COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. 84/85 2000 PART 1

SUR LA COHOMOLOGIE DANS LES SCHÉMAS DE BERNOULLI

PAR

THIERRY DE LA RUE (ROUEN)

Abstract. We introduce an invariant of cohomology in Bernoulli shifts, which is used to answer a question about cohomology of Hölder functions with finitary functions whose coding time is integrable. When restricted to the class of Hölder functions, this invariant even provides a criterion of cohomology.

1. Préliminaires. On note $X := A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites doublement infinies de lettres appartenant à un alphabet fini A. On considère la transformation T de X qui décale les coordonnées à gauche, i.e. si $x = (x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in X$, Tx est le point $y = (y_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ défini par $\forall p \in \mathbb{Z}$, $y_p := x_{p+1}$. On munit X d'une probabilité μ T-invariante de la forme $\mu = P^{\otimes\mathbb{Z}}$, où P est une probabilité sur A chargeant chaque lettre. Le système dynamique ainsi obtenu est donc un schéma de Bernoulli.

DÉFINITION 1.1. Deux fonctions mesurables f et g de X vers $\mathbb{R}$ sont dites *cohomologues* s'il existe une fonction mesurable $\varphi : X \to \mathbb{R}$, appelée *fonction de transfert*, telle que, pour μ-presque tout x,

$$g(x) = f(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx).$$

Étant donnée une fonction f, il est souvent bien utile de pouvoir trouver g qui lui soit cohomologue, et appartenant à une classe de fonctions donnée. Dans cet esprit, citons par exemple le résultat de Kočergin ([2]), qui prouve que toute fonction dans L^1 est cohomologue à une fonction continue, ou encore celui de Bowen ([1]), selon lequel une fonction höldérienne est toujours cohomologue à une fonction höldérienne ne dépendant que des coordonnées d'indices positifs de x. C'est une question de ce type qui constitue l'origine de ce travail : une fonction höldérienne est-elle toujours cohomologue à une fonction finitaire, à temps de codage d'espérance finie? (Voir les définitions au paragraphe suivant.) Pour y répondre, on introduit un invariant de la cohomologie dans un schéma de Bernoulli.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 28D05, 60G10.

Pour $x \in X$ et $a \in A$, on note $x^{(a)}$ le point de X ayant les mêmes coordonnées que x, exceptée celle d'indice 0 qui est remplacée par a :

$$\forall p \neq 0, \quad x_p^{(a)} := x_p \quad \text{et} \quad x_0^{(a)} := a.$$

Si f est une fonction mesurable de X vers $\mathbb{R}$, et si pour un point $x \in X$ l'expression

$$\varDelta_a^n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} \left(f(T^k x) - f(T^k x^{(a)}) \right)$$

a une limite quand $n \to +\infty$, on note $\varDelta_a f(x)$ cette limite. En fait, il suffit d'une condition un peu plus faible pour pouvoir définir sans ambiguïté $\varDelta_a f(x)$: si on peut trouver une sous-suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ de densité 1 telle que $\varDelta_a^{n_k} f(x)$ converge, on pose

$$\varDelta_a f(x) := \lim_{k\to+\infty} \varDelta_a^{n_k} f(x).$$

Exemples

Définition 1.2. Une fonction $h : X \to \mathbb{R}$ est dite *höldérienne* s'il existe $M > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que, pour tous $x, y \in X$ et tout entier $n \geq 0$, $x_j = y_j$ pour tout $j \in \{-n, \dots, n\}$ entraîne $|h(x) - h(y)| < M\alpha^n$.

Si h est une telle fonction höldérienne, on a pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$|h(T^k x) - h(T^k x^{(a)})| < M\alpha^{|k|-1},$$

et donc $\varDelta_a h(x)$ est bien défini pour *tout* $x \in X$.

Définition 1.3. On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est *finitaire à temps de codage d'espérance finie* (FTCEF) si, pour μ-presque tout $x \in X$, il existe un plus petit entier $M(x) \geq 0$ tel que pour tout $y \in X$, $y_j = x_j$ pour tout $j \in \{-M(x), \dots, M(x)\}$ entraîne $f(y) = f(x)$, et si

$$\int_X M(x)\, d\mu < +\infty.$$

Notons que si f est FTCEF, pour μ-presque tout x il existe un plus petit entier $N(x)$ tel que, pour $|k| > N(x)$, $M(T^k x) < |k|$. En effet, soit

$$\sigma(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{M(T^k x)\geq |k|}.$$

Comme M est d'espérance finie, on a

$$\int_X \sigma\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(M \geq |k|) = 1 + 2\sum_{k\geq 1} \mu(M \geq k) < +\infty,$$

ce qui prouve que σ est μ-presque sûrement fini. On en déduit que pour μ-presque tout x, $\Delta_a f(x)$ est bien défini et vaut

$$\Delta_a f(x) = \sum_{k=-N(x)}^{N(x)} (f(T^k x) - f(T^k x^{(a)})). \tag{1}$$

2. Invariance par cohomologie

THÉORÈME 2.1. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour une lettre $a \in A$, $\Delta_a f(x)$ soit bien défini pour μ-presque tout x. Alors pour toute fonction g cohomologue à f, $\Delta_a g(x)$ est bien défini pour μ-presque tout x et vérifie*

$$\Delta_a g(x) = \Delta_a f(x).$$

P r e u v e. Remarquons tout d'abord que, puisque μ rend les coordonnées indépendantes, pour tout ensemble N μ-négligeable, on a aussi

$$\mu(\{x \in X \mid x^{(a)} \in N\}) = 0.$$

Soit φ une fonction de transfert vérifiant, pour μ-presque tout x, $g(x) = f(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$. Un calcul élémentaire donne, pour μ-presque tout x et tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_a^n g(x) = \Delta_a^n f(x) + \varphi(T^{-n}x) - \varphi(T^{-n}x^{(a)}) \\ - (\varphi(T^{n+1}x) - \varphi(T^{n+1}x^{(a)})). \end{aligned} \tag{2}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. En utilisant le théorème de Lusin, on trouve un compact K_ε de X vérifiant $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon/4$, et tel que $\varphi|_{K_\varepsilon}$ soit continue. Par ergodicité de T, il existe un ensemble négligeable N_ε en dehors duquel $T^{-n}x \in K_\varepsilon$ pour un ensemble d'entiers n de densité au moins $1 - \varepsilon/4$. Puis, pour μ-presque tout x, on a aussi $x^{(a)} \notin N_\varepsilon$. On en déduit l'existence d'un ensemble E_1 d'entiers, de densité au moins $1 - \varepsilon/2$, tel que pour tout $n \in E_1$, $T^{-n}x$ et $T^{-n}x^{(a)}$ sont dans K_ε. La fonction de transfert φ étant uniformément continue sur le compact K_ε, on obtient

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in E_1}} (\varphi(T^{-n}x) - \varphi(T^{-n}x^{(a)})) = 0.$$

Par le même raisonnement, on obtient un ensemble E_2 de densité au moins $1 - \varepsilon/2$ tel que

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in E_2}} (\varphi(T^{n+1}x) - \varphi(T^{n+1}x^{(a)})) = 0.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve un ensemble d'entiers $E := E_1 \cap E_2$ de densité au moins $1 - \varepsilon$ tel que

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in E}} (\Delta_a^n g(x) - \Delta_a^n f(x)) = 0.$$

Il est alors facile de construire un ensemble E' d'entiers de densité 1 vérifiant la même propriété, d'où le résultat annoncé. ∎

Remarque. L'hypothèse de l'indépendance des coordonnées sous μ n'est utilisée que pour obtenir la non-singularité de l'application $x \mapsto x^{(a)}$. Le théorème 2.1 s'étend donc à toute probabilité μ ergodique pour laquelle cette propriété est vérifiée. C'est le cas en particulier lorsque μ est *quasi-Bernoulli*, i.e. lorsque μ est équivalente à la mesure produit $\mu^- \otimes \mu^+$, où μ^- (respectivement μ^+) est la loi sous μ de $(x_n)_{n<0}$ (respectivement de $(x_n)_{n\geq 0}$). Comme on peut le voir dans [3], la classe de ces mesures quasi-Bernoulli englobe notamment les lois des processus de Markov stationnaires dont les probabilités de transitions sont toutes strictement positives, et plus généralement les mesures de Gibbs (selon la définition donnée par Bowen dans [1]) dont le support est $A^{\mathbb{Z}}$ tout entier.

3. Un exemple d'application. Le théorème 2.1 donne une condition nécessaire pour être cohomologue à une fonction FTCEF qui, on le verra ensuite, n'est pas toujours remplie par les fonctions höldériennes.

Proposition 3.1. *Pour qu'une fonction $g : X \to \mathbb{R}$ soit cohomologue à une fonction FTCEF, il est nécessaire que pour tout $a \in A$, $\Delta_a g(x)$ soit bien défini pour μ-presque tout x, et que cette fonction ne prenne qu'une quantité dénombrable de valeurs.*

Preuve. Si g est une fonction cohomologue à f FTCEF, le théorème 2.1 prouve que pour toute lettre $a \in A$, $\Delta_a g(x)$ est bien défini pour μ-presque tout x, et est égal à $\Delta_a f(x)$. Or, f étant FTCEF, il est facile de voir que f ne peut prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs. En utilisant (1), on voit que $\Delta_a f(x) = \Delta_a g(x)$ est une somme finie de valeurs de f, et on en conclut que la fonction $\Delta_a g$ ne peut elle aussi prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs. ∎

Pour répondre négativement à la question posée ci-dessus, il suffit donc de trouver une fonction h höldérienne telle que pour une lettre a, $\Delta_a h$ prenne un continuum de valeurs. Pour cela, plaçons-nous dans le cas où $A = \{0, 1\}$, et posons

$$h(x) := x_0 \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^j} x_j.$$

Cette fonction h est clairement höldérienne, et un calcul facile donne, pour $x \in X$ tel que $x_0 = 1$,

$$\Delta_0 h(x) = 1 + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{1}{2^{|k|}} x_k.$$

Pour $\mu = P^{\otimes \mathbb{Z}}$ où $P(0) = P(1) = 1/2$, $\Delta_0 h(x) - 1$ est ici la somme de deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0, 1]$. La fonction $\Delta_0 h$ prend donc un continuum de valeurs.

4. Un critère de cohomologie pour les fonctions höldériennes. On se propose maintenant de montrer que si l'on se restreint à la classe des fonctions höldériennes, l'utilisation de Δ_a fournit un critère de cohomologie. Précisons ici que lorsque l'on parle de cohomologie entre deux fonctions höldériennes g et h, l'égalité $g(x) = h(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$ doit avoir lieu pour *tout* $x \in X$: on ne se réfère plus maintenant à une mesure T-invariante précise.

On a besoin du théorème suivant, donné dans [4].

THÉORÈME 4.1 (Livšic). *Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne. Alors h est cohomologue à* 0 *si et seulement si pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in X$ vérifiant $T^p x = x$, on a*

$$h(x) + h(Tx) + \ldots + h(T^{p-1}x) = 0.$$

De plus, la fonction de transfert est aussi höldérienne.

THÉORÈME 4.2. *Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne. On a l'équivalence entre les propriétés suivantes* :

(i) *Il existe $c \in \mathbb{R}$ et φ höldérienne tels que $h = c + \varphi - \varphi \circ T$.*
(ii) *Pour tout $a \in A$ et tout $x \in X$, $\Delta_a h(x) = 0$.*
(iii) *Il existe $a \in A$ tel que, pour tout $x \in X$, $\Delta_a h(x) = 0$.*

Preuve. Il suffit de montrer que la troisième propriété implique la première. Soit $a \in A$ tel que $\Delta_a h = 0$. On pose $c := h(\ldots, a, a, a, \ldots)$, et pour simplifier on suppose $c = 0$. Soit $x \in X$ vérifiant $T^p x = x$ pour un certain entier $p \geq 1$, et montrons que $h(x) + h(Tx) + \ldots + h(T^{p-1}x) = 0$. Posons tout d'abord

$$L := M \sum_{k \geq 0} \alpha^k,$$

où M et α sont donnés dans la définition de "h höldérienne". Soit ensuite n un entier, $n \geq 1$. On définit le point $y \in X$ par

$$y_j := \begin{cases} a & \text{si } -np \leq j \leq np - 1, \\ x_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse $\Delta_a h = 0$, on vérifie facilement que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (h(T^k x) - h(T^k y)) = 0. \tag{3}$$

Puisque h est höldérienne, on a

$$(4)\qquad \Big|\sum_{k<-np}(h(T^kx)-h(T^ky))\Big| + \Big|\sum_{k\geq np}\Big(h(T^kx)-h(T^ky)\Big)\Big| < 2L.$$

En utilisant aussi $h(\ldots,a,a,a,\ldots)=0$ et la périodicité de x, on obtient de même

$$(5)\qquad \Big|\sum_{-np\leq k<np}(h(T^kx)-h(T^ky)) - 2n(h(x)+\ldots+h(T^{p-1}x))\Big| < 2L.$$

De (3)–(5) on déduit

$$|2n(h(x)+\ldots+h(T^{p-1}x))| < 4L.$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $n\geq 1$, on ne peut avoir que

$$h(x)+\ldots+h(T^{p-1})x = 0. \blacksquare$$

Question. Soit f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ telle que pour une (toute?) lettre $a\in A$, $\Delta_a f(x)$ soit bien défini et nul pour μ-presque tout x. La fonction f est-elle nécessairement cohomologue à une constante?

Remerciements. L'auteur tient à remercier le rapporteur pour les simplifications qu'il a suggérées dans la rédaction de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 470, Springer, Berlin, 1975.

[2] A. V. Kočergin, *On the homology of functions over dynamical systems*, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 1637–1641.

[3] F. Ledrappier, *Sur la condition de Bernoulli faible et ses applications*, Lecture Notes in Math. 532, Springer, Berlin, 1976, 152–159.

[4] A. N. Livšic, *Cohomology of dynamical systems*, Math. USSR-Izv. 6 (1972), 1278–1301.

UPRES-A CNRS 6085
Université de Rouen – Mathématiques
Site Colbert
F-76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France
E-mail : delarue@univ-rouen.fr

Received 29 March 1999;
revised 5 May 1999 (3721)