occurs by an interval of length $2^{-k}\eta$. If $\eta < \mu/2$, the part of E_a outside $\bigcup I$ will be of measure at least $\mu/2$, and so will contain a closed set F of measure at least $\mu/4$. Since F is closed and the intervals I are closed (and finite in number), F is at a positive distance from $\bigcup I$. Therefore to each x in F we can assign a positive δ_x such that $f(x+\delta_x)-f(x) > \delta_x/a$ and the interval $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ is disjoint from $\bigcup I$. Since f is nondecreasing we then have

$$(1) \qquad \frac{f(x+\delta_x)-f(x-\delta_x)}{\delta_x} \geqslant \frac{f(x+\delta_x)-f(x)}{\delta_x} > 1/a.$$

A finite collection $\{G_k\}$ of the intervals $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ cover F. By reducing the number of G_k, if necessary, we can arrange that no point of F is in more than two G_k. Let $2\delta_k$ be the length of G_k. Then

$$(2) \qquad \operatorname{meas} F \leqslant 4\sum \delta_k.$$

By (1), the variation V_n of f over G_n is at least δ_n/a, so from (2) we have

$$\operatorname{meas} F \leqslant 4a\sum V_n.$$

But all the G_n are outside $\bigcup I$, they overlap at most in pairs, and the variation of f outside $\bigcup I$ is at most ε. Thus $\operatorname{meas} F \leqslant 8\varepsilon a$. But $\operatorname{meas} F \geqslant \mu/4$, and we obtain a contradiction if $\varepsilon < \mu/(32a)$. Thus E_a must be of measure 0, and the proof is complete.

REFERENCES

[1] J. S. Lipiński, *Sur la dérivée d'une fonction de sauts*, Colloquium Mathematicum 4 (1957), p. 197-205.

[2] E. J. McShane, *Integration*, Princeton 1944.

[3] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa-Lwów 1937.

NORTHWESTERN UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

MESURE ET DÉRIVÉE

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Problèmes et résultats. Le rapport entre les fonctions dérivées et la mesure de Lebesgue est bien connu. En particulier, si l'on se borne aux dérivées sommables au sens de Lebesgue sur tout intervalle fini, on peut les définir de la manière suivante.

Soit $f(x)$ une fonction sommable au sens de Lebesgue sur tout intervalle fini. Appelons *valeur moyenne* de la fonction $f(x)$ au point x_0 la limite

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt,$$

évidemment si elle existe, et désignons-la par $S(f, x_0)$. Lorsque $S(f, x)$ existe en tout point et que, de plus, $S(f, x) = f(x)$, la fonction $f(x)$ est *une dérivée*.

L'intégrale qui intervient dans cette définition est liée à la mesure de Lebesgue. On peut se poser la question suivante: quelles fonctions obtiendra-t-on si l'on remplace, dans cette définition, la mesure de Lebesgue par une autre mesure μ, non-atomique et telle que tout intervalle admette une mesure μ positive, l'intégrale de Lebesgue étant remplacée en même temps par une μ-intégrale?

Nous ne considérerons dans la suite que des fonctions à valeurs finies. Admettons que la fonction $f(x)$ finie est μ-intégrable sur tout intervalle fini. Désignons par $S_\mu(f, a, b)$ la valeur moyenne, de poids μ, de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle ouvert (a, b), c'est-à-dire le nombre

$$[\mu(a, b)]^{-1}\int_a^b f(t)\,d\mu(t)\cdot \operatorname{sign}(b-a).$$

On peut donc avoir $b < a$. Désignons encore par $S_\mu(f, x_0)$ la valeur moyenne, de poids μ, de la fonction $f(x)$ au point x_0, c'est-à-dire la limite $\lim_{h\to 0} S_\mu(f, x_0, x_0+h)$, si elle existe. Lorsque $S_\mu(f, x)$ existe en tout point et que, pour tout x, on a $S_\mu(f, x) = f(x)$, la fonction $f(x)$ sera dite une *μ-dérivée*.

L'ensemble de toutes les μ-dérivées sera désigné par D_μ. Si, en particulier, μ est la mesure de Lebesgue, D_μ est l'ensemble des dérivées finies et sommables sur tout intervalle; on écrira dans ce cas D au lieu de D_μ. Il est évident que la même fonction peut être une μ-dérivée pour différentes mesures μ.

Le premier problème que je me propose de résoudre ici est celui d'existence des fonctions qui sont des μ-dérivées à la fois pour toutes les mesures μ en question, et de leur caractérisation. Dans le second problème, il s'agira de caractériser les fonctions qui sont des μ-dérivées pour une μ-mesure au moins (c'est-à-dire qui appartiennent à la famille $\bigcup_\mu D_\mu$). Les solutions des deux problèmes sont contenues dans les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *L'ensemble $\bigcap_\mu D_\mu$ est celui de toutes les fonctions continues.*

THÉORÈME 2. *L'ensemble $\bigcup_\mu D_\mu$ est celui de toutes les fonctions finies de première classe de Baire qui ont la propriété de Darboux.*

2. Dérivées des fonctions composées. Soit $\mu = \varphi_\mu(x) = \mu(0, x)$ pour $x > 0$, $\varphi_\mu(0) = 0$ et $\varphi_\mu(x) = -\mu(x, 0)$ pour $x < 0$. En vertu des hypothèses faites sur la mesure μ, la fonction $u = \varphi_\mu(x)$, appelée *la distribuante* de la mesure μ, est croissante et continue; il en existe donc la fonction inverse croissante et continue $x = \varphi_\mu^{-1}(u)$. Pour toute fonction $\psi(x)$ croissante et continue, il existe une mesure ν non atomique $\varphi_\nu(x)$ qui est positive pour tout intervalle et telle que $\psi(x) = \varphi_\nu(x)$.

On a ([1], Théorème 94.3)

$$(*)\qquad \int_x^{x+h} f(t)\,d\mu(t) = \int_u^{u+k} f[\varphi_\mu^{-1}(s)]\,ds,$$

où $u = \varphi_\mu^{-1}(x)$, $k = \varphi_\mu^{-1}(x+h)-u$, $\lim_{k\to 0} h = 0$ et $\lim_{h\to 0} k = 0$.

Posons $f = f(x)$, $f\varphi_\mu^{-1} = f[\varphi_\mu^{-1}(u)]$. Alors, en vertu de $(*)$, $f \in D_\mu$ équivaut à $f\varphi_\mu^{-1} \in D$.

Les théorèmes 1 et 2 peuvent donc être exprimés sous la forme suivante:

THÉORÈME 1 bis. *Pour que, quelle que soit la fonction continue et croissante $\varphi(x)$, la fonction finie $f[\varphi(x)]$ soit une dérivée sommable dans tout intervalle, il faut et il suffit que la fonction $f(u)$ soit continue.*

THÉORÈME 2 bis. *Pour qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ continue et croissante pour laquelle la fonction $f[\varphi(\nu)]$ soit une fonction dérivée sommable dans tout intervalle, il faut et il suffit que la fonction $f(u)$ soit de I^{re} classe de Baire et qu'elle ait la propriété de Darboux.*

Le théorème 2 bis est connu. Si la fonction $f[\varphi(x)]$ est une dérivée, elle est de I^{re} classe de Baire et a la propriété de Darboux. Ces deux propriétés sont topologiques et invariantes par rapport à la composition avec la fonction continue et monotone $\varphi^{-1}(u)$. La condition est donc nécessaire. Elle est suffisante en vertu d'un théorème de Maximoff [2] (dans la thèse duquel la sommabilité de la dérivée $f[\varphi(x)]$ n'est pas mentionnée explicitement, mais résulte aisément de la démonstration).

Dans le théorème 1 bis, la condition est suffisante en vertu du théorème sur la dérivée de l'intégrale d'une fonction continue. Mais je vais prouver le théorème 1 tout entier (d'ailleurs sans faire intervenir les propriétés de la distribuante).

3. Démonstration du théorème 1. Admettons la continuité de la fonction $f(x)$, fixons un point x_0 et choisissons arbitrairement le nombre $\varepsilon > 0$. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que pour tout h satisfaisant à l'inégalité $0 < |h| < \delta$ et pour tout point $t \in (x_0, x_0+h)$, on a $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$. Par conséquent $0 < |h| < \delta$ entraîne

$$|S_\mu(f, x_0, x_0+h)-f(x_0)| = \Big|[\mu(x_0, x_0+h)]^{-1}\operatorname{sign} h \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,d\mu(t) - f(x_0)\Big|$$
$$\leqslant [\mu(x_0, x_0+h)]^{-1}\operatorname{sign} h \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,d\mu(t) < \varepsilon,$$

quelle que soit la mesure μ, c'est-à-dire

$$S_\mu(f, x_0) = \lim_{h\to 0} S_\mu(f, x_0, x_0+h) = f(x_0)$$

pour tout point x_0 et toute mesure μ. La fonction $f(x)$ appartient donc à $\bigcap_\mu D_\mu$.

Admettons maintenant que la fonction $f(x)$ est discontinue, ne fût-ce qu'en un point x_0. Je vais montrer qu'il existe alors une mesure μ telle que $f \notin D_\mu$. Si $f(x)$ n'est pas une dérivée au sens ordinaire, il suffit de prendre pour μ la mesure de Lebesgue. Reste donc à considérer le cas où $f(x)$ est une dérivée au sens ordinaire. Bornons nous, pour fixer les idées, à la discontinuité telle que $b = \overline{\lim_{x\to x_0+}} f(x) > f(x_0)$, le raisonnement étant analogue pour les autres discontinuités possibles. Soit $c = 2^{-1}[f(x_0)+b]$. Il existe une suite décroissante $\{x_n\}$ convergente vers x_0

et telle que $f(x_n) > c$. Selon Zahorski ([3], théorème 3), si $\varphi'(x)$ est la dérivée d'une fonction continue et a est un nombre arbitraire, tout entourage unilatéral (x_0, x_0+h) de tout point $x_0 \in \{x\colon \varphi'(x) > a\}$ contient une partie de mesure lebesguienne positive de l'ensemble $\{x\colon \varphi'(x) > a\}$. La dérivée $f(x)$ est finie; elle est donc dérivée d'une fonction continue. Posons $A_n = \{x\colon f(x) > c\} \cap (x_{n+1}, x_n)$. En désignant par $|\ |$ la mesure lebesguienne, on a en vertu du théorème de Zahorski

$$(1) \qquad |A_n| > 0 \quad \text{pour tout } n.$$

Posons encore $B_n = \{x\colon f(x) = c\} \cap (x_{n+1}, x_n)$, $C_n = \{x\colon f(x) < c\} \cap$ $\cap (x_{n+1}, x_n)$, et définissons les nombres d_n comme il suit:

$$(2) \qquad d_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |C_n| = 0, \\ \dfrac{(x_n - x_{n+1}) \int_{A_n} [f(t)-c]\,dt}{|C_n| \int_{A_n} [f(t)-c]\,dt + |A_n \cup B_n| \int_{C_n} [c-f(t)]\,dt} & \text{si } |C_n| > 0. \end{cases}$$

Soit E un ensemble mesurable quelconque; on a

$$E = \bigcup_n (E \cap A_n) \cup \Big[\bigcup_n (E \cap B_n)\Big] \cup \Big[\bigcup_n (E \cap C_n)\Big] \cup D,$$

D étant un ensemble arbitraire et tous les sommandes étant disjoints deux à deux. Posons

$$e_n = \frac{x_n - x_{n+1} - d_n |C_n|}{|A_n \cup B_n|}$$

et définissons la mesure μ comme il suit:

$$(3) \qquad \mu(E) = |D| + \sum_n d_n |E \cap C_n| + \sum_n e_n |E \cap (A_n \cup B_n)|.$$

On vérifie aisément que $|E| = 0$ entraîne $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble E. La mesure μ est donc non-atomique. On voit aussi que $\mu(a, b)$ 0 pour $a \neq b$. Lorsque les ensembles E et C_n sont mesurables,

$$(4) \qquad E \subset C_n \text{ entraîne } \mu(E) = d_n |E|,$$

et lorsque A_n et B_n le sont aussi,

$$(5) \qquad E \subset A_n \cup B_n \text{ entraîne } \mu(E) = e_n |E|.$$

Il en résulte en vertu de (3) que $\mu(x_{n+1}, x_n) = x_n - x_{n+1}$. L'additivité dénombrable de la mesure μ est une conséquence facile de (3); donc $\mu(x_0, x_1) = x_1 - x_0$. On a $|E| = \mu(E)$ pour les ensembles E disjoints de l'intervalle (x_0, x_1), d'où $|E| < \infty$ entraîne $\mu(E) < +\infty$. La fonction $\mu(E)$ a donc toutes les propriétés que doivent avoir les mesures en question. On conclut de (4) et (3) que

$$\int_{A_n \cup B_n} \varphi(t)\,d\mu(t) = e_n \int_{A_n \cup B_n} \varphi(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{C_n} \varphi(t)\,d\mu(t) = d_n \int_{C_n} \varphi(t)\,dt$$

pour toute fonction μ-intégrable ou, ce qui est équivalent, sommable au sens de Lebesgue dans les ensembles $A_n \cup B_n$ et C_n.

Évaluons l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t)\,d\mu(t) &= \int_{A_n} f(t)\,d\mu(t) + \int_{B_n} f(t)\,d\mu(t) + \int_{C_n} f(t)\,d\mu(t) \\ &= \int_{A_n} [f(t)-c]\,d\mu(t) + c\mu(A_n) + \int_{B_n} c\,d\mu(t) + \int_{C_n} [f(t)-c]\,dt + c\mu(C_n) \\ &= \int_{A_n} [f(t)-c]\,d\mu(t) - \int_{C_n} [c-f(t)]\,d\mu(t) + c\mu(A_n \cup B_n \cup C_n). \end{aligned}$$

Si $|C_n| = 0$, on trouve

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t)\,d\mu(t) = \int_{A_n} [f(t)-c]\,d\mu(t) + c\mu(A_n \cup B_n \cup C_n) > c\mu(x_{n+1}, x_n).$$

Si $|C_n| > 0$, on a

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t)\,d\mu(t) = e_n \int_{A_n} [f(t)-c]\,dt - d_n \int_{C_n} [c-f(t)]\,dt + c\mu(A_u \cup B_n \cup C_n).$$

En tenant compte de (2), on obtient

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t)\,d\mu = c\mu(A_n \cup B_n \cup C_n) = c\mu(x_{n+1}, x_n).$$

On a donc toujours

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(t)\,d\mu \geqslant c\mu(x_{n+1}, x_n).$$

En ajoutant cette inégalité membre à membre pour $n \geqslant i$, il vient

$$\int_{x_0}^{x_i} f(t)\,d\mu \geqslant c\mu(x_0, x_i),$$

ce qui prouve que $S_\mu(f, x_0, x_i) \geqslant c$. Il est donc impossible que l'on ait $S_\mu(f, x_0) = f(x_0) < c$. Ainsi, la fonction $f(x)$ n'appartient pas à D_μ.

4. Problème (P 314). Quelle sont les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les mesures μ et ν pour que l'on ait $D_\nu = D_\mu$?

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Kamke, *Das Lebesgue-Stieltjes-Integral*, Leipzig 1956.

[2] I. Maximoff, *Sur la transformation continue de quelques fonctions en dérivées exactes*, Известия Казанского Физико-Математического общества при Казанском Государственном Университете (3) 12 (1940), p. 57-81.

[3] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Transactions of the American Mathematical Society 69 (1950), p. 1-54.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1959

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VIII 1961 FASC. 1

ON AN APPLICATION OF UNIFORM DISTRIBUTION OF SEQUENCES

BY

INDAR S. LUTHAR (CHANDIGARH)

The object of this paper is to prove the following

THEOREM. *Let $\zeta = (\xi, \eta)$ be a point in the complex plane with ξ and η both irrational and let λ_n be the number of points with integral coordinates that lie in the circle*

$$|z - n\zeta| \leqslant 1.$$

We know that $\lambda_n = 2, 3$ or 4. Let k be any one of the numbers 2, 3 or 4 and let

$$f_k(N) = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ \lambda_n = k}} 1.$$

Then $\operatorname{Lim} f_k(N)/N$ *exists.*

We divide our proof into two cases, firstly where ξ, η and 1 are linearly independent over the rationals and secondly where they are not so. The result in the first case is contained in a more general theorem of Hartman, concerning an arbitrary bounded Jordan-measurable set (1). However, for the sake of completeness, we shall give here a proof of the result in the first case also.

The arcs in the figure are circular arcs with the four corners of the square as centres. AB is identified with DC, AD with BC.

Let

$$A_2 = A_2^1 \cup A_2^2 \cup A_2^3 \cup A_2^4$$

where for example A_2^1 is the region APD minus the closed arcs AP and PD

$$A_3 = A_3^1 \cup A_3^2 \cup A_3^3 \cup A_3^4$$

(1) S. Hartman, *Zur Gitterpunktverteilung bei Verschiebungen von Mengen*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 87-93, Satz II.