A. MATHÉEV (SOFIA)

P 346. Est-ce que toute matrice quadratique orthogonale de degré $n \neq 3$ et dont les éléments sont des nombres complexes, peut être représentée sous la forme d'un produit de deux matrices du même genre symétriques (c'est-à-dire involutives)?

La réponse est affirmative pour $n = 3$.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 511, 2. VI. 1960.

A. GUICHARDET (PARIS)

P 347. Considérons le segment $[0, 1]$ avec la mesure de Lebesgue μ. Soit R une relation d'équivalence sur $[0, 1]$ dont le graphe est mesurable. Admettons que toute permutation s de $[0, 1]$ laissant μ quasi-invariante et telle que $R(x, s(x))$ pour presque tout x est égale presque partout à l'identité.

Existe-t-il un ensemble de complémentaire négligeable dans $[0, 1]$ sur lequel R induise la relation d'équivalence dont les classes sont les points?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 517, 29. IX. 1960.

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

P 348. Existe-t-il (la sphère étant exclue) une surface fermée telle qu'un tétraèdre régulier donné, dont tous les sommets glissent sur la surface en question, puisse prendre toutes les orientations possibles, comme il en est le cas pour le tétraèdre inscrit dans une sphère?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 497, 21. IV. 1960.

P 349. Convenons d'appeler *distance* de deux points A et B situés sur une surface S le minimum des longueurs de tous les arcs AB situés sur S. Le point le plus éloigné de A soit, par définition, le point P sur S dont la distance de A est la plus grande possible.

Existe-t-il une surface fermée S telle que

1° à tout A sur S correspond un seul point $P = f(A)$ le plus éloigné de A,

2° $f(f(A)) = A$ pour tout $A \in S$,

3° pour tout A de S il n'y a que deux chemins joignant A à $f(A)$ et dont les longueurs sont égales à la distance entre A et $f(A)$, f étant la fonction définie par 1°?

Un ellipsoïde peut-il avoir les propriétés 1°, 2° et 3°?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 499, 21. IV. 1960.

COMPTES RENDUS

SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

Les comptes rendus des communications faites aux Sections de la Société sont publiés par le périodique „Prace Matematyczne" (en polonais). Ici nous ne publions que les résumés des communications parvenues de leurs auteurs et dont les résultats ne seront pas publiés prochainement dans une autre forme.

SECTION DE TORUŃ

14. XII. 1959. S. Jaśkowski, *The proof of a reduction of the decision problem for dependent sentential variables.*

According to a theorem previously published by the author [1], there is no decision method for the class of problems: whether a formula with dependent sentential variables is deducible from the set of axioms $(\mathrm{II})_3$ or not. The author presents now an important part of the proof of that theorem.

Let M denote $\langle A, \{P_i\}_{i=1}^m\rangle$, where P_i are n-ary relations over A. We define ternary relations Q_i, R_k, $S_{j,k}$ over the n-th Cartesian power of A:

$$Q_i(x, y, z) \leftrightarrow P_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$R_k(x, y, z) \leftrightarrow \bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} x_i = y_i = z_i, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$S_{j,k}(x, y, z) \leftrightarrow \bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i \neq k}} x_i = y_i = z_i, \quad j = 1, \ldots, k-1;\ k = 1, \ldots, n,$$

where $x = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, $y = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, $z = \langle z_1, \ldots, z_n\rangle$ and we write

$$M^n = \langle A^n, \{Q_i\}_{i=1}^m, \{R_k\}_{k=1}^n, \{S_{j,k}\}_{j=1}^{k-1}{}_{,k=1}^{n}\rangle.$$

---

(1) S. Jaśkowski, *Sur les variables propositionnelles dépendantes*, Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sectio A, 1 (1948), p. 17-21.

Abbreviations.

$\Phi(x, y, z, r)$ for $xyz\ E\ r\ KNxNrNyNr$.

$\Phi(r)$ for $KK\ \Phi(x, y, z, r)\ \Phi(y, z, x, r)\ \Phi(z, x, y, r)$.

$\Psi(r)$ for $K\ xNyzNr\ zNxyNr$.

$\theta(x, y, z, q, r, s)$ for $yz\ E\ NxNs\ NxNKNyNrNzNq$.

$\theta(q, r, s)$ for $KK\ \theta(x, y, z, q, r, s)\ \theta(y, x, z, q, s, s)\ \theta(z, x, y, r, s, s)$.

I^n for the logical product of $\Phi(r_k)$, $\Phi(s_{j,k})$, $\Psi(r_k)$, $\theta(r_j, r_k, s_{j,k})$, $\theta(r_k, r_j, s_{j,k})$ with $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k-1$.

The formula I^n is fulfilled in M^n.

For every formula α with dependent sentential variables $p_1, \ldots, p_m$ and individual variables $x_1, \ldots, x_n$, α^n denotes the formula being the result of replacing

$$p_i \text{ by } yzq_i, \quad x_k \text{ by } yzCr_kxzCr_k$$

in α.

THEOREM 1. *α being deducible from* $(\mathrm{II})_n$, $CI^n\alpha^n$ *is deducible from* $(\mathrm{II})_3$.

THEOREM 2. *M being a countermodel for α, M^n is a countermodel for α^n.*

Proof of Theorem 1 in the case of α being the axiom of $(\mathrm{II})_n$ is based on the following lemmas in $(\mathrm{II})_3$ (1_k - 5_k denoting here the axioms of $(\mathrm{II})_n$):

LEMMA 1. $(1_k)^n$.

LEMMA 2. (a) $E\ xCpxq\ CNxNpxq$, (b) $E\ xCpxq\ xCNxNpxq$, (c) $E\ xCpxq\ xCNxNpq$, (d) $E\ xCpNxq\ CNxNpNxq$.

LEMMA 3. $C\ \Phi(x, y, z, r)\ xyz\ E\ yzCrxzp\ yzCrxyCrxzp$.

LEMMA 4. $C\ \Phi(r)\ xyz\ E\ yzCrxzCryzq\ yzCrxyCryzq$.

LEMMA 5. $C\ \Phi(r)\ E\ yzCrxzp\ yzCrxzCryzCrxzp$.

LEMMA 6. $C\ \Phi(r_k)(2_k)^n$.

LEMMA 7. $C\ \Phi(r)\ xyz\ E\ CNyNrNxCrxzp\ CNyNrNzCrxzp$.

LEMMA 8. $C\ NxNyp\ yNxNp$.

LEMMA 9. $C\ zNxyNr\ xyz\ E\ xp\ NxCNyNrNxp$.

LEMMA 10. $C\ K\ \Phi(r)zNxyNr\ xyz\ C\ NxyCrxzp\ xyCrNyzCrxzp$.

LEMMA 11. $C\ K\Phi(r)\Psi(r)\ C\ NyzCrxzq\ yzCrxzCrNyzCrxzq$.

LEMMA 12. $C\ K\Phi(r_k)\Psi(r_k)(3_k)^n$.

LEMMA 13. $C\ yzCrxzCrp\ yzCrp$.

LEMMA 14. $C\ xNyzNr\ x\ C\ yzCrxzCryzp\ yzp$.

LEMMA 15. $C\Psi(r_k)(5_k)^n$.

LEMMA 16. $C\Psi(r_k)(4_k)^n$.

LEMMA 17. $C\ K\Phi(s)\theta(q, r, s)\ E\ yzCqxzCqyzCrxyCryzp\ yzCsxzCsyzp$.

LEMMA 18. $C\ KKK\Phi(r_j)\Phi(r_k)\Phi(s_{j,k})K\theta(r_j, r_k, s_{j,k})\theta(r_k, r_j, s_{j,k})(6_{j,k})^n$.

25. I. 1960. A. Pieczkowski, *Système modal avec implication par facteurs.*

Système modal avec implication par facteurs est entendu ici au sens défini par Jaśkowski [2]. Soit Q_f un tel système. On a les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Quelle que soit la formule E du système Q_f, il existe une traduction T de E en une formule du calcul des prédicats dans laquelle E est un théorème du système Q_f lorsque $T[E]$ en est un du calcul des prédicats, et réciproquement.*

Il est à remarquer que si E contient n signes d'implication par facteurs, les ensembles de variables précédées par les prédicats dans $T[E]$ sont des sous-ensembles de l'ensemble des n variables; cependant, il peut y avoir de tels sous-ensembles qui ne sont pas des ensembles de variables précédées par des prédicats dans $T[E]$, car la formule $A \underset{f}{\rightarrow} B$ ne dépend pas des facteurs de la formule A.

THÉORÈME 2. *Le système $S5$ de Lewis se laisse plonger dans Q_f d'une façon adéquate.*

THÉORÈME 3. *Le système Q de Jaśkowski se laisse plonger dans Q_f d'une façon adéquate.*

SECTION DE WROCŁAW

23. VI. 1960. Jan Mycielski, *On the coincidence of two mapping of the n-cell into itself.*

K^{n+1} denotes the closed $(n+1)$-cell $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$, S^n — the unit n-sphere $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

A continuous mapping $f\colon S^n \to S^n$ is called *essential* if it is not homotopical to a constant.

THEOREM 1. *If $f\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ is a continuous mapping such that $f\colon S^n \to S^n$ and $f|S^n$ is essential, then $K^{n+1} \subset f(K^{n+1})$.*

Proof. Suppose that $p \in K^{n+1}$ and $p \notin f(K^{n+1})$. Let $f^*(x)$ be the mapping defined by the projection of $f(x)$ into S^n from the centre p. Of course, f^* is continuous and $f^*(x) = f(x)$ for $x \in S^n$. The mapping $f_t^*(x) = f^*(tx)$, $x \in S^n$ and $0 \leqslant t \leqslant 1$, is not essential for a fixed small t since the diameter of $f_t^*(S^n) = f^*(\{x_0^2 + \ldots + x_n^2 = t\})$ is small. Therefore $f^*|S^n$ and $f|S^n$ are not essential, q. e. d.

(2) S. Jaśkowski, *Sur les variables propositionnelles dépendantes*, Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sectio A, 1 (1948), p. 17-21, et *On the modal and causal functions in symbolic logic*, Studia Philosophica 4 (1951), p. 71-92.

THEOREM 2. *If $f, g\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ are two continuous mappings such that $f\colon S^n \to S^n$ and $f|S^n$ is essential, then there exists such an $x \in K^{n+1}$ that $f(x) = g(x)$.*

Proof. Suppose that $f(x) \neq g(x)$ for every $x \in K^{n+1}$. Then we can define a continuous mapping $h\colon K^{n+1} \to S^n$ putting

$$h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{\|f(x)-g(x)\|}.$$

But this is not consistent with Theorem 1 since we shall prove that $h|S^n$ is essential. In fact, $f|S^n$ being essential, it is enough to show a homotopy between $f|S^n$ and $h|S^n$. Since $f(x) \neq tg(x)$ for $x \in S^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (because $f(x) \neq g(x)$ and $\|f(x)\| = 1$ for $x \in S^n$), we obtain such a homotopy putting

$$h_t(x) = \frac{f(x)-tg(x)}{\|f(x)-tg(x)\|} \quad \text{for} \quad x \in S^n,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

q. e. d.

Remark. If one uses the known fact that the identity is an essential mapping of S^n onto S^n, then Theorem 2 gives the Fixed Point Theorem for the closed n-cell (if one takes $f =$ the identity).

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME VIII

COMMUNICATIONS