Putting $p_0 = (x_0, y_0)$, $p_0' = (x_0', y_0')$, $p = (x, y)$, $p' = (x', y')$, we may rewrite (5) as follows:

$$(6)\qquad \sqrt{(x_0-x_0')^2+(y_0-y_0')^2} < \frac{1}{|D|^2}\iint_D \iint_{D'} \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx\,dx'\,dy\,dy'.$$

In view of the Cauchy inequality

$$(7)\qquad \sqrt{(x_1-x_1')^2+(y_1-y_1')^2}+\sqrt{(x_2-x_2')^2+(y_2-y_2')^2} \geqslant \sqrt{(x_1+x_2-x_1'-x_2')^2+(y_1+y_2-y_1'-y_2')^2} = 2\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1'+x_2'}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1'+y_2'}{2}\right)^2}$$

the function $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ of arguments x, x', y, y' is convex. Thus (6) is a special case of the Jensen inequality (see [1]). The theorem is thereby proved.

Comparing this theorem with theorem 4 of [2], we can see that there is no simple relation between the efficiencies of systematic and stratified sampling in a plane, even if we confine ourselves to exponential correlation functions and such regions as squares or regular hexagons.

REFERENCES

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1934.

[2] S. Zubrzycki, *Remarks on random, stratified and systematic sampling in a plane*, Colloquium Mathematicum 6 (1958), p. 251-264.

Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1960

P R O B L È M E S

P 56, R 1. La réponse affirmative à la première question nous a été signalée par A. Asplund et B. Grünbaum.

I, 4, p. 333.

P 83, R 1. La réponse est négative (1).

II. 2, p. 154.

(1) C. Ryll-Nardzewski, *Sur le corps des opérateurs de Mikusiński*, Studia Mathematica 14 (1954), p. 247-248.

P 93, R 1. La réponse est affirmative (2).

II. 3-4, p. 298 (226).

(2) R. C. Lyndon, *An interpolation theorem in the predicate calculus. Properties preserved under homomorphism. Properties preserved in subdirect products*, Pacific Journal of Mathematics 9 (1959), p. 129-164. La démonstration de la solution affirmative signalée par J. Łoś (voir E. Marczewski, *Sur les congruences et les propriétés positives d'algèbres abstraites*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), p. 220-228, renvoi 12, et J. Łoś, *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*, Mathematical interpretations of formal systems, Amsterdam 1955, p. 106) n'a pas été publiée.

P 173, R 1. Pour l'exemple d'une suite poissonnienne au sens précisé dans le problème, voir le travail de Steinhaus et Urbanik sur ces suites (3).

IV. 2, p. 242.

(3) H. Steinhaus et K. Urbanik, *Poissonsche Folgen*, Mathematische Zeitschrift 72 (1959), p. 127-145.

P 227, R 1. A. Goetz a démontré que la réponse est affirmative. D'après un théorème de Poincaré (4), la courbe fermée la plus courte divisant une surface fermée convexe en deux parties dont les courbures totales sont égales est une géodésique. La longueur l d'une géodésique fermée la plus courte ne dépasse donc pas celle d'une courbe arbitraire partageant en deux la courbure totale. Or un tel partage se laissant réaliser par des coupures planes, l ne dépasse pas la longueur de certaines coupures planes, en particulier celle du périmètre d'un ovale de diamètre au plus égal à d par hypothèse. On a par conséquent $l \leqslant \pi d$.

V. 2, p. 235.

(4) Voir p. ex. W. Blaschke, *Einführung in die Differentialgeometrie*, Berlin 1950, § 69, 17.

P 254, R 2. La réponse est négative (5).

VI, p. 264.

(5) Voir J. Hájek, *Concerning relative accuracy of stratified and systematic sampling in a plane*, ce fascicule, p. 133-134.

P 258, R 1. Une solution partielle est connue: le nombre $I(n)$ d'interprètes nécessaires et égal à $\frac{1}{3}\binom{n}{2}$ lorsque n est de la forme $6k+1$ ou $6k+3$ (triplets de Steiner).

A. Goetz nous a signalé un autre résultat partiel: dans l'estimation

$$I(n) \geqslant E\left(\frac{1}{3}\left[\binom{n}{2}+2\right]\right),$$

qui est évidemment valable pour tout n naturel, on a le signe d'égalité lorsque n est de la forme $2^{k-1}d-1$ où $k=1,2,\ldots$ et $d=1$, 3 ou 5; on a le signe d'inégalité pour tous les n pairs.

VI, p. 332.

P 268, R 1. Voir **P 173, R 1** (6).

VI, p. 335.

(6) Ce fascicule, p. 135.

P 269, R 1. La réponse négative nous a été signalée d'abord par Jan Mycielski. On en trouvera une démonstration de Grünbaum dans son travail récent (7).

VI, p. 335.

(7) B. Grünbaum, *On some properties of convex sets*, ce fascicule, p. 39-42.

P 282, R 2. D'après un résultat de J.-P. Kahane communiqué à la Rédaction par une lettre, la réponse est négative, même dans le cas où la fonction f est continue.

VII. 1, p. 108 et VII. 2, p. 308.

P 287, R 1. La réponse est affirmative (8).

VII.1, p. 109.

(8) B. J. Birch, *Note on a problem of Erdős*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 55 (1959), p. 370-373.

A. LELEK (WROCŁAW)

P 312 et **313.** Formulés dans la communication *Sur deux genres d'espaces complets*.

Ce fascicule, p. 34.

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

P 314. Formulé dans la communication *Mesure et dérivée.*

Ce fascicule, p. 88.

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

P 315. Formulé dans la communication *On a problem of interpolation by periodic functions.*

Ce fascicule, p. 95.

JAN MYCIELSKI (WROCŁAW)

P 316. Existe-t-il un groupe abstrait qui n'est isomorphe à un sous-groupe d'aucun groupe connexe localement compact?

En particulier, en est-il ainsi du groupe des permutations paires de sous-ensembles finis d'un ensemble infini?

H. Freudenthal a montré (9) que la réponse est affirmative si la condition de compacité locale est remplacée par celle de compacité.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 426, 27. II. 1959 et 484, 17. II. 1960.

(9) Voir S. Hartman et J. Mycielski, *On the imbedding of topological groups into connected topological groups*, Colloquium Mathematicum 5 (1958), p. 167-169.

P 317. Une fonction réelle $f(x)$ ayant la propriété de Baire et satisfaisant à l'équation $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tout point (x, y) d'un ensemble plan résiduel R, coïncide-t-elle toujours avec une fonction linéaire, sauf dans un ensemble de I[re] catégorie?

On sait qu'en remplaçant la propriété de Baire par la mesurabilité et l'ensemble R résiduel par un ensemble dont le complémentaire est de mesure nulle, la fonction $f(x)$ coïncide toujours avec une fonction linéaire, sauf dans un ensemble de mesure nulle [10].

Nouveau Livre Écossais, Probl. 438, 27. II. 1959.

P 318. C_n étant l'espace des fonctions réelles continues de n variables parcourant l'intervalle fermé $\langle 0,1\rangle = I$, soit $\max\limits_{p\epsilon I^n}|f(p)-g(p)|$ la distance entre deux fonctions f et g de C_n.

Est-ce que l'ensemble des polynômes formés de fonctions continues de moins que n variables est de I[re] catégorie dans C_n? En est-il de même de l'ensemble des fonctions de moins que n polynômes à n variables?

En est-il encore de même de celui des fonctions à dérivées partielles continues (au lieu de polynômes)?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 440, 27. II. 1959.

P 319. Est-ce que tout espace métrique, séparable, connexe et homogène (c'est-à-dire transformable en lui-même par homéomorphie de façon qu'un de ses points se trouve transformé en un autre arbitrairement donné d'avance) est σ-connexe (c'est-à-dire n'étant une réunion d'aucune suite infinie dénombrable d'ensembles fermés, non vides et disjoints)?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 445, 27. II. 1959.

P 320. Existe-t-il un espace métrique, complet et connexe qui ne contient aucun ensemble infini σ-connexe (au sens défini dans le problème qui précède)?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 479, 18. II. 1960.

P 321. Une variété V compacte à 2 dimensions (le plan projectif ou la surface du tore par exemple) étant donnée, existe-t-il un ensemble E fini de graphes finis ayant la propriété suivante: la présence dans V d'une image homéomorphe d'un graphe fini arbitraire G équivaut à l'absence dans G de tout sous-graphe homéomorphe à l'un quelconque des graphes de E.

(10) Voir par exemple S. Hartman, *Beitrag zur Theorie des Maßringes mit Faltung*, Studia Mathematica 18 (1959), p. 67-79.

Pour $V = S^2$ la réponse affirmative résulte du théorème bien connu de Kuratowski [11].

(11) C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*, Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 271-283.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 476, 17. II. 1960.

K. URBANIK (WROCŁAW)

P 322. Soit P un ensemble parfait situé sur la demi-droite $0 \leqslant x \leqslant \infty$ contenant son point 0 et dont la dimension de Hausdorff est positive dans tout entourage de ce point.

Est-ce que le semi-groupe additif engendré par l'ensemble P contient nécessairement cette demi-droite?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 485, 7. III. 1960.

B. KNASTER (WROCŁAW)

P 323. Appelons *dendroïde* tout continu connexe par arcs et dont tout sous-continu est unicohérent.

Caractériser topologiquement (par des propriétés intrinsèques) la famille de tous les dendroïdes ayant des images homéomorphes sur le plan.

Nouveau Livre Écossais, Probl. 471, 3. XI. 1959.

P 324. Est-ce qu'un continu dont aucun sous-continu ne coupe le plan peut avoir une image continue dont tout sous-continu coupe le plan?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 495, 14. IV. 1960

R. ENGELKING (VARSOVIE)

P 325. Les nombres $1, a_1, \ldots, a_n$ étant arithmétiquement indépendants, portons sur une circonférence C de longueur 1, à partir d'un point fixé et dans un même sens de parcours, une suite infinie d'arcs de longueurs puisées arbitrairement parmi les nombres $a_1, \ldots, a_n$, le bout initial de l'arc suivant coïncidant avec le bout final du précédent.

Est-ce que les bouts des arcs d'une telle suite peuvent former un ensemble non-dense sur la circonférence C?

Nouveau Livre Écossais, Probl. 487, 30. III. 1960.