COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 2

ÜBER DIE ÄQUIVALENZ VON ZWEI SÄTZEN IN DER MENGENLEHRE

VON

G. FODOR (SZEGED)

Es sei N eine beliebige Menge. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{Pt}(N)$ die Menge aller Teilmengen von N. Ist $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl, so wird eine nicht-leere Teilmenge $\boldsymbol{I}$ von $\boldsymbol{Pt}(N)$ ein $\mathfrak{m}$-*additives Ideal* genannt, wenn $\boldsymbol{I}$ mit allen Teilmengen von $\boldsymbol{I}$ von der Mächtigkeit $<\mathfrak{m}$ zugleich deren Summe und mit jeder Menge $X\in\boldsymbol{I}$ zugleich jede Teilmenge von X als Element enthält. Wir sagen, daß die Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ von der Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ aus *stark erreichbar* ist, wenn $\mathfrak{n}$ zu jedem System $\boldsymbol{K}$ von Kardinalzahlen gehört, das folgenden Bedingungen genügt: (1) $\mathfrak{m}\in\boldsymbol{K}$, (2) ist $\mathfrak{p}\in\boldsymbol{K}$ und $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{q}$, so ist auch $\mathfrak{q}\in\boldsymbol{K}$; (3) ist jedem Element p einer Menge P von der Mächtigkeit $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}\in\boldsymbol{K}$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{q}_p\in\boldsymbol{K}$ zugeordnet, so ist auch $\sum_{p\in P}\mathfrak{q}_p\in\boldsymbol{K}$, (4) gilt $\mathfrak{p}\in\boldsymbol{K}$ und ist $\mathfrak{q}$ die auf $\mathfrak{p}$ nächstfolgende Kardinalzahl, so ist auch $\mathfrak{q}\in\boldsymbol{K}$.

Wir wollen zeigen, daß die nachstehenden zwei Sätze miteinander äquivalent sind.

(A) *Es sei $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl, N eine Menge und $\boldsymbol{S}$ ein Mengensystem, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *die Mächtigkeit $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$ ist von $\mathfrak{m}$ aus stark erreichbar;*

(ii) *jedes System $\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{Pt}(N)-\boldsymbol{S}$ von nicht leeren paarweise disjunkten Mengen hat eine Mächtigkeit $\leqslant\mathfrak{m}$;*

(iii) $N\subset\bigcup_{X\in\boldsymbol{S}}X$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es ein System $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{S}$ von einer Mächtigkeit $\leqslant\mathfrak{m}$, so daß

$$N\subset\bigcup_{X\in\boldsymbol{M}}X.$$

(B) *Es sei E eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\gamma$ und $\boldsymbol{I}$ ein eigentliches $\aleph_{\lambda+1}$-additives Ideal von Teilmengen von E. Wenn*

(a) $\aleph_\gamma$ *von* $\aleph_\lambda$ *aus stark erreichbar ist*

und

(b) *das Ideal* $\boldsymbol{I}$ *die Menge* $\{x\}$ *für jedes* $x \in E$ *enthält;*

so gibt es für jede Menge B, *für welche* $B \notin \boldsymbol{I}$ *gilt, eine Folge* $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_{\lambda+1}}$ *vom Typus* $\omega_{\lambda+1}$ *von paarweise disjunkten Mengen, so daß*

(c) *für jede* $\xi < \omega_{\lambda+1}$, $B_\xi \notin \boldsymbol{I}$ *gilt*

und

(d) $B = \bigcup_{\xi<\omega_{\lambda+1}} B_\xi$ *ist.*

Der Satz (A) wurde von W. Sierpiński [2] für $\mathfrak{m} = \aleph_0$ formuliert und bewiesen. Die hier angegebene Formulierung stammt von A. Tarski [3]. Der Satz (B) wurde von P. Erdös und dem Verfasser [1] bewiesen.

Äquivalenzbeweise. (A) → (B): Nehmen wir die Gültigkeit von (A) an. Ist der Satz (B) falsch, so gibt es eine nicht zu $\boldsymbol{I}$ gehörende Teilmenge B von E, die folgende Eigenschaft aufweist: ist $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_{\lambda+1}}$ eine beliebige Folge paarweise disjunkter Teilmengen von E, für die man

$$B = \bigcup_{\xi<\omega_{\lambda+1}} B_\xi$$

hat, so ist die Mächtigkeit der Menge der Indizes $\xi < \omega_{\lambda+1}$, für welche $B_\xi \notin \boldsymbol{I}$ gilt, kleiner als $\aleph_{\lambda+1}$. Wir definieren nun das Ideal $\boldsymbol{I}_B$ wie folgt: Sei $F \in \boldsymbol{I}_B$ dann und nur dann, wenn eine Menge $I \in \boldsymbol{I}$ existiert, für die $F = I \cap B$ ist. Da $B \notin \boldsymbol{I}$, so ist $\boldsymbol{I}_B$ ein eigentliches $\aleph_{\lambda+1}$-additives Ideal in $\boldsymbol{Pt}(B)$. Jedes System $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(B) - \boldsymbol{I}_B$ von nicht leeren paarweise disjunkten Mengen hat eine Mächtigkeit $< \aleph_{\lambda+1}$. In der Tat: wäre diese Behauptung falsch, so gäbe es eine Folge $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_{\lambda+1}}$ von nicht leeren paarweise disjunkten Mengen A_ξ in $\boldsymbol{Pt}(B) - \boldsymbol{I}_B$. Sei $B_0 = A_0 \cup (B - \bigcup_{\xi<\omega_{\lambda+1}} A_\xi)$ und $B_\xi = A_\xi$ für $0 < \xi < \omega_{\lambda+1}$. Offenbar ist $B = \bigcup_{\xi<\omega_{\lambda+1}} B_\xi$. Da wegen $B_\xi \in \boldsymbol{Pt}(B) - \boldsymbol{I}_B$ jedes B_ξ ein Element von $\boldsymbol{Pt}(E) - \boldsymbol{I}$ ist, so wäre dann $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_{\lambda+1}}$ eine Mengenfolge vom Typus $\omega_{\lambda+1}$, für welche die Bedingungen (c) und (d) des Satzes (B) gelten. Das widerspricht aber unserer Annahme.

Jedes System $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{Pt}(B) - \boldsymbol{I}_B$ von nicht leeren paarweise disjunkten Mengen hat also eine Mächtigkeit $\leqslant \aleph_\lambda$. Nach dem Satz (A) ergibt sich daraus, daß $\boldsymbol{I}_B$ eine Teilmenge $\boldsymbol{I}'$ von der Mächtigkeit $\leqslant \aleph_\lambda$ enthält, so daß

$$B \subset \bigcup_{F \in \boldsymbol{I}'} F.$$

Wegen $\boldsymbol{I}_B \subset \boldsymbol{I}$ würde daraus $B \in \boldsymbol{I}$ folgen, was mit der Voraussetzung $B \notin \boldsymbol{I}$ unverträglich ist. Also (A) → (B).

(B) → (A): Nehmen wir die Gültigkeit von (B) an. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}^+$ die auf $\mathfrak{m}$ nächstfolgende Kardinalzahl. Es sei $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{Pt}(N)$ das

System derjenigen Mengen $X \in \boldsymbol{Pt}(N)$, für die es ein System $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{S}$ mit $\overline{\overline{\boldsymbol{Y}}} < \mathfrak{m}^+$ gibt, so daß $X \subset \bigcup_{F \in \boldsymbol{Y}} F$ gilt. Da $\mathfrak{m}^+$ regulär ist, so ist $\boldsymbol{I}$ nach dem Satz 2.18 von Tarski [4] das kleinste $\mathfrak{m}^+$-additive Ideal, das $\boldsymbol{S}$ enthält. Wegen (iii) enthält $\boldsymbol{I}$ jede Menge, die aus einem einzigen Element von N besteht.

Wir zeigen, daß $\boldsymbol{I}$ ein uneigentliches Ideal ist, d. h. daß $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Pt}(N)$ gilt. Wäre nämlich $\boldsymbol{I}$ ein eigentliches Ideal in $\boldsymbol{Pt}(N)$, so gäbe es in $\boldsymbol{Pt}(N)$ eine Menge M, für die $M \notin \boldsymbol{I}$ gilt. Dann aber würde sich aus (B), für $\mathfrak{m}^+ = \aleph_{\lambda+1}$, die Existenz einer Folge paarweise disjunkter Mengen ergeben, für welche die Bedingungen (c) und (d) gültig sind, was mit der Voraussetzung (ii) des Satzes (A) unverträglich ist. Also ist $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Pt}(N)$. Dann existiert eine Teilmenge $\boldsymbol{I}' \in \boldsymbol{I}$ von einer Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$, so daß

$$N = \bigcup_{F \in \boldsymbol{I}'} F.$$

Da $\mathfrak{m}^+$ regulär ist, so folgt hieraus nach der Definition des Ideals $\boldsymbol{I}$, daß es eine Teilmenge $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{S}$ von der Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$ gibt, für welche

$$N \subset \bigcup_{F \in \boldsymbol{M}} F$$

gilt. Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

ZITATENNACHWEIS

[1] P. Erdös and G. Fodor, *Some remarks on set theory VI*, Acta Scientiarum Mathematicarum 18 (1957), S. 243-260.

[2] W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), S. 214-220.

[3] A. Tarski, *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre*, ibidem 30 (1938), S. 132-155.

[4] — *Ideale in vollständigen Mengenkörpern I*, ibidem 32 (1939), S. 45-63.

Reçu par la Rédaction le 30. 7. 1960