COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 84/85 2000 PART 1

SUR L'ABSENCE DE MÉLANGE POUR DES FLOTS SPÉCIAUX AU-DESSUS D'UNE ROTATION IRRATIONNELLE

PAR

M. LEMAŃCZYK (TORUŃ)

Abstract. We prove the absence of mixing for special flows built over

(1) an irrational rotation and under a function whose Fourier coefficients are of order $O(1/|n|)$, and

(2) an irrational rotation (satisfying a diophantine condition) and under a function having a finite number of singularities of a logarithmic type.

These results generalize two theorems of Kochergin.

1. Introduction. Soient $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace probabilisé standard et $T:(X,\mathcal{B},\mu)\to(X,\mathcal{B},\mu)$ un automorphisme. Soit f une fonction numérique, intégrable, strictement positive sur X telle que $\int_X f\,d\mu=1$. On note $X^f=\{(x,t): x\in X,\ 0\le t<f(x)\}$ muni de la tribu borélienne naturelle et μ^f la restriction à X^f de la mesure produit $\mu\otimes\lambda$ (ici λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Soit $T^f=(T_t^f)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot spécial construit à partir de T et de la fonction plafond f, i.e. T^f est déterminé par les deux conditions suivantes :

$$T_t^f(x,r)=(x,t+r) \text{ si } t+r<f(x) \quad \text{et} \quad T_{f(x)}^f(x,0)=(Tx,0)$$

(voir [3], chapitre 11). Le mélange et l'absence de mélange pour des flots sur des surfaces ont été étudiés par Kochergin dans une série d'articles (voir [7–10]) ainsi que par Khanin et Sinai (voir [5]). Dans certains cas ([10]), de tels flots se réduisent à des flots spéciaux construits à partir d'une rotation irrationnelle et une fonction régulière ayant un nombre fini de points de singularité où la croissance est logarithmique. Sous certaines conditions (portant aussi sur la rotation) Kochergin démontre l'absence de mélange ([10]).

Dans cet article on étudie le mélange de T^f pour une rotation irrationnelle $T:[0,1[\,\to[0,1[$, $Tx=x+\alpha \pmod 1$, et

$$f(x)=g(x)+\sum_{i=1}^{n} b_i h(x-\beta_i)+c_i h(\beta_i-x),$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 37A20.

Recherche partiellement financée par KBN grant 2 P03A 002 14 (1998).

où les coefficients de Fourier de g sont d'ordre $O(1/|n|)$ et $h(x) = j(\log x)$, où la dérivée de j est bornée à l'infini et $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i$. On démontre l'absence de mélange de T^f pour un sous-ensemble de α à quotients partiels non bornés. Le cas particulier où g est à variation bornée et $j(y) = y$ a été démontré par Kochergin dans [10].

Lorsque $\widehat{f}(n) \in O(1/|n|)$, nous démontrons l'absence de mélange de T^f sans aucune hypothèse sur la rotation irrationnelle T. Ceci généralise le résultat classique de Kochergin pour les fonctions à variation bornée ([7]). En particulier, pour toute rotation irrationnelle, il n'y a pas de mélange quand $f(x) = -\frac{1}{2}(\log(x) + \log(1-x))$.

Les propriétés de base du développement d'un nombre irrationnel en fraction continue utilisées dans cet article se trouvent dans [6] ou dans [4].

Les résultats de cet article ont été présentés pendant une visite annuelle de l'équipe ergodique de Toruń au seminaire ergodique du professeur Anzelm Iwanik à Wrocław en Novembre 1996.

Je tiens à remercier le rapporteur d'avoir contribué à la rédaction finale de cet article.

2. Critère de l'absence de mélange. Désignons ici par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Aleksandrov de $\mathbb{R}$. Si $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, on note $g_*\mu$ l'image sur $\mathbb{R}$ de μ par g. Etant donné $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ on pose $f_0 = f - \int_X f\, d\mu$ et

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x) & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ -(f(T^n x) + \ldots + f(T^{-1}x)) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

PROPOSITION 1. *Soient $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ ergodique et $(g_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur X telle que $g_t T - g_t$ converge vers 0 en mesure. Supposons que $(g_t)_*\mu$ converge faiblement vers une probabilité ν sur $\overline{\mathbb{R}}$. Alors pour toute mesure de probabilité ϱ sur $(X, \mathcal{B})$ telle que $\varrho \ll \mu$, $(g_t)_*\varrho$ converge faiblement vers ν.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la proposition 8 dans [13]. ∎

Une suite (n_t) d'entiers est appelée un *temps de rigidité* de T si pour tout $A \in \mathcal{B}$ on a $\mu(T^{n_t} A \triangle A) \to 0$. Donc si $g \in L^1(X, \mu)$, alors $g^{(n_t)}T - g^{(n_t)} \to 0$ en mesure. Il résulte de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. *Soient $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ ergodique et $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Soit (n_t) un temps de rigidité de T. Supposons que $(g^{(n_t)})_*\mu$ converge faiblement vers une probabilité ν sur $\overline{\mathbb{R}}$. Alors pour toute mesure de probabilité ϱ sur $(X, \mathcal{B})$ telle que $\varrho \ll \mu$, $(g^{(n_t)})_*\varrho$ converge faiblement vers ν.* ∎

Rappelons qu'une suite $(F, TF, \ldots, T^{n-1}F)$ avec $\mu(F) > 0$ est dite une *tour de Rokhlin* pour T si les ensembles T^iF sont deux-à-deux disjoints pour $i = 0, \ldots, n-1$. Si T est apériodique, par le lemme de Rokhlin (voir [3], p. 242), étant donné $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver $(F, TF, \ldots, T^{n-1}F)$ une tour de Rokhlin de hauteur arbitraire $n \geq 1$ telle que $\mu(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^iF) > 1 - \varepsilon$.

Si T est ergodique et $\mu(A) > 0$, alors étant donné une tour de Rokhlin $(F, TF, \ldots, T^{n-1}F)$, il existe $k \geq 0$ tel que $\mu(T^{-k}F \cap A) > 0$. Il en résulte que $(F', TF', \ldots, T^{n-1}F')$, où $F' = T^{-k}F \cap A$, est une tour de Rokhlin de hauteur n dont la base F' est contenue dans A.

LEMME 1. *Soient T ergodique, apériodique et $f > 0$, $\int_X f\, d\mu = 1$. Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geq 1$ assez grand, il existe $(F, TF, \ldots, T^{n-1}F)$ une tour de Rokhlin pour T telle que la réunion $\bigcup_{t\in[0,(1-\varepsilon)n]} T_t^f(F \times \{0\})$ soit une tour de Rokhlin pour T^f, i.e. les ensembles $T_t^f(F \times \{0\})$ sont deux-à-deux disjoints pour $t \in [0, (1-\varepsilon)n]$.*

Démonstration. D'après le théorème ergodique ponctuel, si

$$X_n = \{x \in X : f^{(r)}(x) \in \,](1-\varepsilon/2)r, (1+\varepsilon/2)r[\text{ pour tout } r \geq n-1\},$$

alors $\mu(X_n) \to 1$. Soit $F \subset X_n$ tel que $(F, TF, \ldots, T^{n-1}F)$ soit une tour de Rokhlin pour T. Montrons que $(T_t^f(F \times \{0\}))_{0\leq t\leq(1-\varepsilon)n}$ est une tour de Rokhlin pour le flot spécial. Prenons $0 \leq t_1, t_2 < (1-\varepsilon)n$, $x_1, x_2 \in F$, tels que

$$T_{t_1}^f(x_1, 0) = T_{t_2}^f(x_2, 0).$$

D'après la définition de T^f on a $(T^{m_1}x_1, t_1 - f^{(m_1-1)}(x_1)) = (T^{m_2}x_2, t_2 - f^{(m_2-1)}(x_2))$, où $f^{(m_i-1)}(x_i) \leq t_i < f^{(m_i)}(x_i)$, $i = 1, 2$. Si m_1 était supérieur ou égal à n, alors $f^{(m_1-1)}(x_1)$ serait supérieur ou égal à $(1-\varepsilon/2)(n-1)$, ce qui n'est pas possible car $t_1 < (1-\varepsilon)n$. Par conséquent $0 \leq m_1, m_2 < n$, puis $m_1 = m_2$. C'est pourquoi $x_1 = x_2$, et cela implique $t_1 = t_2$. ∎

Rappelons qu'une suite (a_t) dans $\mathbb{R}$ est dite un *temps de mélange* pour un flot spécial T^f si pour tout ensemble mesurable $D \subset X^f$,

$$\lim_{t\to\infty} \mu^f(T_{a_t}^f D \cap D) = (\mu^f(D))^2.$$

THÉORÈME 1. *Soient $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ ergodique, apériodique et $f > 0$, $\int_X f\, d\mu = 1$. Si T^f est mélangeant, alors pour tout temps de rigidité (n_t) de T et pour toute $(a_t) \subset \mathbb{R}$,*

$$|f^{(n_t)}(\cdot) - a_t| \to \infty \qquad \textit{en mesure.}$$

En particulier, $|f_0^{(n_t)}(\cdot)| \to \infty$ en mesure.

Démonstration. Considérons $\nu_t := (g_t)_*\mu$, $t \geq 1$, la suite de mesures de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$ définie par $g_t = f^{(n_t)} - a_t$. Quitte à passer à une sous-suite nous pouvons supposer que (ν_t) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν sur $\overline{\mathbb{R}}$. On va démontrer que si ν n'est pas concentrée à l'infini, i.e. si $\nu(\{\infty\}) < 1$, alors le flot spécial T^f n'est pas mélangeant le long de la suite (a_t). En effet, choisissons $M > 0$ tel que $\delta := \nu([-M, M]) > 0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\nu(\{M\}) = \nu(\{-M\}) = 0$. Alors, étant donné $\varepsilon > 0$, on a

$$|\mu(\{x \in X : g_t(x) \in [-M, M]\}) - \delta| < \varepsilon \tag{1}$$

pour t assez grand. Prenons $R > 0$ satisfaisant à

$$M/R < \varepsilon. \tag{2}$$

Grâce au lemme 1, on peut trouver $A \subset X$ tel que $\mu(A) < \delta/(200R)$ et que

$$B = \bigcup_{t=-R}^{R} T_t^f(A \times \{0\})$$

soit une tour de Rokhlin pour T^f. On a

$$\mu^f(B) < \delta/100. \tag{3}$$

Supposons que (a_t) soit un temps de mélange pour le flot T^f; en particulier

$$\mu^f(T_{a_t}^f B \cap B) \to \mu^f(B)^2.$$

Par (3),

$$\mu^f(T_{a_t}^f B \cap B) < \frac{\delta}{100}\mu^f(B) \tag{4}$$

pour tout t assez grand. Posons

$$Y_t = \{x \in A : g_t(x) \in [-M, M]\}.$$

Or, par (1) et par la proposition 2 on a

$$|\mu(Y_t) - \delta\mu(A)| < \varepsilon\mu(A)$$

pour t assez grand. Comme (n_t) est un temps de rigidité, on a aussi

$$\mu(\{x \in A : T^{n_t}x \in A\}) \to \mu(A).$$

Posons

$$C = \bigcup_{t=-R+M}^{R-M} T_t^f(A \times \{0\}).$$

On a $\mu^f(B \setminus C) < (M/R)\mu^f(B) < \varepsilon\mu^f(B)$. Si $(y, \widetilde{s}) \in C$, alors il existe $x \in A$ et $-R + M \le s \le R - M$ tels que $(y, \widetilde{s}) = T_s^f(x, 0)$ et

$$\begin{aligned} T_{a_t}^f(y, \widetilde{s}) &= T_s^f T_{a_t}^f(x, 0) = T_s^f T_{a_t - f^{(n_t)}(x)}^f T_{f^{(n_t)}(x)}^f(x, 0) \\ &= T_s^f T_{g_t(x)}^f(T^{n_t}x, 0) = T_{s+g_t(x)}^f(T^{n_t}x, 0). \end{aligned}$$

D'où, dès que $T^{n_t}x \in A$ et $x \in Y_t$,

$$T_{a_t}^f(y, \widetilde{s}) \in B.$$

Si l'on pose $\mu(Y_t) = \delta_t \mu(A)$ ($\delta - \varepsilon < \delta_t < \delta + \varepsilon$ pour t assez grand), alors

$$\mu^f\Big(\bigcup_{s=-S}^{S} T_s^f(Y_t \times \{0\})\Big) = \delta_t \mu^f\Big(\bigcup_{s=-S}^{S} T_s^f(A \times \{0\})\Big)$$

pour tout $0 \leq S \leq R$ car $\bigcup_{s=-S}^{S} T_s^f(Y_t \times \{0\})$ est une tour de Rokhlin. Nous avons obtenu que pour tout t assez grand

$$\mu^f(\{(y,\widetilde{s}) \in B : T_{a_t}^f(y,\widetilde{s}) \in B\}) > \frac{\delta}{2}\mu^f(B) - \varepsilon\mu^f(B) > \frac{\delta}{3}\mu^f(B)$$

si $\varepsilon > 0$ est assez petit et ceci contredit (4).

Nous avons démontré que pour tout temps de rigidité (n_t) il existe une sous-suite de la suite $(|f^{(n_t)} - a_t|)$ qui converge vers ∞ en mesure. Le résultat s'en déduit directement. ∎

Il s'avère que pour une rotation ergodique T on peut remplacer les temps de rigidité par la suite des entiers positifs.

Corollaire 1. *Soient $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ une rotation ergodique et $f > 0$, $\int_X f\, d\mu = 1$. Si T^f est mélangeant, alors pour toute suite (a_n) dans $\mathbb{R}$,*

$$|f^{(n)}(\cdot) - a_n| \to \infty \qquad \textit{en mesure.}$$

En particulier, $|f_0^{(n)}(\cdot)| = n|n^{-1}f^{(n)}(\cdot) - \int_X f\, d\mu| \to \infty$ en mesure.

Démonstration. On suppose donc que $Tx = x + x_0$, où X est un groupe métrique, compact, abélien. Il suffit de démontrer que s'il existe une suite (m_k) telle que $|f^{(m_k)} - b_{m_k}|$ ne converge pas vers ∞ (où (b_{m_k}) est une suite de nombres réels), alors on peut trouver un temps de rigidité de T avec la même propriété. On note $g_{m_k} = f^{(m_k)} - b_{m_k}$. Quitte à passer à une sous-suite de (m_k), nous pouvons supposer que $m_k x_0 \to y$ et

$$\begin{aligned}&(\exists 0 < \alpha \leq 1)(\exists M > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists A_k \subset X)\\ &\qquad \mu(A_k) \geq \alpha \quad \text{et} \quad |g_{m_k}(x)| \leq M \quad \text{pour tout } x \in A_k.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\exists \beta = \beta(\alpha) > 0)(\exists p = p(\alpha) \in \mathbb{N})(\forall k)(\exists 1 \leq i < j \leq p) \quad \mu(A_{k+i} \cap A_{k+j}) \geq \beta$$

(voir le lemme ci-dessous). On peut donc choisir une sous-suite (m_k') telle que

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists B_k \subset X, \mu(B_k) \geq \beta)(\forall x \in B_k) \quad |g_{m_{2k}'}(x)|, |g_{m_{2k+1}'}(x)| \leq M.$$

Posons $n_k = m_{2k+1}' - m_{2k}'$ et $a_k = b_{m_{2k+1}'} - b_{m_{2k}'}$. Alors (n_k) est un temps de rigidité de T et de plus

$$f^{(m_{2k+1}')}(x) = f^{(m_{2k}')}(x) + f^{(n_k)}(T^{m_{2k}'}x),$$

d'où
$$g_{m'_{2k+1}}(x) = g_{m'_{2k}}(x) + (f^{(n_k)}(T^{m'_{2k}}x) - a_k).$$
Mais $|f^{(n_k)} \circ T^{m'_{2k}} - a_k|$ converge en mesure vers ∞ quand $k \to \infty$. D'autre part si $x \in B_k$, alors
$$|g_{m'_{2k+1}}(x) - g_{m'_{2k}}(x)| \le 2M$$
et on obtient une contradiction. ■

LEMME 2. *Soit* $0 < \alpha \le 1$. *Si* $\beta = \frac{1}{4}\alpha^2$ *et* $k = [2/\alpha] + 1$, *alors pour tous* $A_1, \ldots, A_k$ *satisfaisant à* $\mu(A_i) \ge \alpha$ *il existe* $1 \le i < j \le k$ *tels que* $\mu(A_i \cap A_j) \ge \beta$.

Démonstration. Supposons que le lemme soit faux. Alors il existe $A_1, \ldots, A_k$, $\mu(A_i) \ge \alpha$, tels que $\mu(A_i \cap A_j) < \beta$ pour tout i, j. Or,
$$A_1 \cup \ldots \cup A_k = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1 \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_k \setminus ((A_k \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{k-1}))),$$
d'où $1 \ge k\alpha - (\beta + 2\beta + \ldots + (k-1)\beta)$. Cela entraîne
$$1 \ge 2 - \alpha^2 \cdot \frac{2/(\alpha(2/\alpha + 1))}{8},$$
qui donne une contradiction. ■

REMARQUE 1. On peut déduire le théorème 1 à partir du théorème 1 de Kochergin dans [10].

REMARQUE 2. Supposons que T soit une rotation ergodique. Il est intéressant de constater que dans le cas de T^f mélangeant, les comportements de la suite $(|f_0^{(n)}|)_n$ en mesure et presque surement sont différents. En effet, le théorème de Atkinson ([15], Th. 11.4, [1]) dit que pour presque tout $x \in X$, $\liminf_{n\to\infty} |f_0^{(n)}(x)| = 0$, tandis que $|f_0^{(n)}| \to \infty$ en mesure d'après le corollaire 1.

Nous laissons comme une question ouverte le fait de savoir si dans le corollaire 1 l'hypothèse "T est une rotation" est nécessaire.

Voilà un autre critère d'absence de mélange (il est implicitement contenu dans [10]) que nous utiliserons plus tard.

PROPOSITION 3. *Soient* $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ *ergodique et* $f_1, \ldots, f_p \in L^1(X, \mu)$ *positives telles que* $\int_X (f_1 + \ldots + f_p)\, d\mu = 1$. *Supposons que* (n_t) *soit un temps de rigidité de* T. *S'il existe* $K \in \mathbb{N}$ *et une famille de suites de fonctions mesurables* $(g_t^{[r]})_{t\in\mathbb{N}}$ $(r = 1, \ldots, p)$ *où* $g_t^{[r]}$ *ne prend que* K *valeurs, tels que*
$$\lim_{M\to\infty} \limsup_t \mu\{x \in X : |f_r^{(n_t)}(x) - g_t^{[r]}(x)| \ge M\} = 0$$
pour tout $r = 1, \ldots, p$, *alors* $T^{f_1+\ldots+f_p}$ *n'est pas mélangeant.*

D é m o n s t r a t i o n. Etant donné $0 < \varepsilon < 1/(2p)$ il existe $M > 0$ tel que pour tout t assez grand on puisse trouver $X_{1,t}, \ldots, X_{p,t} \subset X$, $\mu(X_{r,t}) > 1-\varepsilon$, des nombres réels $s_{r,t}^{(1)}, \ldots, s_{r,t}^{(K)}$ et des partitions $X_{r,t} = X_{r,t}^{(1)} \cup \ldots \cup X_{r,t}^{(K)}$ tels que

$$|f_r^{(n_t)}(x) - s_{r,t}^{(i)}| \leq M \quad \text{pour tout } x \in X_{r,t}^{(i)},\ i = 1, \ldots, K,\ r = 1, \ldots, p.$$

Il existe $1 \leq i_l \leq K$, $l = 1, \ldots, p$, tels que si

$$Y_t = X_{1,t}^{(i_1)} \cap \ldots \cap X_{p,t}^{(i_p)},$$

alors

$$\mu(Y_t) > \frac{1 - \varepsilon p}{K^p} > \frac{1}{2K^p}.$$

De plus, si $x \in Y_t$ alors

$$|(f_1 + \ldots + f_p)^{(n_t)}(x) - (s_{1,t}^{(i_1)} + \ldots + s_{p,t}^{(i_p)})| \leq pM.$$

Pour conclure, il suffit donc d'utiliser le théorème 1. ∎

Dans [7], Kochergin démontre que si f est une fonction à variation bornée, alors pour toute rotation irrationnelle T, le flot spécial associé n'est pas mélangeant. Voici une généralisation de ce théorème.

THÉORÈME 2. *Soit T une rotation irrationnelle. Supposons que $f \in L^1(\mathbb{T})$ soit strictement positive de moyenne* 1. *Si $\widehat{f}(n) \in O(1/n)$, alors le flot spécial T^f n'est pas mélangeant.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après [2], il existe une constante $C = C(f)$ telle que

$$\|f_0^{(q_n)}(\cdot)\|_{L^2} \leq C$$

pour tout $n \geq 1$, où (q_n) est la suite des dénominateurs des réduites de α $(Tx = x + \alpha)$. Cela implique que pour toute limite faible ν de la suite $(f_0^{(q_n)})_*\mu$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ on a $\nu(\{\infty\}) = 0$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 1. ∎

REMARQUE 3. Dans [12] les auteurs démontrent que si de plus les coefficients de Fourier de f sont d'ordre $o(1/n)$ alors T^f est rigide. Une autre généralisation du théorème de Kochergin a été démontré par Ryzhikov [14]: l'absence de mélange est vraie pour toute fonction à variation bornée au-dessus d'un échange fini d'intervalles.

On peut aussi déduire le théorème 2 à partir de [2] et du théorème 1 de Kochergin dans [10].

3. Classe $\mathcal{MEP}(A, T)$.

Soient $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ un automorphisme ergodique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On va considérer des fonctions hors de $L^1(X, \mu)$, donc, en général, nous n'aurons aucune information sur le comportement des moyennes ergodiques de f. Pour une classe de fonctions considérée ci-dessous on va contrôler, d'une façon assez faible mais suffisante, le comportement des moyennes ergodiques le long d'une sous-suite. Soit $A = \{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{Z}$, $a_1 < a_2 < \ldots$ On dit que $f \in \mathcal{MEP}(A,T)$ s'il existe une suite $(e_n)_{n\in A} = (e_n(f))_{n\in A}$ de nombres réels telle que

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\in A} \mu\left\{x \in X : \left|\frac{1}{n} f^{(n)}(x) - e_n\right| \geq M\right\} = 0.$$

Autrement dit les moyennes ergodiques (le long d'une sous-suite) sont "plates" (et elles tendent vers l'infini si la suite (e_n) tend vers ∞). Si $f \in L^1(X,\mu)$, alors $f \in \mathcal{MEP}(\mathbb{N},T)$ avec $e_n = \int_X f\,d\mu$, $n \geq 1$.

Exemple 1. Soient $T : [0,1[\to [0,1[$, $Tx = x + \alpha$, une rotation irrationnelle, $A = \{q_n : n \geq 1\}$ l'ensemble des dénominateurs des réduites de α et $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ strictement positive, décroissante, prolongée en 0 par $f(0) = 0$ et

$$(\exists D > 0)(\forall x \in [0,1[) \quad |xf(x)| \leq D \tag{5}$$

(en particulier, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existe). Alors, $f \in \mathcal{MEP}(A,T)$. En effet, posons

$$e_q = \frac{1}{q}\sum_{j=2}^{q-1} f\left(\frac{j}{q}\right) \qquad (q = q_n).$$

Pour tout $x \neq j/q$ $(j = 0,\ldots,q-1)$ notons

$$a_q = \min_{0\leq j\leq q-1}\{x + j\alpha\},$$

où pour t réel, $\{t\}$ est sa partie fractionnaire. Comme $|\alpha - p/q| \in O(1/q^2)$, on a

$$e_q \leq \frac{1}{q} f^{(q)}(x) \leq \frac{2}{q} f(a_q) + \frac{1}{q} f\left(\frac{1}{q}\right) + e_q.$$

Fixons $C \geq 1$ et posons $Y_q = Y_q(C) = \bigcup_{k=0}^{q-1} T^{-k}[0, 1/(Cq)]$. Si $x \notin Y_q$ alors

$$e_q \leq \frac{1}{q} f^{(q)}(x) \leq e_q + \frac{1}{q} f\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{2}{q} f\left(\frac{1}{Cq}\right)$$

et en utilisant (5) on obtient

$$e_q \leq \frac{1}{q} f^{(q)}(x) \leq e_q + D + 2CD,$$

d'où le résultat.

Nous nous intéressons aux fonctions $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f \in L^1[0,1[$, dont les dérivées $f' \in \mathcal{MEP}(A,T)$. De façon plus précise on suppose que :

$$\begin{gathered} f|_{]0,1[} \text{ est de classe } C^1, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \end{gathered} \tag{6}$$

(7) $-f'$ satisfait aux hypothèses de l'exemple 1.

Dans ce cas on a $e_q = e_q(-f') \in O(\int_{1/q}^1 |f'(t)|\,dt)$, donc

(8) $$e_q \in O(f(1/q))$$

et (voir (5))

(9) $$e_q \in O(\log q) \quad \text{avec} \quad \lim_{q\to\infty} e_q = \infty.$$

EXEMPLE 2. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant à : $g \in C^1$, $(\exists C > 0)$ $|g'(y)| \le C$ pour $y \in [1,\infty[$, $\lim_{y\to\infty} g(y) = \infty$ et $x \mapsto (1/x)g'(-\log x)$, $x \in]0,1[$, est décroissante, positive. Alors si $f(x) := g(-\log x)$, $x \in]0,1[$, on voit aisément que f satisfait aux hypothèses (6) et (7). D'après (8) on a donc

(10) $$e_q \in O(g(\log q)).$$

4. L'absence de mélange. Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et soit $\beta \in \mathbb{T} = [0,1[$. Notons

$$f_\beta(x) := f(\{x+\beta\}) - f(x), \qquad x \in [0,1[.$$

Soient $Tx = x + \alpha \pmod 1$ une rotation irrationnelle sur $\mathbb{T}$ et $(q_n)_{n\ge1}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ sera notée λ. La distance usuelle entre $x, y \in \mathbb{T}$ sera notée $\|x-y\|$.

LEMME 3. *Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant à* (6) *et* (7). *Supposons que α admette des approximations par des nombres rationnels p/q tels que*

(11) $$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \in O\left(\frac{1}{f(1/q)q^2}\right)$$

(*le long d'une sous-suite de* (q_n)). *Alors*, *pour tout $\beta \in [0,1[$ il existe une suite (h_q) de fonctions mesurables sur le cercle telle que chaque h_q ne prenne qu'au plus deux valeurs et*

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_q \lambda\{x \in \mathbb{T} : |f_\beta^{(q)}(x) - h_q(x)| \ge M\} = 0.$$

Démonstration. (I) On peut se limiter dans la démonstration à ne considérer que p_n/q_n vérifiant (11) qui sont toutes inférieures (ou supérieures) à α. La démonstration dans un cas s'adapte facilement à l'autre cas.

On suppose donc que $\alpha > p_n/q_n$ (ici et plus loin on utilise l'ordre naturel de $]0,1[$) et on pose $p = p_n$, $q = q_n$. On définit $\delta_q = 2q|\alpha - p/q|$. Grâce à (11) et au fait que $f(1/q) \to \infty$, on a

(12) $$\delta_q = o(1/q).$$

(II) Fixons $C > 1000$. Posons $a_q = 1/(Cq)$, $b_q = 1/q - \delta_q$, et $A_q = \bigcup_{i=0}^{q-1} T^i[a_q, b_q]$. Alors, pour tout q assez grand on vérifie aisément les propriétés suivantes:

(i) $T^i[a_q,b_q]\subset[k_i/q,(k_i+1)/q]$, où $k_i\neq k_{i'}$ lorsque $i\neq i'$ ($i,i'=0,\ldots,q-1$) (en effet, $\delta_q-(q-1)|\alpha-p/q|>0$);

(ii) si $x\in A_q$, alors $T^ix\notin[0,1/(Cq)]$, $i=0,1,\ldots,q-1$ (en effet, $\delta_q-(q-1)|\alpha-p/q|>q|\alpha-p/q|$);

(iii) si $T^i[a_q,b_q],T^j[a_q,b_q]$ sont deux intervalles consécutifs (i.e. si entre eux il n'y a pas d'intervalle de la forme $T^k[a_q,b_q]$, $0\le k\le q-1$), alors

$$\|T^ib_q-T^ja_q\|<\frac{2}{Cq},\qquad i,j=0,1,\ldots,q-1$$

(en effet, $\|T^ib_q-T^ja_q\|\le\delta_q+(q-1)|\alpha-p/q|+1/(Cq)$);

(iv) $\lambda(A_q)\ge1-2/C$;

(v) pour $z\in\mathbb{T}$ et $0\le i\le q-1$ supposons que les points $z,Tz,\ldots,T^{q+i-1}z$ n'appartiennent pas à $[0,1/(Cq)]$; alors

$$|f^{(q)}(z)-f^{(q)}(T^iz)|\le 2DC\cdot O\biggl(\frac{1}{f(1/q)}\biggr).$$

En effet

$$\begin{aligned}|f^{(q)}(z)-f^{(q)}(T^iz)|&=|f(z)-f(T^qz)+\ldots+f(T^{i-1}z)-f(T^{q+i-1}z)|\\&=|f'(\xi_0)(z-T^qz)+\ldots+f'(\xi_{i-1})(T^{i-1}z-T^{q+i-1}z)|\end{aligned}$$

où $\xi_s\in[T^sz,T^{q+s}z]$, $s=0,\ldots,i-1$. Donc

$$\begin{aligned}|f^{(q)}(z)-f^{(q)}(T^iz)|&=\|q\alpha\|\sum_{s=0}^{i-1}|f'(\xi_s)|\\&\le\|q\alpha\|\,\biggl|2f'\biggl(\frac{1}{Cq}\biggr)+f'\biggl(\frac{1}{q}\biggr)+\ldots+f'\biggl(\frac{q-1}{q}\biggr)\biggr|\\&\le 2DC\cdot O\biggl(\frac{1}{f(1/q)}\biggr)\end{aligned}$$

grâce à (5) (pour f') et à (11).

(III) Soit $Sx=x+\beta$ (mod 1). Pour tout q assez grand soient I_q,J_q deux intervalles maximaux contenus dans $[a_q,b_q]$ tels que $I_q\cap J_q=\emptyset$ et pour certains $i_0,j_0\in\{0,1,\ldots,q-1\}$,

$$S(I_q)\subset T^{i_0}[a_q,b_q-2\delta_q],\qquad S(J_q)\subset T^{j_0}[a_q,b_q-2\delta_q].$$

Posons

$$E_q=\bigcup_{i=0}^{q-1}T^iI_q,\qquad F_q=\bigcup_{i=0}^{q-1}T^iJ_q.$$

Il est possible que l'un des ensembles E_q ou F_q soit vide. Alors, pour tout q assez grand on a :

(vi) $\lambda(E_q \cup F_q) \geq 1 - 4/C$,

(vii) $E_q \cup F_q \cup SE_q \cup SF_q \subset A_q$ (en effet, comme $ST = TS$, $SE_q = \bigcup_{i=0}^{q-1} T^i SI_q \subset A_q$).

Supposons que E_q ne soit pas vide. Nous allons démontrer que $f_\beta^{(q)}(E_q)$ est contenue dans un intervalle de longueur $O(1)$ (jusqu'à la fin de la démonstration, en écrivant $O(1)$ nous pensons à une constante qui dépend de C). On procède de même avec F_q. Il en résulte la construction d'une fonction h_q ayant deux valeurs (au plus) telle que la suite $(h_q)_q$ ainsi obtenue vérifie les conclusions du lemme.

(IV) Soient $x, y \in E_q$; alors $x \in T^r I_q$ (pour $r \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$) et il existe un seul i, $0 \leq i \leq q-1$, et un seul s, $0 \leq s \leq q-1$, tels que $T^i y \in T^r[a_q, b_q]$ et $Sx, ST^i x \in T^s[a_s, b_s]$. On a

$$\begin{aligned} f_\beta^{(q)}(x) - f_\beta^{(q)}(y) &= (f^{(q)}(y) - f^{(q)}(x)) - (f^{(q)}(\{y+\beta\}) - f^{(q)}(\{x+\beta\})) \\ &= (f^{(q)}(y) - f^{(q)}(T^i y)) \\ &\quad - (f^{(q)}(T^i Sy) - f^{(q)}(T^i Sy)) + R_q(x,y), \end{aligned}$$

où $R_q(x,y) = (f^{(q)}(T^i y) - f^{(q)}(x)) - (f^{(q)}(T^i Sy) - f^{(q)}(Sx))$. Grâce à (v),

$$|f^{(q)}(y) - f^{(q)}(T^i y)| = O(1)$$

et

$$f^{(q)}(T^i Sy) - f^{(q)}(Sy)| = O(1);$$

il suffit donc de démontrer que $R_q(x,y) = O(1)$. Or

$$R_q(x,y) = \|x - T^i y\|\, |f'^{(q)}(\xi_1) - f'^{(q)}(\xi_2)|,$$

où $T^j \xi_1, T^j \xi_2$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, n'appartiennent pas à $[0, 1/(Cq)]$, donc

$$R_q(x,y) = \|x - T^i y\| \cdot |q(e_q \pm O(1)) - q(e_q \pm O(1))| = O(1) q \|x - T^i y\| = O(1). \ \blacksquare$$

LEMME 4. *Supposons que f et α vérifient les hypothèses du lemme 3. Alors il existe une suite (r_q) de nombres réels telle que*

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_q \lambda\{x \in \mathbb{T} : |f^{(q)}(x) + f^{(q)}(-x) - r_q| \geq M\} = 0.$$

Démonstration. On considère $g(x) = f(x) + f(-x)$. Tout d'abord l'application $x \mapsto -x$ sur le cercle est une isométrie qui permute les intervalles $[i/q, (i+1)/q[$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$. Puis, grâce à la vitesse d'approximation de α par des rationnels, la rotation par $-\alpha$ peut être regardée comme la rotation par $(q-1)p/q$. Il est donc clair que quitte à effectuer quelques adaptations dans la démonstration du lemme 3 on obtient le résultat. $\blacksquare$

Soit f satisfaisant aux hypothèses du lemme 3. Soient

$$\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{T}, \quad b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 3. *Si* $\sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i$, *si* α *satisfait à* (11), *si* $\widehat{g}(n) \in O(1/|n|)$ *et si la fonction*

$$F(x) = g(x) + \sum_{i=1}^n (b_i f(x-\beta_i) + c_i f(\beta_i - x))$$

est positive de moyenne 1, *alors le flot spécial* T^F *n'est pas mélangeant.*

Démonstration. Posant $R = \sum_{i=1}^n b_i$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= g(x) + \sum_{i=1}^n b_i(f(x-\beta_i) - f(x)) + \sum_{i=1}^n c_i(f(x) \pm f(-x) + f(\beta_i - x)) \\ &= g(x) + R(f(x) + f(-x)) + \sum_{i=1}^n b_i f_{-\beta_i}(x) + \sum_{i=1}^n c_i \widetilde{f}_{\beta_i}(x), \end{aligned}$$

où $\widetilde{f}(y) = f(-y)$. Maintenant, il suffit d'appliquer le lemme 3, le lemme 4, le théorème 2 et la proposition 3. ■

REMARQUE 4. Si $f(x) = -\log x$ et g est à variation bornée, le résultat du théorème 3 a été démontré par Kochergin dans [10].

REMARQUE 5. (1) Un cas particulier est celui de $f(x) = -(\log x + \log(-x))$ car le coefficients de Fourier $\widehat{f}(n)$ de f sont d'ordre $O(1/|n|)$ (en effet, les parties réelles des coefficients de Fourier de $\ln x$ ($x \in]0,1[$) forment une suite dans $O(1/|n|)$). Donc le théorème 2 s'applique directement sans aucune hypothèse sur α.

(2) Supposons que α soit un nombre irrationnel quelconque. Si dans le théorème 3 on suppose que tous les β_i appartiennent à $\mathbb{Z}\alpha$, alors T^F n'est pas mélangeant (en effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f_{k\alpha}(x) = g_k(x+\alpha) - g_k(x)$ pour une fonction mesurable g_k).

REFERENCES

[1] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, Math. Surveys Monogr. 50, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[2] J. Aaronson, M. Lemańczyk, C. Mauduit and H. Nakada, *Koksma's inequality and group extensions of Kronecker transformations*, in: Algorithms, Fractals and Dynamics, Y. Takahashi (ed.), Plenum Press, 1995, 27–50.

[3] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer, New York, 1982.

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon, Oxford, 1960.

[5] K. M. Khanin and Ya. G. Sinai, *Mixing of some classes of special flows over a circle rotation*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 26 (1992), no. 3, 1–21 (in Russian).

[6] A. Ya. Khintchin, *Continued Fractions*, Univ. of Chicago Press, 1960.

[7] A. V. Kočergin [A. V. Kochergin], *On the absence of mixing in special flows over the rotation of a circle and in flows on a two-dimensional torus*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 205 (1972), 515–518 (in Russian); English transl.: Soviet Math. Dokl. 13 (1972), 949–952.

[8] —, *Time change for flows and mixing*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37 (1973), 1275–1298 (in Russian).

[9] —, *On the mixing of special flows over interval exchange maps and in smooth flows on surfaces*, Mat. Sb. 96 (1975), 471–502 (in Russian).

[10] —, *Nonsingular saddle points and the absence of mixing*, Mat. Zametki 19 (1976), 453–468 (in Russian); English transl.: Math. Notes 19 (1976), 277–286.

[11] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, 1974.

[12] M. Lemańczyk and C. Mauduit, *Ergodicity of a class of cocycles over irrational rotations*, J. London Math. Soc. 49 (1994), 124–132.

[13] M. Lemańczyk, F. Parreau and D. Volný, *Ergodic properties of real cocycles and pseudo-homogeneous Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 4919–4938.

[14] V. V. Ryzhikov, *The absence of mixing in special flows over rearrangements of segments*, Math. Notes 55 (1994), 648–650.

[15] K. Schmidt, *Cocycles of Ergodic Transformation Groups*, Lecture Notes in Math. 1, Mac Millan of India, 1977.

Département de Mathématiques et d'Informatique
Université Nicolas Copernic
12/18 rue Chopin
87-100 Toruń, Pologne
E-mail: mlem@mat.uni.torun.pl

Received 12 April 1999;
revised 15 December 1999 (3730)