G_{m_{k+1}} - 1 = x_{m_{k+1}-1} G_{m_{k+1}-1} + \ldots + x_{m_k+1} G_{m_k+1} + (1 + x_{m_k}) G_{m_k} + M_k - 1. \tag{10}$$

Démonstration. Si $\mathcal{K}_G$ est dénombrable, l'équivalence est claire, en prenant $m_{k+1} = m_k + 1$ et $x_{m_k} = 0$. Supposons désormais $\mathcal{K}_G$ non dénombrable. Soit $x \in \mathcal{K}_G$ dont l'orbite n'est pas dense. Soit $M$ le plus grand point d'accumulation de cette orbite (dont l'existence est donnée par la proposition 10(iv)). En vertu du même résultat, il existe $(m_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante et $(M_k)_k$ avec $0 < M_k \leq M < G_{m_1}$ pour tout $k$ telles que, pour un certain $j$,

$$\tau^j x = 0^{m_1}(1 + x_{m_1}) x_{m_1+1} x_{m_1+2} \ldots,$$
$$\tau^{j+M_1} x = 0^{m_2}(1 + x_{m_2}) x_{m_2+1} x_{m_2+2} \ldots \quad \text{et, pour tout } k,$$

$$\tau^{j+M_1+\ldots+M_k}x = 0^{m_{k+1}}(1+x_{m_{k+1}})x_{m_{k+1}+1}x_{m_{k+1}+2}\cdots$$

Cette suite d'égalités est équivalente à (10).

Réciproquement, supposons (10) muni des hypothèses afférentes, et posons

$$\widetilde{x} := 0^{m_1}(1+x_{m_1})x_{m_1+1}x_{m_1+2}\ldots$$

On vérifie facilement que, par construction, $\widetilde{x} \in \mathcal{K}_G$ et que

$$\max \mathcal{D}(\tau^{M_1+\ldots+M_k}\widetilde{x}) = m_{k+1} - 1.$$

L'orbite de $\widetilde{x}$ n'admet alors qu'un nombre fini de points d'accumulation. ∎

COROLLAIRE 2. (a) *Si, pour tout* $n$, $G_{n+1}-1 = a_nG_n+R_n$ *avec* $a_n \geq 1$, $R_n < G_n$ *et* $(R_n)_n$ *bornée, alors il existe des orbites non denses.*

(b) *Si* $G$ *est une échelle basse, alors les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) *toutes les orbites sont denses*,

(ii) $\tau^{-1}(0)$ *est non vide.*

Démonstration. (a) On applique la proposition 11 avec $m_{k+1} = m_k + 1$ et pour $m_0$ un majorant de la suite $(R_n)_n$.

(b) Si $G$ est une échelle basse, $\tau^{-1}(0)$ est non vide si et seulement s'il existe une branche infinie dans l'arbre des retenues $\mathcal{T}_G$, ce qui équivaut, toujours pour une échelle basse, à $\limsup(G_{n+1} - G_n) = \infty$, donc à $\mathcal{K}_G$ non dénombrable d'après le théorème 2. ∎

**5.3.** *Exemples et contrexemples*

EXEMPLE 11. Dans le cas d'une échelle basse, (10) se traduit par l'existence d'une constante $M$ et d'une suite strictement croissante $(m_k)_k$ telles que, pour tout $k$, $T(m_k) \leq M$ et $T^{s_k}(m_{k+1}-1) = m_k$ pour un certain $s_k$ (rappelons que $T$ est la fonction descente introduite à la section 4.2). Cela permet de construire facilement des échelles basses de croissance modulable dont les orbites ne sont pas toutes denses. Ainsi, si $(m_k)_k$ est donnée, prenons $G_{m_k} = G_{m_k-1}+1$ et $G_{m_k+j} = 2G_{m_k+j-1}$ pour $1 \leq j \leq m_{k+1}-m_k-1$, les premières valeurs de $G_n$, pour $n < m_1$, étant fixées arbitrairement.

EXEMPLE 12. Revenons sur l'exemple 5 en considérant l'échelle basse associée à l'arbre de van der Corput. Si $P_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots\}$, où les $a_j^{(n)}$ sont rangés par ordre croissant, alors, $\tau^{-1}(0) = \{\lim(G_{a_i^{(n)}+1} - 1) : n \geq 1\}$, $\tau^{-1}(0)' = \{0\} \notin \tau^{-1}(0)$ et $\omega(G) = \overline{\tau^{-1}(0)}$. En particulier, $\tau^{-1}(0)$ n'est pas fermé. Cela donne également un exemple où $\tau$ n'est pas continue, mais surjective, car, d'après [GrLiTi], $\tau$ est surjective si et seulement si $\tau^{-1}(0)$ est non vide. Notons que la présente construction et ses propriétés restent valables pour n'importe quel arbre rideau.

Exemple 13. Contrairement à ce qui se passe dans l'exemple précédent, $\tau^{-1}(0)$ n'est pas en général dense dans $\omega(G)$. C'est le cas notamment des échelles de hauteur bornée, dont l'arbre buisson donne une famille.

Exemple 14. On a vu que si $G_n = an + b$ à partir d'un certain rang, l'odomètre n'est pas continu. Il ne l'est pas non plus dans le cas où $(G_n)_n$ est donnée par un polynôme du second degré. Soit donc $G_n = an^2 + bn + c$ pour $n \geq n_0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Des calculs simples montrent que si l'on définit, pour $r \geq 1$, $k_r := 2ar$ et $n_r := 2a^2r^2 + br$, alors, pour $r$ suffisamment grand, on a $G_{k_r} = 2an_r + c$ et

$$G_{n_r+d} - 1 = G_{n_r+d-1} + G_{k_r} + (2ad + b - a - c - 1). \tag{11}$$

On choisit alors $d$ comme le plus petit entier strictement positif tel que $2ad + b \geq a + c + 1$. L'écriture (11) est alors un $G$-développement (pour $r$ grand). Alors, $H(G_{n_r+d} - 1)$ est bornée pour $r$ parcourant $\mathbb{N}$, donc $\tau$ n'est pas continue en vertu de la proposition 5.

L'étude des propriétés des échelles données par $G_n = P(n)$ avec $P \in \mathbb{Z}[X]$ reste largement ouverte.

Exemple 15. Soit $(G_n)_n$ définie par $G_0 = 1$, $G_1 = 2$ et $G_{n+1} := 2G_n - 1$ pour $n \geq 1$. Montrons que $\omega(G) = \mathcal{K}_G$.

Remarquons d'abord que $G_n = 2^{n-1} + 1$ pour tout $n \geq 1$ et que, pour $k \in \mathbb{N}$ et $l \geq 1$,

$$G_{k+1} + G_{k+2} + \ldots + G_{k+l} = G_{k+l+1} + (l - 2^k - 1). \tag{12}$$

Soit $x = x_0x_1 \ldots \in \mathcal{K}_G$. D'après (2), $x_n = 0$ ou 1 et d'après (12), il existe une infinité d'indices $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots$ tels que $x_{\sigma(j)} = 0$ pour tout $j$. De plus, si $u_j := S_{\sigma(j)+1}(x)$ et $y_j := x_0x_1 \ldots x_{\sigma(j)}1^{[2^{\sigma(j)}-u_j]}0^\omega$, (12) montre que $y_j \in \mathcal{K}_G$ et l'on vérifie par le calcul que $y_j = G_{[2^{\sigma(j)}-u_j+\sigma(j)+1]} - 1$. Comme $u_j \leq 2^{\sigma(j)}$, $2^{\sigma(j)} - u_j + \sigma(j) + 1$ tend vers l'infini quand $j$ tend vers l'infini, donc $x \in \omega(G)$, soit $\omega(G) = \mathcal{K}_G$. Par ailleurs, si $m \in \mathbb{N}$ et $m \leq G_{s+1} - 1$, (12) assure que pour tout $k > s$, on a $m + G_{k+1} + \ldots + G_{k+2^k-m} = G_{k+2^k-m+1} - 1$. Ainsi, tout mot fini sur $\mathcal{K}_G$ est facteur d'une infinité non dénombrable (on a une infinité de choix d'entiers) d'images réciproques de 0; en particulier, $\tau^{-1}(0)$ est dense dans $\mathcal{K}_G$. En transformant l'un des chiffres 1 d'un élément de $\tau^{-1}(0)$ en 0, on construit aussi une partie non dénombrable dense de $\omega(G) \setminus \tau^{-1}(0)$.

Enfin, si l'on prend $m = G_n - 1$ dans ce qui précède, il s'ensuit que toutes les branches de l'arbre $\mathcal{T}_G$ sont infinies et que tous les nœuds en sont de degré infini. Autrement dit, de chaque nœud partent une infinité de branches, de l'extrémité desquelles partent à nouveau toujours une infinité de branches.

EXEMPLE 16. La construction ci-dessous donne des odomètres continus; elle est suffisamment générale pour englober comme cas particuliers les échelles d'Ostrowski et les récurrences linéaires finies issues d'un $\beta$-shift.

Soit $(M_1, \ldots, M_d)$ une partition finie de $\mathbb{N}$. Choisissons un entier $n_0$ tel que $n_0 \geq \max\{\min M_1, \ldots, \min M_d\}$ et définissons librement $1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_{n_0}$. Pour $n > n_0$, on procède par induction : il existe un unique $l$ tel que $n \in M_l$.

Soit $m$ le prédécesseur de $n$ dans $M_l$. On pose

$$G_n - 1 := \sum_{m \leq j < n} \nu_j^{(l)} G_j + (G_m - 1), \tag{13}$$

où les entiers $\nu_j^{(l)}$ sont choisis de manière à ce que $G_n > G_{n-1}$ et $G_m + \sum_{m \leq j < k} \nu_j^{(l)} G_j < G_k$ pour tout $k$, $m < k < n$. Alors, (13) est un $G$-développement, d'où $T(n) \geq m - 1$ (on peut même s'imposer $T(n) = m - 1$). On a donc $\lim_n T(n) = \infty$, et $\tau$ est continue d'après la proposition 4.

**In memoriam.** Ce n'est guère l'usage, dans la littérature mathématique, de faire état de l'histoire d'un article. Il nous a semblé que les circonstances permettaient de déroger brièvement à cet usage. Le présent travail a commencé en juillet 1998 à l'occasion de la visite concomitante d'Anzelm et de Guy à Marseille. Les idées qui y sont nées doivent beaucoup à la compétence mathématique d'Anzelm, bien sûr, mais aussi à l'enthousiasme et à la disponibilité dont il fit montre alors, quand même il était gravement atteint par la maladie qui allait l'emporter deux mois plus tard. C'est lors de la visite de Pierre à Wrocław en novembre que Tomasz, après qu'il l'eut entendu présenter les premiers résultats de ce travail, rejoignit le groupe.

## *REFERENCES*


[Ba] G. Barat, *Échelles de numération et fonctions arithmétiques associées*, Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, 1995.

[BaDoLi] G. Barat, T. Downarowicz et P. Liardet, *Dynamiques associées à une échelle de numération*, preprint.

[BeSh] R. Belleman and H. N. Shapiro, *On a problem in additive number theory*, Ann. of Math. 49 (1948), 333–340.

[Be] J. Bésineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres"*, Acta Arith. 20 (1972), 401–416.

[Br] O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional $C^*$-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 171 (1972), 195–234.

[BrKrStP] H. Bruin, G. Keller and M. St. Pierre, *Adding machines and wild attractors*, Ergodic Theory Dynam. Systems 17 (1997), 1267–1287.

[Co1] J. Coquet, *Contribution à l'étude harmonique de suites arithmétiques*, Thèse d'État, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1978.

[Do] M. Doudekova, *Contribution à l'étude dynamique de translations par intervalles*, Thèse de l'Université de Provence, Marseille, 1999.

[DrGa] M. Drmota and J. Gajdosik, *The distribution of the sum-of-digits function*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), 17–32.

[Fra] A. S. Fraenkel, *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 105–114.

[Fro] C. Frougny, *On the sequentiality of the successor function*, Inform. and Comput. 139 (1997), 17–37.

[GrLiTi] P. J. Grabner, P. Liardet and R. F. Tichy, *Odometers and systems of numeration*, Acta Arith. 70 (1995), 103–123.

[HePuSk] R. H. Herman, I. F. Putman and C. F. Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*, Internat. J. Math. 3 (1992), 827–864.

[Li1] P. Liardet, *Propriétés harmoniques de la numération suivant Jean Coquet*, Publ. Math. d'Orsay, no. 88-02, Colloque de Théorie des Nombres "Jean Coquet", 1988, 1–35.

[Li2] —, *Some group extensions over generalized odometers*, International Conference on Ergodic Theory, Szklarska Poręba, June 19–25, 1989 (non publié).

[Li3] —, *Some ergodic transformations arising from numerations in number fields*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Conference held in Szklarska Po-
ręba, September 7–13, 1997 (non publié).

[Ma] J.-L. Mauclaire, *An almost-sure estimate for the mean of generalized $Q$-multiplicative functions of modulus* 1, J. Théor. Nombres Bordeaux, 1999, à paraître.

[Os] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie des diophantischen Approximatio-
nen I, II*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), 77–98, 250–251.

[Pa] W. Parry, *On the $\beta$-expansions of the real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 11 (1960), 401–416.

[SiVe] N. A. Sidorov and A. M. Vershik, *Arithmetic expansions associated with a rotation on the circle and with continued fractions*, St Petersburg Math. J. 5 (1994), 1121–1136.

[Ve] A. M. Vershik, *Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 259 (1981), 526–529 (in Russiam); English transl.: Soviet Math. Dokl. 24 (1981), 97–100.

20, rue Fourcroy, F-75017 Paris
E-mail: barat@weyl.math.tu-graz.ac.at

Université de Provence
Centre de Mathématiques et Informatique
39, rue Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13
E-mail: liardet@gyptis.univ-mrs.fr

Institute of Mathematics
Technical University of Wrocław
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław, Poland
E-mail: downar@im.pwr.wroc.pl

*Received 2 August 1999;*
*revised 3 December 1999* (3805)