TRAVAUX CITÉS

[1] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Berlin 1936.

[2] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, 30 (1930), p. 264-286.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 12. 4. 1960

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 2

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME SUR LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE SAUTS

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

On trouve dans la littérature diverses démonstrations du théorème: *la dérivée d'une fonction de sauts existe presque partout et est égale à* 0. Elles s'appuient sur le théorème de Lebesgue concernant la dérivabilité d'une fonction monotone. Le théorème de Lebesgue peut être démontré, il est vrai, par des moyens élémentaires, comme l'a montré F. Riesz [2], p. 6-9, mais alors sa démonstration est longue. Récemment R. P. Boas a donné dans sa communication [1] une simple démonstration du théorème sur la dérivée d'une fonction de sauts. Sa démonstration a l'avantage de ne pas utiliser le théorème de Lebesgue, mais elle fait intervenir cependant les notions de mesurabilité d'une fonction et d'ensemble mesurable au sens de Lebesgue. Elle s'appuie notamment sur le théorème d'après lequel les dérivées de Dini des fonctions monotones sont mesurables, et sur un autre d'après lequel tout ensemble mesurable contient un sous-ensemble fermé qui en diffère par un ensemble de mesure arbitrairement petite. R. Sikorski a proposé de démontrer le théorème sur la dérivée d'une fonction de sauts par des moyens encore plus simples. Je vais donner ici une démonstration qui réalise cette proposition. Je n'y utilise que le théorème de Borel sur le recouvrement et les propriétés élémentaires des ensembles de mesure nulle.

La démonstration donnée dans cette communication peut être étendue presque sans modifications aux fonctions singulières, c'est-à-dire celles qui admettent une variation arbitrairement petite dans le complément d'un ensemble fermé de mesure arbitrairement petite. Dans ce but, il faut remplacer, dans la démonstration du lemme III, l'ensemble composé de points $\{a_{i_k}\}$ par un ensemble fermé de mesure inférieure à $\varepsilon/2$ et dans le complément duquel la variation de la fonction est inférieure à $\varepsilon/4d$. Les autres modifications à faire sont insignifiantes et ne comportent aucune difficulté.

LEMME I. *Un intervalle fermé $\langle\alpha, \beta\rangle$ étant couvert par un ensemble fini I d'intervalles ouverts, il est possible de choisir parmi eux une suite* *finie* (a_i, b_i) *où* $i = 1, 2, \ldots, n$ *et telle que tous les intervalles d'indice* i *pair soient disjoint deux à deux, que tous les intervalles d'indice impair le soient aussi et que l'on ait* $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \supset \langle \alpha, \beta\rangle$.

Démonstration. Évidemment, il existe une suite d'intervalles $(a_i, b_i)\in I$ couvrant $\langle \alpha, \beta\rangle$ et telle que si l'on en enlève ne fût-ce qu'un seul terme, le reste cesse de couvrir $\langle \alpha, \beta\rangle$. On peut évidemment admettre que leurs extrémités droites forment une suite non décroissante, c'est-à-dire telle que $a_i \leqslant a_{i+1}$. On a alors nécessairement $b_i \leqslant b_{i+1}$, car $b_i > b_{i+1}$ entraînerait $(a_{i+1}, b_{i+1}) \subset (a_i, b_i)$ et il serait possible d'enlever l'intervalle (a_{i+1}, b_{i+1}) sans que l'intervalle fermé $\langle \alpha, \beta\rangle$ cesse d'être couvert.

Supposons maintenant que le lemme ne soit pas vrai; il existerait donc parmi les intervalles ouverts $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ deux qui ne seraient pas disjoints, bien que leurs indices différeraient de 2. On aurait alors $a_i \leqslant a_{i+2} < b_i \leqslant b_{i+2}$ pour un i, d'où $(a_i, b_i) \cup (a_{i+2}, b_{i+2}) = (a_i, b_{i+2}) \supset (a_{i+1}, b_{i+1})$ et l'intervalle (a_{i+1}, b_{i+1}) pourrait être enlevé sans que l'intervalle fermé $\langle \alpha, \beta\rangle$ cesse d'être couvert.

Le lemme est ainsi démontré.

Désignons par $\bar{f}(x)$ et $\underline{f}(x)$ la dérivée supérieure et inférieure, respectivement, de f au point x.

Lemme II. *Une fonction* $f(x)$ *étant non-décroissante dans l'intervalle ouvert* (a, b), *il existe, pout tout nombre* $d > 0$, *un ensemble ouvert* $G \subset (a, b)$ *tel que*

$$f(b-0)-f(a+0) \geqslant \frac{d}{2}|G|, \tag{1}$$

$$G \supset \{x: a < x < b, \bar{f}(x) > d\} \stackrel{\text{def}}{=} E. \tag{2}$$

Démonstration. Comme $f(x)$ ne décroît pas, il existe, pour tout $x\in E$, un entourage $(a_x, b_x) \subset (a, b)$ de x, tel que

$$\frac{f(b_x)-f(a_x)}{b_x-a_x} > d. \tag{3}$$

Posons $G = \bigcup_{x\in E}(a_x, b_x)$. Evidemment, G est un ensemble ouvert et on a (2).

Soit (α_r, β_r) la r-ième composante de l'ensemble G. Choisissons un nombre arbitraire $\eta > 0$ et une suite de nombres $\eta_r > 0$ telle que $\alpha_r + \eta_r < \beta_r - \eta_r$ et que

$$\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r < \frac{2\eta}{d}. \tag{4}$$

En vertu du théorème de Borel, il existe une suite finie d'intervalles ouverts (a_x, b_x) couvrant l'intervalle fermé $\langle \alpha_r+\eta_r, \beta_r-\eta_r\rangle$. D'après le lemme I, il est possible d'en extraire une suite (a_{x_i}, b_{x_i}), où $i = 1, 2, \ldots, n_r$, le couvrant également et telle que tous les intervalles d'indice i pair soient disjoints deux à deux, de même que ceux d'indice impair. On a

$$\bigcup_{i=1}^{[n_r/2]}(a_{x_{2i}}, b_{x_{2i}}) \cup \bigcup_{i=1}^{[(n_r+1)/2]}(a_{x_{2i-1}}, b_{x_{2i-1}}) \supset \langle \alpha_r+\eta_r, \beta_r-\eta_r\rangle.$$

L'une au moins des sommes figurant dans le membre gauche doit avoir une mesure supérieure égale à la moitié de la longueur du segment figurant dans le membre droit. Supposons que ce soit la somme qui correspond aux indices pairs. On a donc

$$\sum_{i=1}^{[n_r/2]}(b_{x_{2i}}-a_{x_{2i}}) > \frac{\beta_r-\alpha_r-2\eta_r}{2}.$$

Il en résulte en raison de (3) que

$$\sum_{i=1}^{[n_r/2]}\big(f(b_{x_{2i}})-f(a_{x_{2i}})\big) > \frac{d}{2}(\beta_r-\alpha_r-2\eta_r).$$

Comme $f(x)$ ne décroît pas et les intervalles d'indice pair sont disjoints, la somme figurant dans le membre gauche de la dernière inégalité ne dépasse pas $f(\beta_r-0)-f(\alpha_r+0)$. On a donc

$$f(\beta_r-0)-f(\alpha_r+0) > \frac{d}{2}(\beta_r-\alpha_r-2\eta_r).$$

En écrivant des inégalités analogues pour toutes les composantes de l'ensemble G, en les ajoutant membre à membre et en tenant compte de ce que, d'une part, la somme des accroissements $f(\beta_r-0)-f(\alpha_r+0)$ pour toutes les composantes de cet ensemble ne saurait être supérieure à $f(b-0)-f(a+0)$, et que, d'autre part, la somme des longueurs des composantes est la mesure de l'ensemble G, on conclut que

$$f(b-0)-f(a+0) > \frac{d}{2}|G| - \frac{d}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r.$$

On a $f(b-0)-f(a+0) > \frac{1}{2}d|G|-\eta$ en vertu de (4); on a donc (1), le nombre η étant arbitraire.

Définition. Une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle ouvert (a, b) sera dite *fonction de sauts non-décroissante*, si elle est de la forme $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, où

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x < a_k, \\ s_k & \text{pour} \quad x > a_k, \end{cases}$$

$$0 \leqslant f_k(a_k) \leqslant s_k \quad \text{et} \quad \sum s_k < +\infty.$$

LEMME III. *Si $f(x)$ est une fonction de sauts non-décroissante, l'ensemble $\{x: \bar{f}(x) > d\}$ est de mesure nulle pour tout $d > 0$.*

Démonstration. Soit un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe une suite finie de points a_{i_k}, où $k = 1, 2, \ldots, n$, telle que

$$\sum_{a_r \neq a_{i_k}} s_r < \frac{d}{2}\varepsilon. \tag{5}$$

Les points a_{i_k} divisent l'intervalle (a, b) en $n+1$ intervalles ouverts $(a^{(j)}, b^{(j)})$, où $j = 1, 2, \ldots, n+1$. En vertu du lemme II, chacun de ces intervalles contient un ensemble ouvert G_j tel que

$$\sum_{a^{(j)} < a_k < b^{(j)}} s_k = f(b^{(j)} - 0) - f(a^{(j)} + 0) \geqslant \frac{d}{2} |G_j| \tag{6}$$

et $G_j \supset \{x: a^{(j)} < x < b^{(j)}, \bar{f}(x) < d\}$.

Posons $G = \bigcup_{j=1}^{n+1} G_j$. En ajoutant les inégalités (6) pour tous les j, on obtient

$$\sum_{a_r \neq a_{i_k}} s_r \geqslant \frac{d}{2} |G|.$$

Il en résulte $\varepsilon > |G|$ d'après (5). Tous les points de l'ensemble $\{x: \bar{f}(x) > d\}$, sauf un nombre fini de a_{i_k}, appartiennent à G; on a donc $|\{x: \bar{f}(x) > d\}| < \varepsilon$. Le nombre ε étant arbitraire, il vient

$$|\{x: \bar{f}(x) > d\}| = 0.$$

Définition. La différence de deux fonctions de sauts non-décroissantes sera appelée *fonction de sauts*.

THÉORÈME. *La dérivée d'une fonction de sauts existe presque partout et elle est égale* à 0.

Démonstration. En vertu de la définition, il suffit d'établir ce théorème pour une fonction de sauts non-décroissante. Soit $f(x)$ une

telle fonction. On a $\underline{f}(x) \geqslant 0$ en tout point. Il résulte du lemme III que la mesure de l'ensemble $\{x: \bar{f}(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x: \bar{f}(x) > 1/k\}$ est nulle; on a donc presque partout $\bar{f}(x) \leqslant 0$. Il s'ensuit que l'on a presque partout $0 \leqslant \underline{f}(x) \leqslant \bar{f}(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\underline{f}(x) = \bar{f}(x) = f'(x)$, c. q. f. d.

TRAVAUX CITÉS

[1] R. P. Boas, *Differentiability of jump functions*, Colloquium Mathematicum 8 (1960), p. 81-82.

[2] F. Riesz et Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest 1953.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1960