COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 84/85 2000 PART 2

LES SYSTÈMES SIMPLES SONT DISJOINTS DE CEUX QUI SONT INFINIMENT DIVISIBLES ET PLONGEABLES DANS UN FLOT

PAR

JEAN-PAUL THOUVENOT (PARIS)

A la mémoire de Anzelm Iwanik

Abstract. We prove that simple transformations are disjoint from those which are infinitely divisible and embeddable in a flow. This is a reinforcement of a previous result of A. del Junco and M. Lemańczyk [1] who showed that simple transformations are disjoint from Gaussian processes.

1. Introduction. Dans un travail récent [1], A. del Junco et M. Lemańczyk ont démontré que si $(X, \mathcal{A}, m, T)$ est une transformation simple et si $(Y, \mathcal{B}, \mu, S)$ est isomorphe à un processus gaussien, alors ces deux transformations sont disjointes. Notre but est de démontrer qu'un résultat un peu plus fort est vrai. Nous disons qu'une action est *infiniment divisible* et *plongeable dans un flot* si elle peut être considérée comme le temps 1 d'une action de $\mathbb{R}$ qui est compatible avec le caractère d'"infinie divisibilité". Cette dernière propriété est évidemment satisfaite par tous les processus gaussiens.

2. Une proposition, deux lemmes

PROPOSITION. *Si* $(X, \mathcal{A}, m, T)$ *est un système simple et si* $(Y, \mathcal{B}, \mu, S)$ *est infiniment divisible*, *plongeable dans un flot*, *ils sont disjoints.*

Deux lemmes vont suffire à entraîner la proposition.

LEMME 1. *Soient* $(X, \mathcal{A}, m, T)$ *un système simple*, $(Y_1, \mathcal{A}_1, m_1, T_1)$ *et* $(Y_2, \mathcal{A}_2, m_2, T_2)$ *deux systèmes faiblement mélangeants tels que* $(Y_1, \mathcal{A}_1, m_1, T_1)$ *soit plongeable dans un flot. Soit* λ *une mesure sur* $X \times Y_1 \times Y_2$ *qui est* (a) $T \times T_1 \times T_2$ *invariante*, *telle que* (b) $\lambda | \mathcal{A} \times Y_1 \times Y_2 = m$, (c) $\lambda | X \times \mathcal{A}_1 \times Y_2 = m_1$, (d) $\lambda | X \times Y_1 \times \mathcal{A}_2 = m_2$ *et telle que pour* λ *les trois tribus* $\mathcal{A} \times Y_1 \times Y_2$, $X \times \mathcal{A}_1 \times Y_2$, $X \times Y_1 \times \mathcal{A}_2$ *soient deux à deux indépendantes. Alors ces trois tribus sont*, *en fait*, *globalement indépendantes* (*pour* λ).

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 28D15.

D é m o n s t r a t i o n. On appelle (improprement) *couplage* une mesure satisfaisant les conditions (a), (b) et (c). On utilise la notation condensée $(X, Y_1, Y_2), \lambda$ pour décrire le système précédent. On suppose que le couplage λ n'est pas globalement indépendant. On appelle S_t, $t \in \mathbb{R}$, le flot dans lequel T_1 est plongé (de sorte que $S_1 = T_1$), on considère $t > 0$, λ_t la mesure $(\mathrm{Id} \times S_t \times \mathrm{Id})^* \lambda$ et $\widetilde{\lambda}_t$ le couplage sur $(X, Y_1, Y_2, \widetilde{X})$ qui est le couplage relativement indépendant de $(X, Y_1, Y_2), \lambda$ avec $(X, Y_1, Y_2), \lambda_t$ au-dessus de (Y_1, Y_2). Alors

$$X \perp \widetilde{X}\ (\widetilde{\lambda}_t). \tag{1}$$

On considère la décomposition ergodique de $\widetilde{\lambda}_t$, i.e. $\widetilde{\lambda}_t = \int \widetilde{\lambda}_t(\omega)\, P(d\omega)$, et on cherche à savoir s'il peut exister des ω tels que X et $\widetilde{X}$ soient identifiés (comme tribus) par $\widetilde{\lambda}_t(\omega)$. Cela signifie qu'alors il existe $\sigma \in C(T)$ (le centralisateur de T) tel que $\lambda = (\sigma \times S_t \times \mathrm{Id})^* \lambda$. On suppose que t a été choisi de façon que S_t soit faiblement mélangeant. Soit $\mathcal{I}$ la tribu des invariants de σ; alors $Y_2 \overset{\mathcal{I}}{\perp} X \times Y_1$ (λ) (on utilise ici une version conditionnelle du fait que "l'identité est disjointe de toute transformation ergodique"). Mais comme, pour λ, $Y_2 \perp \mathcal{I}$, alors $Y_2 \perp X \times Y_1$ (λ) et il y aurait indépendance globale des trois tribus, contrairement à l'hypothèse que nous avons faite. Comme X est simple, X est donc indépendant de $\widetilde{X}$ pour chaque $\widetilde{\lambda}_t(\omega)$ et par conséquent $X \perp \widetilde{X}$ $(\widetilde{\lambda}_t)$. On considère A_n, B_n, C_n, $n > 0$, trois suites d'ensembles qui sont denses respectivement dans $(X, \mathcal{A}, m)$, $(Y_1 \mathcal{A}_1, m_1)$ et dans $(Y_2, \mathcal{A}_2, m_2)$; λ_1 et λ_2 étant des couplages, on introduit la distance

$$\delta(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n>0,\, m>0,\, p>0} 2^{-n-m-p} |\lambda_1(A_n \times B_m \times C_p) - \lambda_2(A_n \times B_m \times C_p)|.$$

On a donc, comme conséquence de (1), que quand $t_i \to 0$ (de façon que chaque S_{t_i} soit faiblement mélangeant) $\widetilde{\lambda}_{t_i} \to \widetilde{\lambda}$ (pour δ) où $\widetilde{\lambda}$ vérifie $X \perp \widetilde{X}$ $(\widetilde{\lambda})$. Il est facile de voir de plus que $\widetilde{\lambda}$ est aussi le produit relativement indépendant de $(X, Y_1, Y_2), \lambda$ avec lui-même au-dessus de $Y_1 \times Y_2$. Ces deux dernières propriétés entraînent, comme application d'un lemme de del Junco et Rudolph, que λ devait être une mesure produit. Ceci achève la démonstration du lemme. (Cette démonstration utilise des techniques proches de celles qui ont été employées par Ryzhikov pour démontrer que si T est 2-simple plongeable dans un flot, alors T est simple.)

LEMME 2. *Les notations et les hypothèses sont exactement celles du lemme* 1. *Y_1 est plongeable dans un flot. λ désigne un couplage de X simple avec Y_1 et Y_2 tel que Y_1 et Y_2 soient indépendants* (*pour* λ) *et qu'il ne soit pas globalement indépendant. Alors*, *ou bien X est non indépendant de Y_1* (*pour* λ) *et Y_2 est indépendant de $X \times Y_1$* (*pour* λ) *ou le même énoncé est vrai en échangeant les rôles de Y_1 et de Y_2.*

D é m o n s t r a t i o n. Un théorème de del Junco et Rudolph [2] dit qu'il existe un facteur symétrique $\mathcal{S}_k = (X/K)^{k\odot}$ du produit de k copies de (X,T) (K est un sous-groupe compact du centralisateur de T et X/K est la tribu des invariants de son action) tel que $\mathcal{S}_k$ soit un facteur du produit $Y_1 \times Y_2$ et tel que si on considère le couplage μ relativement indépendant de $Y_1 \times Y_2$ avec $T_1 \times \ldots \times T_k$ (chaque T_i, $1 \le i \le k$, est une copie de T) au-dessus de $\mathcal{S}_k$, la restriction de μ à $Y_1 \times Y_2 \times T_i$ soit λ pour tout $1 \le i \le k$. Aucun T_i, $1 \le i \le k$, n'est indépendant de $Y_1 \times Y_2$. On peut donc appliquer le lemme précédent et, pour chaque $1 \le i \le k$, il existe $n(i)$ où $n(i)$ vaut 1 ou 2 tel que μ restreint à $Y_{n(i)} \times T_i$ ne soit pas indépendant. On suppose organisés les T_i, $1 \le i \le k$, de façon que $n(i) = 1$ pour $1 \le i \le n$ et $n(i) = 2$ pour $n+1 \le i \le k$. Montrer que nécessairement $n = k$ terminera alors la démonstration.

A cette fin remarquons tout d'abord que Y_2 est indépendant de $T_1 \times \ldots \times T_n$ (pour μ). En effet, la simplicité de T entraîne que $T_1 \times \ldots \times T_n$ est mesurable par rapport à une extension compacte de Y_1 (puisque chaque T_i l'est, comme conséquence du résultat déjà cité de del Junco et Rudolph). Comme Y_1 et Y_2 sont indépendants, un lemme classique (voir par exemple [4]) nous donne l'indépendance cherchée. Si $n < k$, T_{n+1} ne sera pas indépendant de Y_2, ce qui contredit le fait que la restriction de μ à $Y_1 \times Y_2 \times T_i$ soit λ pour tout $1 \le i \le k$. La démonstration de la proposition est maintenant une conséquence claire du lemme 2.

REFERENCES

[1] A. del Junco and M. Lemańczyk, *Simple systems are disjoint from Gaussian systems*, Studia Math. 133 (1999), 249–256.

[2] A. Junco and D. Rudolph, *On ergodic actions whose self-joinings are graphs*, Ergodic Theory Dynam. Systems 7 (1987), 531–557.

[3] E. Glasner, B. Host and D. Rudolph, *Simple systems and their higher order self-joinings*, Israel J. Math. 78 (1992), 131–142.

[4] J. King and J.-P. Thouvenot, *A canonical structure theorem for finite joining rank maps*, J. Anal. Math. 56 (1991), 211–230.

[5] J.-P. Thouvenot, *Some properties and applications of joinings in ergodic theory*, in: Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 205, Cambridge Univ. Press, 1995, 207–235.

Laboratoire de Probabilité
Université Paris VI
Tour 56
4, Place Jussieu
75 230 Paris Cedex 05, France

Received 22 September 1999 (3833)